

Phần III.  
Tập hợp, ánh xạ, phép đếm

Biên soạn:  
TS.Nguyễn Viết Đông

1

## Tài liệu tham khảo

- [1]GS.TS Nguyễn Hữu Anh, Toán rời rạc, NXB Giáo dục
- [2]TS. Trần Ngọc Hội, Toán rời rạc

2

cuu duong than cong . com

## Tập hợp

### 1.Các phép toán trên tập hợp.

Phép hợp:  $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ .

Phép giao :  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ .

Hiệu :  $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ .

Hiệu đối xứng

$x \in A \oplus B \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$ .

Phần bù :Cho  $A \subseteq E$  thì

$$\bar{A} = E \setminus A$$

3

## Tập hợp

Tích Descartes:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$$

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

4

## Tập hợp

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, \mathbf{x}_i \in A_i\}$$

5

## Tập hợp

### 2. Tính chất của phép toán trên tập hợp

2.1) Tính lũy đẳng:

$$A \cap A = A \text{ và } A \cup A = A$$

2.2) Tính giao hoán:

$$A \cap B = B \cap A \text{ và } A \cup B = B \cup A.$$

2.3) Tính kết hợp:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{và } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

6

cuu duong than cong . com

## Tập hợp

2.4) Tính phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{và } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2.5) Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Suy ra:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\text{và } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

7

## Tập hợp

Mở rộng

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

8

## Tập hợp

### 3. Số phần tử của tập hợp hữu hạn.

Cho A là tập hợp hữu hạn. Số phần tử của tập A ký hiệu là  $|A|$ . Ta có:

- 1)  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .
- 2)  $|A \times B| = |A| |B|$
- 3)  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ ,  $\mathcal{P}(A)$  là tập các tập con của A

9

## Ảnh xạ

### *1. Định nghĩa và ký hiệu*

#### *1.1. Định nghĩa*

Cho hai tập hợp  $X, Y \neq \emptyset$ . Một *ảnh xạ*  $f$  từ  $X$  vào  $Y$  là qui tắc đặt tương ứng mỗi phần tử  $x$  của  $X$  với một phần tử duy nhất  $y$  của  $Y$  mà ta ký hiệu là  $f(x)$  và gọi là *ảnh* của  $x$  qua ảnh xạ  $f$ . Ta viết:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

10

cuu duong than cong . com

## Ảnh xạ

### *1.2. Ảnh xạ bằng nhau*

Hai ảnh xạ  $f$  và  $g$  từ  $X$  vào  $Y$  được gọi là *bằng nhau* nếu

$$\forall x \in X, f(x) = g(x).$$

### *1.3. Ảnh và ảnh ngược*

Cho ảnh xạ  $f$  từ  $X$  vào  $Y$  và  $A \subset X, B \subset Y$ . Ta định nghĩa:

11

## Ảnh xạ

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$= \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

$$\forall y \in Y, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x);$$

$$\forall y \in Y, y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x).$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

$$\forall x \in X, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B;$$

$$\forall x \in X, x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B.$$

12

## Ánh xạ

Ta thường ký hiệu  $f(X)$  bởi  $\text{Im}f$  và  $f^{-1}(\{y\})$  bởi  $f^{-1}(y)$ .  $\text{Im}f$  được gọi là **ảnh** của ánh xạ  $f$ .

Tính chất:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2);$$

$$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

13

## Ánh xạ

### 2. PHÂN LOẠI ÁNH XẠ

#### 2.1. Đơn ánh

Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **đơn ánh** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của  $X$  đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

14

cuu duong than cong . com

## Ánh xạ

- $f : X \rightarrow Y$  là một đơn ánh

$$\Leftrightarrow (\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có nhiều nhất một phần tử}).$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có nhiều nhất một nghiệm } x \in X).$$

- Suy ra:

$f : X \rightarrow Y$  không là một đơn ánh

$$\Leftrightarrow (\exists x, x' \in X, x \neq x' \text{ và } f(x) = f(x')).$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có ít nhất hai nghiệm } x \in X).$$

15

## Ánh xạ

#### 2.2. Toàn ánh:

Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **toàn ánh** nếu  $\text{Im}f = Y$ .

