

Phần V

Quan hệ RELATIONS

1

Relations

1. Định nghĩa và tính chất
2. Biểu diễn quan hệ
3. Quan hệ tương đương. Đồng dư. Phép toán số học trên \mathbb{Z}_n
4. Quan hệ thứ tự. Hasse Diagram

2

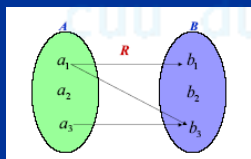
cuu duong than cong. com

1. Definitions

Definition. A quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là tập con của tích Descartess $R \subseteq A \times B$.

Chúng ta sẽ viết $a R b$ thay cho $(a, b) \in R$

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A



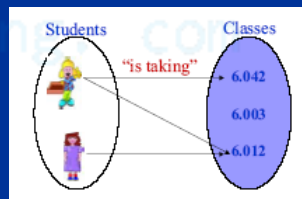
$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

3

1. Definitions

Example. $A = \text{students}$; $B = \text{courses}$.

$R = \{ (a, b) \mid \text{student } a \text{ is enrolled in class } b \}$



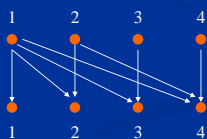
4

1. Definitions

Example. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và
 $R = \{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$



5

2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *phản xạ* nếu:

$$(a, a) \in R \text{ với mọi } a \in A$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
không phản xạ vì $(3,3) \notin R_1$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
phản xạ vì $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R_2$

6

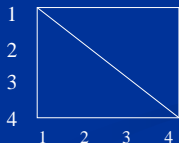
cuu duong than cong. com

- Quan hệ \leq trên \mathbb{Z} phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$
- Quan hệ $>$ trên \mathbb{Z} không phản xạ vì $1 \not> 1$

■ Quan hệ " \mid " ("ước số") trên \mathbb{Z}^+ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó.

Chú ý. Quan hệ R trên tập A là phản xạ iff nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$



7

2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *đối xứng* nếu:

$$\forall a \in A \forall b \in A (a R b) \rightarrow (b R a)$$

Quan hệ R được gọi là *phản xứng* nếu

$$\forall a \in A \forall b \in A (a R b) \wedge (b R a) \rightarrow (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ \leq trên \mathbb{Z} không đối xứng.

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$$

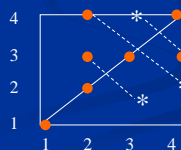
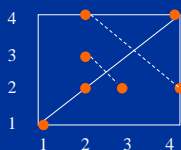
8

- Quan hệ “ $|$ ” (“ước số”) trên \mathbb{Z}^+ không đối xứng
Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a | b) \wedge (b | a) \rightarrow (a = b)$$

Chú ý. Quan hệ R trên A là đối xứng iff nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của $A \times A$.

Quan hệ R là phản xứng iff chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của $A \times A$.



9

2. Properties of Relations

Định nghĩa. Quan hệ R trên A có tính **bắc cầu (truyền)** nếu

$$\forall a \in A \forall b \in A \forall c \in A (a R b) \wedge (b R c) \rightarrow (a R c)$$

Ví dụ.

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (2,3)\}$

trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Quan hệ \leq và “ $|$ ” trên \mathbb{Z} có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c)$$

$$(a | b) \wedge (b | c) \rightarrow (a | c)$$

10

cuu duong than cong. com

3. Representing Relations

Introduction

Matrices

Representing Relations

11

Định nghĩa

Cho R là quan hệ từ $A = \{1,2,3,4\}$ đến $B = \{u,v,w\}$:

$$R = \{(1,u), (1,v), (2,w), (3,w), (4,u)\}.$$

Khi đó R có thể biểu diễn như sau

	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Dòng và cột
tiêu đề có
thể bỏ qua nếu
không gây
hiểu nhầm.

Đây là ma trận cấp 4×3 biểu diễn cho quan hệ R

12

Representing Relations

Định nghĩa. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Matrxen biểu diễn của R là matrxen cấp $m \times n$ $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$ xác định bởi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

Ví dụ. Nếu R là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$ sao cho $a R b$ nếu $a > b$. Khi đó ma trận biểu diễn của R là

	1	2
1	0	0
2	1	0
3	1	1

13

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi matrxen

$$\mathbf{M}_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Khi đó R gồm các cặp:

$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

14

cuu duong than cong. com

Representing Relations

- Cho R là quan hệ trên tập A , khi đó \mathbf{M}_R là **matrxen vuông**.
- R là **phản xạ** iff tất cả các phần tử trên **đường chéo** của \mathbf{M}_R đều bằng 1: $m_{ii} = 1$ với mọi i

	u	v	w
u	1	1	0
v	0	1	1
w	0	0	1

15

Representing Relations

R là đối xứng iff \mathbf{M}_R is **đối xứng**

$$m_{ij} = m_{ji} \quad \text{với mọi } i, j$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	1	1
w	1	1	0

16

Representing Relations

R is **phân xứng** iff M_R thỏa:

$$m_{ij} = 0 \text{ or } m_{ji} = 0 \text{ if } i \neq j$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	0
w	0	1	1

17

4. Equivalence Relations

Introduction
Equivalence Relations
Representation of Integers
Equivalence Classes
Linear Congruences.

