

## Chương III: Các Hàm Phức Cơ Bản

cuu duong than cong. com

- Đa thức
- Hàm mũ
- Hàm lượng giác
- Hàm hyperbol
- Hàm lôgarit
- Hàm lượng giác ngược

## III.1. Đa thức

$$P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

$P_n(z)$  là hàm nguyên.

Đạo hàm:

$$P'_n(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

## III.2. Hàm mũ - Exponential

Hàm mũ:  $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$\Rightarrow u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện Cauchy - Riemann})$$

$\Rightarrow e^z$  là hàm nguyên. Khi đó:

$$f'(z) = \frac{de^z}{dz} = \frac{\partial(e^x e^{iy})}{\partial x} = e^x e^{iy} = e^z,$$

### III.3. Hàm lượng giác I

- Hàm Sin, Cos:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

là các hàm nguyên.

- Hàm Tang và Cotang:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Các hàm này không giải tích trên toàn mặt phẳng phức, mà có các điểm dị thường.

### III.3. Hàm lượng giác II

- Các điểm dị thường của hàm  $\tan z$ :

$$\begin{aligned}\cos z &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 &= e^{i(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow z_k &= (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Tương tự, hàm  $\cot z$  có các điểm dị thường tại:

$$z_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## III.4. Hàm hyperbol

- Hàm Sin, Cosin hyperbolic:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

- Hàm Tang, Cotang hyperbolic:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}; \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

- Mối quan hệ với các hàm lượng giác:

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos iz; & \sinh z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \cosh iz; & \sin z &= -i \sinh iz. \end{aligned}$$

## III.5. Hàm lôgarit

- Hàm  $\log z$  được định nghĩa:

$$w = \log z \iff z = e^w.$$

(chú ý: ta dùng ký hiệu  $\ln()$  cho lôgarit thực, còn  $\log()$  cho lôgarit phức!)

- Mối liên hệ giữa  $\log()$  và  $\ln()$ :

$$\text{Ta viết: } z = \rho e^{i\theta} = e^{\ln \rho} \cdot e^{i\theta} = e^{\ln \rho + i\theta} = e^w.$$

$$\iff w = \ln \rho + i\theta.$$

$$\iff w = \ln |z| + i \arg(z). \quad (\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z})$$

- Đạo hàm:  $\frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z}.$

## III.6. Hàm lượng giác ngược

Ví dụ: tìm nghiệm của phương trình  $\cos z = 2$ .

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$
$$\Leftrightarrow e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0.$$

Ta viết  $w = e^{iz}$ , phương trình trên trở thành:

$$w - 4 + 1/w = 0$$
$$\Leftrightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (w - 2)^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow w = 2 \pm \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow e^{iz} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$$
$$\Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$$
$$\Leftrightarrow z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi.$$