Những tính chất sau được suy trực tiếp từ định nghĩa.

$f : X \rightarrow Y$  là một toàn ánh

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset);$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có nghiệm } x \in X.$$

Suy ra:

$f : X \rightarrow Y$  không là một toàn ánh

$$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x));$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, f^{-1}(y) = \emptyset);$$

16

## Ánh xạ

### 2.3. Song ánh và ánh xạ ngược:

Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **song ánh** nếu  $f$  vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Tính chất.

$f : X \rightarrow Y$  là một song ánh

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x));$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có đúng một phần tử});$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm } x \in X.$$

17

## Ánh xạ

- Xét  $f : X \rightarrow Y$  là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi  $y \in Y$ , tồn tại duy nhất một phần tử  $x \in X$  thỏa  $f(x) = y$ . Do đó tương ứng  $y \mapsto x$  là một ánh xạ từ  $Y$  vào  $X$ . Ta gọi đây là **ánh xạ ngược** của  $f$  và ký hiệu  $f^{-1}$ . Như vậy:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ với } f(x) = y.$$

18

cuuduongthancong.com

## Ánh xạ

Cho  $P(x) = x^2 - 4x + 5$  và các ánh xạ

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ định bởi } f(x) = P(x);$$

$$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbf{R} \text{ định bởi } g(x) = P(x);$$

$$h : \mathbf{R} \rightarrow [1, +\infty) \text{ định bởi } h(x) = P(x);$$

$$k : [2, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \text{ định bởi } k(x) = P(x);$$

Hãy xét xem ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh và tìm ánh xạ ngược trong trường hợp là song ánh.

19

## Ánh xạ

### 3. TÍCH (HỢP THÀNH) CỦA CÁC ÁNH XẠ

**3.1. Định nghĩa:** Cho hai ánh xạ

$$f : X \rightarrow Y \text{ và } g : Y' \rightarrow Z$$

trong đó  $Y \subset Y'$ . **Ánh xạ tích**  $h$  của  $f$  và  $g$  là ánh xạ từ  $X$  vào  $Z$  xác định bởi:

$$h : X \rightarrow Z$$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$

- Ta viết:

$$h = g \circ f : X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto h(x) = g(f(x))$$

20

## Ánh xạ

### 3.2. Định lý:

Xét  $f : X \rightarrow Y$  là một song ánh. Khi đó:

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$$

trong đó ký hiệu  $\text{Id}_X$  là ánh xạ đồng nhất  $X \rightarrow X$  định bởi  $\text{Id}_X(x) = x, \forall x \in X$ ; ta gọi  $\text{Id}_X$  là *ánh xạ đồng nhất* trên  $X$ , tương tự  $\text{Id}_Y$  là ánh xạ đồng nhất trên  $Y$ .

21

## Ánh xạ

### 4. Lực lượng của tập hợp.

Mỗi tập  $A$  ta đặt tương ứng với một đối tượng  $|A|$  gọi là *lực lượng của tập*  $A$ , sao cho  $|A| = |B|$  khi và chỉ khi tồn tại song ánh từ  $A$  vào  $B$ . Lực lượng của tập  $A$  còn được gọi là *bản số của*  $A$  và ký hiệu là  $\text{card}A$ . Lực lượng của tập rỗng là số 0. Lực lượng của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  là  $n$ .

22

cuu duong than cong . com

## Ánh xạ

Lực lượng của tập số tự nhiên ký hiệu là  $\aleph_0$  (đọc là alép không) và gọi là *lực lượng đếm được*, còn lực lượng của tập số thực được gọi là *lực lượng continuum* và ký hiệu là  $\aleph$  (alep).