18

cuu duong than cong. com

Định nghĩa

■ Ví dụ:

Cho $S = \{\text{sinh viên của lớp}\}$, gọi

$R = \{(a, b) : a \text{ có cùng họ với } b\}$

Hỏi

R phản xạ?

Yes

R đối xứng?

Yes

R bắc cầu?

Yes

Mọi sinh viên
có cùng họ
thuộc cùng một
nhóm.

19

Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là **tương đương** nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu :

Ví dụ. Quan hệ R trên các chuỗi ký tự xác định bởi aRb iff a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên \mathbb{R} sao cho aRb iff $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương

20

Recall that if a and b are integers, then a is said to be **divisible by** b , or a is a **multiple** of b , or b is a **divisor** of a , or b **divides** a if there exists an integer k such that $a = kb$

Example. Let m be a positive integer and R the relation on \mathbb{Z} such that aRb if and only if $a - b$ is divisible by m , then R is an equivalence relation

■ The relation is clearly reflexive and symmetric.

■ Let a, b, c be integers such that $a - b$ and $b - c$ are both divisible by m , then $a - c = a - b + b - c$ is also divisible by m . Therefore R is transitive

■ This relation is called the **congruence modulo m** and we write

$$a \equiv b \pmod{m}$$

instead of aRb

21

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. **Lớp tương đương chứa a** được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A / b R a\}$$

22

cuu duong than cong. com

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots \}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} [1]_8 &= \{a \mid a \text{ chia 8 dư } 1\} \\ &= \{ \dots, -15, -7, 1, 9, 17, \dots \} \end{aligned}$$

23

Chú ý. Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Tổng quát, chúng ta có

Theorem. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A và $a, b \in A$, Khi đó

(i) $a R b$ iff $[a]_R = [b]_R$

(ii) $[a]_R \neq [b]_R$ iff $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

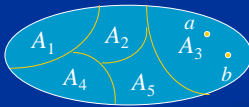
Chú ý. Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân hoạch trên A , nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

24

Note. Cho $\{A_1, A_2, \dots\}$ là phân hoạch A thành các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy với mỗi $a, b \in A$, ta đặt $a R b$ iff có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.

Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ iff $a \in A_i$



25

Example. Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của \mathbb{Z} thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \dots$$

$$[1]_m = [m+1]_m = [2m+1]_m = \dots$$

.....

$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \dots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là **số nguyên modulo m** . Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi \mathbb{Z}_m

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

26

cuu duong than cong. com

5 Linear Congruences

Example. Cho m là số nguyên dương, ta định nghĩa hai phép toán “+” và “ \times ” trên \mathbb{Z}_m như sau

$$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$$

$$[a]_m [b]_m = [a b]_m$$

Theorem. Các phép toán nói trên được định nghĩa tốt, i.e. Nếu $a \equiv c \pmod{m}$ và $b \equiv d \pmod{m}$, thì $a + b \equiv c + d \pmod{m}$ và $a b \equiv c d \pmod{m}$

Example. $7 \equiv 2 \pmod{5}$ và $11 \equiv 1 \pmod{5}$. Ta có

$$7 + 11 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod{5}$$

$$7 \times 11 \equiv 2 \times 1 = 2 \pmod{5}$$

27

Note. Các phép toán “+” và “ \times ” trên \mathbb{Z}_m có các tính chất như các phép toán trên \mathbb{Z}

$$[a]_m + [b]_m = [b]_m + [a]_m$$

$$[a]_m + ([b]_m + [c]_m) = ([a]_m + [b]_m) + [c]_m$$

$$[a]_m + [0]_m = [a]_m$$

$$[a]_m + [m-a]_m = [0]_m,$$

Ta viết

$$-[a]_m = [m-a]_m$$

$$[a]_m [b]_m = [b]_m [a]_m$$

$$[a]_m ([b]_m [c]_m) = ([a]_m [b]_m) [c]_m$$

$$[a]_m [1]_m = [a]_m$$

$$[a]_m ([b]_m + [c]_m) = [a]_m [b]_m + [a]_m [c]_m$$

28

Example. “Phương trình bậc nhất” trên \mathbb{Z}_m

$$[x]_m + [a]_m = [b]_m$$

với $[a]_m$ và $[b]_m$ cho trước, có nghiệm duy nhất:

$$[x]_m = [b]_m - [a]_m = [b - a]_m$$

Cho $m = 26$, phương trình $[x]_{26} + [3]_{26} = [b]_{26}$ có nghiệm duy nhất với mọi $[b]_{26}$ trong \mathbb{Z}_{26} .

Do đó $[x]_{26} \rightarrow [x]_{26} + [3]_{26}$ là song ánh từ \mathbb{Z}_{26} vào chính nó.

