

## QM Problems – ch. 2 – Harmonic oscillator

### 1. Xét bài toán dao động điều hoà

- Hàm Hamiltonian  $H$  trong cơ cổ điển tương đương với năng lượng toàn phần (xét trong bài toán bảo toàn). Hãy viết hàm Hamiltonian  $H$ .
- Sử dụng nguyên tắc tương ứng (giữa cơ cổ điển và cơ lượng tử), hãy dẫn ra toán tử Hamiltonian  $H$  (toán tử năng lượng toàn phần) trong bài toán dao động tử điều hoà (trong cơ lượng tử).
- Dùng phép đổi biến :  $(x, p) \rightarrow (a_+, a_-)$  (gọi là toán tử bậc thang) được xác định như sau:

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \quad [1].$$

Hãy chứng minh rằng toán tử Hamiltonian  $H$  có dạng

$$H = \hbar\omega \left( a_- a_+ - \frac{1}{2} \right)$$

hoặc

$$H = \hbar\omega \left( a_+ a_- + \frac{1}{2} \right).$$

- Hãy xác định giao hoán tử  $[\hat{p}, \hat{x}]$ .
- CM rằng  $[a_-, a_+] = a_- a_+ - a_+ a_- = 1$ , với  $a_+, a_-$  được cho bởi [1].
- Những “bài tập nhỏ” [Xin các bạn cố gắng làm thật chi tiết các bước]
  - Tìm trạng thái cơ bản và năng lượng cơ bản của dao động tử điều hoà, tức là dẫn ra công thức [2.59] và [2.60]
  - [Làm nhóm]** CM:  $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm} g) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a_{\mp} f)^* g dx$  [2.64]  
Với tính chất này, người ta gọi  $a_{\mp}$  là liên hợp hermit của  $a_{\pm}$ .
  - [Làm nhóm]** CM:  $a_+ a_- \psi_n = n \psi_n$  và  $a_- a_+ \psi_n = (n+1) \psi_n$  [2.65]
  - [Làm nhóm]** Sử dụng [2.64] và [2.65] để dẫn ra [2.66] và [2.67]
  - CM tính chất trực giao của các trạng thái dừng (còn gọi là hàm riêng) của dao động tử điều hoà :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}$  [2.68]. Sách đã làm. Các bạn làm kỹ lại!
- [Làm nhóm]** Hãy giải phương trình Schrödinger cho bài toán dao động tử điều hoà bằng phương pháp giải tích
- Tìm giá trị trung bình của động năng trong trạng thái thứ  $n$  của dao động tử điều hoà. Đã giải thích trên lớp. **Xin làm lại thật kỹ/chi tiết.**
- Tìm giá trị trung bình của thế năng trong trạng thái thứ  $n$  của dao động tử điều hoà. Xin làm **thật chi tiết** (công thức nào chưa rõ đều cần phải dẫn ra).  
Tìm giá trị trung bình của thế năng trong trạng thái thứ  $n$  của dao động tử điều hoà.  
Nhận xét.
- Trong dao động điều hoà cổ điển, ví dụ con lắc lò xo một chiều, miền được phép (cổ điển) là miền được giới hạn bởi những “điểm quay đầu cổ điển” (vật dao động không

thể vượt ra khỏi miền này). Bên ngoài miền được phép được gọi là miền cấm.  
 Xét hạt chuyển động trong thế dao động điều hòa trong cơ lượng tử. Giả sử hạt ở trạng thái cơ bản. Hãy tính xác suất tìm được hạt trong miền cấm và miền được phép để xem có khả năng tìm được hạt trong miền cấm không.

9. [Làm nhóm] Nguyên tử khối lượng  $m$  (trong một phân tử) được xem như hạt chuyển động trong thế điều hòa  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , với  $\omega$  là tần số dao động của nguyên tử. Dao động điều hòa của nguyên tử này bức xạ một photon năng lượng  $\epsilon$ . Giả sử bức xạ này do chuyển dời từ trạng thái kích thích thấp nhất của dao động tử điều hòa về trạng thái cơ bản.

- Hãy xác định biên độ dao động  $A$  của nguyên tử này theo cơ cổ điển.
- Tính xác suất để tìm được nguyên tử ở vị trí cách điểm cân bằng một khoảng lớn hơn  $A$ .

10. BT 2.11

11. BT 2.12

12. BT 2.13

Trong bài 2.13, nếu hàm sóng ban đầu là  $\Psi(x, 0) = A[2\psi_0(x) + 4i\psi_1(x)]$  ( $A$  là số thực dương) thì kết quả câu a) và d) trong bài tập này có thay đổi không? Hãy tính thử!

13. BT 2.41

14. BT 2.14

15. [Làm nhóm] Hạt khối lượng  $m$  chuyển động trong trường thế cho bởi

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Toán tử Hamiltonian của hạt là

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Hãy xác định (các) hàm sóng và năng lượng.

[Gợi ý: chú ý yêu cầu liên tục của hàm sóng tại  $x = 0$ ]

-----

Ghi chú:

- Những bài tô blue thuộc loại làm cho giỏi hơn. Các bạn rất nên cố gắng làm “thử”.
- Những bài tô green là loại BT nâng cao một chút xíu. Các bạn cần cố gắng làm.
- Bài màu đen là cơ bản. Xin cố gắng làm để hiểu rõ hơn và “luyện thể dục cho não” của bạn trở nên “rắn chắc” hơn [=nhạy nhay và thông minh hơn]
- Cho

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx = \text{erf}(1) = 0,8427$$