Tập hợp số hữu tỷ, tập hợp số nguyên, tập số chẵn có lực lượng đếm được.

Khoảng  $(0 ; 1)$ , đoạn  $[0 ; 1]$  có lực lượng continuum

23

## 5. Mathematical Induction (Qui nạp TH)

### 5.1. Mathematical Induction

Prove that if a set  $S$  has  $|S| = n$ , then  $|P(S)| = 2^n$

Base case ( $n=0$ ):  $S = \emptyset$ ,  $P(S) = \{\emptyset\}$  and  $|P(S)| = 1 = 2^0$

Assume  $P(k)$ : If  $|S| = k$ , then  $|P(S)| = 2^k$

Prove that if  $|S'| = k+1$ , then  $|P(S')| = 2^{k+1}$

Inductive hypothesis

$S' = S \cup \{a\}$  for some  $S \subset S'$  with  $|S| = k$ , and  $a \in S'$ .

Partition the power set of  $S'$  into the sets containing  $a$  and those not.

We count these sets separately.

24

## 5.1. Mathematical Induction

Assume  $P(k)$ : If  $|S| = k$ , then  $|P(S)| = 2^k$

Prove that if  $|S'| = k+1$ , then  $|P(S')| = 2^{k+1}$

$S' = S \cup \{a\}$  for some  $S \subset S'$  with  $|S| = k$ , and  $a \in S'$ .

Partition the power set of  $S'$  into the sets containing  $a$  and those not.

$$P(S') = \{X : a \in X\} \cup \{X : a \notin X\}$$

$$P(S') = \{X : a \in X\} \cup P(S)$$

Since the elements of the 2<sup>nd</sup> set are the subsets of  $S$ .

## 5.1. Mathematical Induction

Prove that if  $|S'| = k+1$ , then  $|P(S')| = 2^{k+1}$

$S' = S \cup \{a\}$  for some  $S \subset S'$  with  $|S| = k$ , and  $a \in S'$ .

$$P(S') = \{X : a \in X\} \cup P(S)$$

$$\{X : a \in X\} = \{\{a\} \cup X' : a \notin X'\}$$

$$\text{So } |\{X : a \in X\}| = |P(S)|$$

$$|P(S')| = |\{X : a \in X\}| + |P(S)|$$

$$= 2 |P(S)|$$

$$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

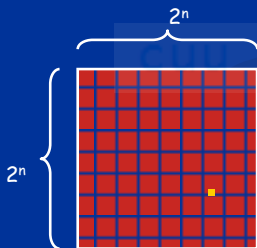
Subsets containing  $a$  are made by taking any set from  $P(S)$ , and inserting  $a$ .

cuu duong than cong . com

## A cool example

Deficient Tiling

A  $2^n \times 2^n$  sized grid is *deficient* if all but one cell is tiled.



## A cool example

We want to show that all  $2^n \times 2^n$  sized deficient grids can be tiled with tiles shaped like:



## A cool example

### Base case

Is it true for  $2^1 \times 2^1$  grids?



Yes

### Inductive Hypothesis:

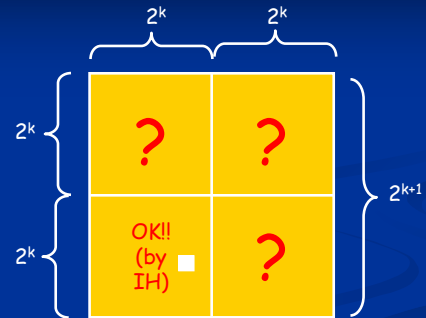
We can tile a  $2^k \times 2^k$  deficient board using our fancy designer tiles.

### Use this to prove:

We can tile a  $2^{k+1} \times 2^{k+1}$  deficient board using our fancy designer tiles.

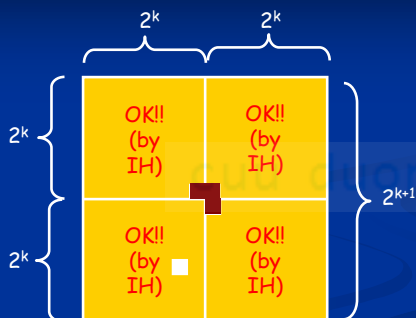


## A cool example

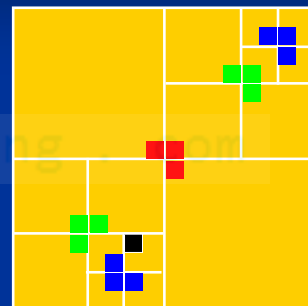


cuu duong than cong . com

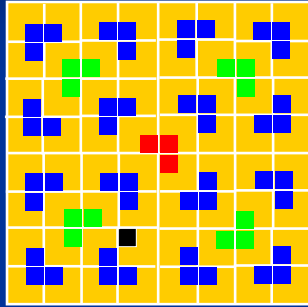
## A cool example



## A cool example



### A cool example



## 5.2.Strong Mathematical Induction

If

- $P(0)$  and
- $\forall n \geq 0 (P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)$

Then

- $\forall n \geq 0 P(n)$

In our proofs, to show  $P(k+1)$ , our inductive hypothesis assures that ALL of  $P(0), P(1), \dots, P(k)$  are true, so we can use ANY of them to make the inference.

34

cuu duong than cong . com

## 5.2.Strong Mathematical Induction

- **Theorem . Every integer  $n > 1$  is a product of primes.**

*Proof.* Let  $p_n$  denote the statement of the theorem. Then  $p_2$  is clearly true.

If  $p_2, p_3, \dots, p_k$  are all true, consider the integer  $k + 1$ .

If  $k + 1$  is a prime, there is nothing to prove.

Otherwise,  $k + 1 = ab$ , where  $2 \leq a, b \leq k$

But then each of  $a$  and  $b$  are products of primes because  $p_a$  and  $p_b$  are both true by the (strong) induction assumption. Hence  $ab = k + 1$  is also a product of primes, as required.

35

## 5.3. Inductive Definitions

We completely understand the function  $f(n) = n!$ , right?

As a reminder, here's the definition:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, n \geq 1$$

But equivalently, we could define it like this:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{if } n > 1 \\ 1, & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

Recursive Case

Base Case

Inductive (Recursive) Definition

36

## 5.4. Inductive Definitions

Another VERY common example:

### Fibonacci Numbers

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Base Cases  
Recursive Case

Is there a non-recursive definition for the Fibonacci Numbers?

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

37

## 5.4. Inductive Definitions

Our examples so far have been inductively defined functions.

Sets can be defined inductively, too.

Give an inductive definition of  $S = \{x: x \text{ is a multiple of } 3\}$

$3 \in S$

Base Case

$x, y \in S \rightarrow x + y \in S$

$x, y \in S \rightarrow x - y \in S$

Recursive Cases

No other numbers are in  $S$ .

38

cuu duong than cong . com

## 5.5. Inductive Definitions of Strings

Let  $\Sigma$  be a finite set called an alphabet.

The set of strings on  $\Sigma$ , denoted  $\Sigma^*$  is defined as:

- $\lambda \in \Sigma^*$ , where  $\lambda$  denotes the null or empty string.
- If  $x \in \Sigma$ , and  $w \in \Sigma^*$ , then  $wx \in \Sigma^*$ , where  $wx$  is the concatenation of string  $w$  with symbol  $x$ .

39

## 5.5. Inductive Definitions of Strings

If  $x \in \Sigma$ , and  $w \in \Sigma^*$ , then  $wx \in \Sigma^*$ , where  $wx$  is the concatenation of string  $w$  with symbol  $x$ .

**Example:** Let  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Then

$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\}$

How big is  $\Sigma^*$ ?

Infinite

Are there any infinite strings in  $\Sigma^*$ ?

No.

Is there a largest string in  $\Sigma^*$ ?

No.

40

## 5.5. Inductive Definitions of Strings

Inductive definition of the **length** of strings (the length of string  $w$  is denoted by  $|w|$ ):

- $|\lambda| = 0$
- If  $x \in \Sigma$ , and  $w \in \Sigma^*$ , then  $|wx| = |w| + 1$

I point this out because the length of strings is something we might like to use for an inductive argument.

41

## 5.5. Inductive Definitions of Strings

Inductive definition of the **reversal** of a string (the reversal of string  $w$  is denoted by  $w^R$ ):

- $\lambda^R = \lambda$
- If  $x \in \Sigma$ , and  $w \in \Sigma^*$ , then  $(wx)^R = ?$

$x(w)^R$

For example  $(abc)^R = cba$

because  $(abc)^R = c(ab)^R$   
 $= cb(a)^R$   
 $= cba(\lambda)^R$   
 $= cba\lambda = cba$

42

cuu duong than cong . com



43

## Phép đếm

### 1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân

#### 1.1. Nguyên lý cộng

Nếu có  $m$  cách chọn  $x$ ,  $n$  cách chọn đối tượng  $y$  và nếu cách chọn đối tượng  $x$  không trùng với bất kỳ cách chọn đối tượng  $y$  nào, thì có  $m+n$  cách chọn 1 trong các đối tượng đã cho.

#### 1.2. Nguyên lý nhân

Nếu có  $m$  cách chọn đối tượng  $x$  và cứ mỗi cách chọn  $x$  luôn luôn có  $n$  cách chọn đối tượng  $y$  thì có  $m.n$  cách chọn cặp đối tượng  $(x, y)$ .

44

## Phép đếm

Ví dụ.

Cho A và B là hai tập hợp. Tập hợp các ánh xạ từ A vào B được ký hiệu bởi  $B^A$ . Giả sử  $|A|=m$ ,  $|B|=n$  thì  $|B^A|=n^m$ . Thật vậy, mỗi phần tử  $a_i$  thuộc A có n cách chọn ảnh  $f(a_i)$  của nó trong tập B. Theo qui tắc nhân ta có  $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^m$  cách chọn bộ  $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ . Tức là ta có  $n^m$  ánh xạ.

45

## Phép đếm

### 2. Hoán vị.

a) Định nghĩa.

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một **hoán vị của n** phần tử. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là  $P_n$

b)  $P_n = n!$

c) Ví dụ: Nếu A là tập hợp n phần tử thì số song ánh từ A vào A là  $n!$

46

cuu duong than cong . com

## Phép đếm

### 3. Chỉnh hợp.

a) Định nghĩa.

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ( $1 \leq k \leq n$ ) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n** phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là  $A_n^k$

b) Công thức

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

47

## Phép đếm

### 4. Tổ hợp.

a) Định nghĩa.

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử**. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là

$$C_n^k \text{ hay } \binom{n}{k}$$

48

## Phép đếm

b) Công thức

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Tính chất

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

49

## Phép đếm

### 5. Hoán vị lặp.

a) Định nghĩa

Cho  $n$  đối tượng trong đó có  $n_i$  đối tượng loại  $i$  giống hệt nhau ( $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ).

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự  $n$  đối tượng đã cho gọi là một **hoán vị lặp** của  $n$ .

50

cuu duong than cong . com

## Phép đếm

b) Số hoán vị của  $n$  đối tượng, trong đó có  $n_1$  đối tượng giống nhau thuộc loại 1,  $n_2$  đối tượng giống nhau thuộc loại 2, ...,  $n_k$  đối tượng giống nhau thuộc loại  $k$ , là

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

51

## Phép đếm

- **Ví dụ:** Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?
- **Giải.** Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

52

## Phép đếm

### 6. Tổ hợp lặp.

#### a) Định nghĩa.

Mỗi cách chọn ra  $k$  vật từ  $n$  loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là **tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$** . Số các tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$  được ký hiệu là

$$K_n^k$$

53

## Phép đếm

#### b) Công thức

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

c) Hệ quả. Số nghiệm nguyên không âm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (mỗi  $x_i$  đều nguyên không âm) của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  là

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

54

cuu duong than cong . com

## Phép đếm

Số cách chia  $k$  vật đồng chất nhau vào  $n$  hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

55

## Phép đếm

**Ví dụ:** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

(1)

thỏa  $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 4$  (\*).

**Giải.**

Ta viết điều kiện đã cho thành  $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5$ .

Xét các điều kiện sau:

- $x_2 \geq 2; x_3 \geq 5$  (\*\*)
- $x_1 \geq 4; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5$  (\*\*\*)
- Gọi  $p, q, r$  lần lượt là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện (\*), (\*\*), (\*\*\*). Ta có:

56

## Phép đếm

$$p = q - r.$$

Trước hết ta tìm  $q$ .

Đặt

$$x_1' = x_1; x_2' = x_2 - 2; x_3' = x_3 - 5; x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 \quad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của (1) thỏa (\*\*) bằng số nghiệm nguyên không âm của (2)

57

## Phép đếm

$$\text{Số nghiệm là } K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$$

$$\text{Vậy } q = C_{16}^{13}$$

$$\text{Lý luận tương tự, ta có } r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$$

$$\text{Suy ra } p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (\*) là 340

58

cuu duong than cong . com

## Phép đếm

**Ví dụ:** Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi, biết rằng hộp 2 và 3 chứa không quá 6 bi.

**Giải.**

Trước hết ta tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi. Nhận xét rằng ta cần lấy 5 bi để xếp trước vào hộp 1, do đó số bi còn lại chỉ là 25. Suy ra số cách xếp trong trường hợp này bằng số cách xếp 25 bi vào 5 hộp mà không có điều kiện gì thêm. Số đó là

59

## Phép đếm

$$K_5^{25} = C_{5+25-1}^{25} = C_{29}^{25} = 23751.$$

Tương tự ta có

Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 2 chứa ít nhất 7 bi là

$$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$$

60

### Phép đếm

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là

$$K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$$

61

### Phép đếm

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, mỗi hộp 2 và 3 chứa ít nhất 7 bi là:

$$K_5^{11} = C_{5+11-1}^{11} = C_{15}^{11}$$

62

cuu duong than cong . com

### Phép đếm

- Sử dụng công thức  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$   
Ta suy ra số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, đồng thời hộp 2 hay hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là

$$K_5^{18} + K_5^{18} - K_5^{11} = C_{22}^{18} + C_{22}^{18} - C_{15}^{11} = 13265.$$

63

### Phép đếm

- Theo yêu cầu của bài toán, khi xếp 30 viên bi vào 5 hộp thì hộp 1 phải có ít nhất 5 bi còn mỗi hộp 2 và 3 phải có không quá 6 bi. Do đó số cách xếp này sẽ bằng hiệu của số cách xếp (1) và (2), tức là bằng

$$23751 - 13265 = 10486.$$

64

## Phép đếm

### • 7. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

- Giả sử có  $n$  vật cần đặt vào  $k$  hộp. Khi đó tồn tại ít nhất một hộp chứa từ  $\lceil n/k \rceil$  vật trở lên. Trong đó  $\lceil n/k \rceil$  là số nguyên dương nhỏ nhất không bé hơn  $n/k$

65

## Phép đếm

- Ví dụ.** Trong số 100 người luôn luôn có ít nhất là  $\lceil 100/12 \rceil = 9$  người có sinh nhật trong cùng một tháng.
- Ví dụ.** Cần tạo ít nhất bao nhiêu mã vùng để đảm bảo cho 84 triệu máy điện thoại mỗi máy một số thuê bao biết rằng mỗi số thuê bao gồm 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0?

66

cuu duong than cong . com

## Phép đếm

- Giải.** Theo Nguyên lý nhân, có 9 triệu số thuê bao khác nhau có đúng 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0. Theo nguyên lý Dirichlet, trong số 84 triệu máy điện thoại có ít nhất là

$$\lceil 84/9 \rceil = 10$$

máy có cùng một số thuê bao. Do đó để đảm bảo mỗi máy một số thuê bao cần tạo ra ít nhất là 10 mã vùng.

67

Isaac Newton  
(1643-1727)



68

## Khai triển nhị thức Newton

- Với  $x, y \in \mathbb{R}$  và  $n$  là số nguyên dương ta có

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

69

## Mở rộng Khai triển nhị thức Newton

Với các số nguyên không âm  $n_1, n_2, \dots, n_k$  thỏa  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , ký hiệu

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

70

cuu duong than cong . com

## Mở rộng Khai triển nhị thức Newton

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

71

## Bài tập

- Cho tập hợp  $X \neq \emptyset$  và  $A, B, C \subset X$ . Chứng minh rằng:
  - $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = B \setminus (A \cap C)$ ;
  - $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$ ;
  - $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ;
  - $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ;
  - $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .
- Cho các tập hợp  $X, Y \neq \emptyset$  và  $A, B \subset X$ ;  $C, D \subset Y$ . Chứng minh rằng:

72

## Bài tập

- a)  $A \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D)$ ;
- b)  $(C \cup D) \times A = (C \times A) \cup (D \times A)$ ;
- c)  $A \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D)$ ;
- d)  $(C \cap D) \times A = (C \times A) \cap (D \times A)$ ;
- e)  $A \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (A \times D)$ ;
- f)  $(C \setminus D) \times A = (C \times A) \setminus (D \times A)$ ;
- g)  $(A \times C) \setminus (B \times D) = [(A \setminus B) \times C] \cup [A \times (C \setminus D)]$ ;
- h)  $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$ ;
- i)  $(A \times C) \setminus (B \times D) \supset (A \setminus B) \times (C \setminus D)$

73

## Bài tập

3. Trong các trường hợp sau hãy xem xét xem ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Tìm ánh xạ ngược cho các song ánh
- a)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  định bởi  $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$ ;
  - b)  $f: (0, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$  định bởi  $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$ ;
  - c)  $f: (e, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  định bởi  $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$ ;
  - d)  $f: (e, +\infty) \rightarrow (2, +\infty)$  định bởi  $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$ ;
  - e)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  định bởi  $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$ ;
  - f)  $f: \mathbf{R} \rightarrow (3, +\infty)$  định bởi  $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$ ;
  - g)  $f: (0, +\infty) \rightarrow (3, +\infty)$  định bởi  $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$ ;

74

cuu duong than cong . com

## Bài tập

4. Cho ánh xạ  $f: [\ln 2, +\infty) \rightarrow [9/2, +\infty)$  định bởi:
- $$f(x) = 2e^x - e^{-x} + 1.$$
- a) Chứng minh rằng  $f$  là song ánh và tìm  $f^{-1}$ .
  - b) Tìm ánh xạ  $h$  thỏa  $f \circ h \circ f = f \circ g$  trong đó  $g: [\ln 2, +\infty) \rightarrow [\ln 2, +\infty)$  định bởi  $g(x) = e^x$ .

75

## Bài tập

5)

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $x_1 \geq 3, x_2 \leq 4$ .
- b)  $x_1 > 3, x_2 < 4$ .
- c)  $2 \leq x_1 \leq 8, x_2 \leq 4, x_3 > 3, x_4 < 6$

76

## Bài tập

6. a) Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

- b) (Bài 2 Đề thi 2007)

Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm  $(x_1, x_2, x_3)$  thỏa:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

trong đó  $x_1 > 2, x_2 < 4$

77

## Bài tập

- 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)};$$

78

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com