Sử dụng song ánh này chúng ta thu được mã hóa Caesar:

Mỗi chữ cái tiếng Anh được thay bởi một phần tử của \mathbb{Z}_{26} : $A \rightarrow [0]_{26}$, $B \rightarrow [1]_{26}$, ..., $Z \rightarrow [25]_{26}$

Ta sẽ viết đơn giản: $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$, ..., $Z \rightarrow 25$

29

Mỗi chữ cái sẽ được mã hóa bằng cách cộng thêm 3. Chẳng hạn A **được mã hóa** bởi chữ cái tương ứng với $[0]_{26} + [3]_{26} = [3]_{26}$, nghĩa là bởi D.

Tương tự B **được mã hóa** bởi chữ cái tương ứng với $[1]_{26} + [3]_{26} = [4]_{26}$, nghĩa là bởi E, ... cuối cùng Z **được mã hóa** bởi chữ cái tương ứng với $[25]_{26} + [3]_{26} = [2]_{26}$ nghĩa là bởi C.

Bức thư “MEET YOU IN THE PARK” được mã như sau

M E E T	Y O U	I N	T H E	P A R K
12 4 4 19	24 14 20	8 13	19 7 4	15 0 17 10
↓ ↓ ↓ ↓				
15 7 7 22	1 17 23	11 16	22 10 7	18 3 20 13
P H H W	B R X	L Q	W K H	S D U N

30

cuu duong than cong. com

Để giải mã, ta dùng ánh xạ ngược:

$$[x]_{26} \rightarrow [x]_{26} - [3]_{26} = [x - 3]_{26}$$

P H H W tương ứng với 15 7 7 22
↓ ↓ ↓ ↓

Lấy ảnh qua ánh xạ ngược: 12 4 4 19

Ta thu được chữ đã được mã là M E E T

Mã hóa như trên còn quá đơn giản, dễ dàng bị bẻ khóa. Chúng ta có thể tổng quát mã Caesar bằng cách sử dụng ánh xạ $f: [x]_{26} \rightarrow [ax + b]_{26}$ trong đó a và b là các hằng số được chọn sao cho f là song ánh

31

Trước hết chúng ta chọn a khả nghịch trong \mathbb{Z}_{26} i.e. tồn tại a' trong \mathbb{Z}_{26} sao cho

$$[a]_{26} [a']_{26} = [a a']_{26} = [1]_{26}$$

Chúng ta viết $[a']_{26} = [a]_{26}^{-1}$ nếu tồn tại.

Nghiệm của phương trình

$$[a]_{26} [x]_{26} = [c]_{26}$$

là $[x]_{26} = [a]_{26}^{-1} [c]_{26} = [a'c]_{26}$

Chúng ta cũng nói nghiệm của phương trình

$$ax \equiv c \pmod{26}$$

là $x \equiv a'c \pmod{26}$

32

Ánh xạ ngược của f xác định bởi

$$[x]_{26} \rightarrow [a'(x - b)]_{26}$$

Example. Cho $a = 7$ và $b = 3$, khi đó nghịch đảo của $[7]_{26}$ là $[15]_{26}$ vì $[7]_{26} [15]_{26} = [105]_{26} = [1]_{26}$

Bây giờ M được mã hóa như sau

$$[12]_{26} \rightarrow [7 \cdot 12 + 3]_{26} = [87]_{26} = [9]_{26}$$

nghĩa là được mã hóa bởi I . Ngược lại I được giải mã như sau

$$[9]_{26} \rightarrow [15 \cdot (9 - 3)]_{26} = [90]_{26} = [12]_{26}$$

nghĩa là tương ứng với M .

33

6. Partial Orderings

Introduction

Lexicographic Order

Hasse Diagrams

Maximal and Minimal Elements

Upper Bounds and Lower Bounds

Topological Sorting

34

cuu duong than cong. com

Định nghĩa

Example. Cho R là quan hệ trên tập số thực:
 $a R b$ iff $a \leq b$

Hỏi:

■ Is R reflexive?

Yes

■ Is R transitive?

Yes

■ Is R symmetric?

No

■ Is R antisymmetric?

Yes

35

Định nghĩa

Definition. Quan hệ R trên tập A là **quan hệ thứ tự (thứ tự)** nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi \prec

Cặp (A, \prec) được gọi là **tập sắp thứ tự** hay **poset**

Reflexive: $a \prec a$

Antisymmetric: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \rightarrow (a = b)$

Transitive: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \rightarrow (a \prec c)$

36

Định nghĩa

Definition. A relation R on a set A is a **partial order** if it is reflexive, antisymmetric and transitive.

Example. Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, i.e. $(\mathbb{Z}^+, |)$ là poset

Reflexive? Yes, $x | x$ since $x = 1 \cdot x$

Transitive? Yes?

$a | b$ means $b = ka$, $b | c$ means $c = jb$.
Then $c = j(ka) = jka$: $a | c$

37

Antisymmetric?

Yes?

$a | b$ means $b = ka$, $b | a$ means $a = jb$.

Then $a = jka$

It follows that $j = k = 1$, i.e. $a = b$

Example. Is $(\mathbb{Z}, |)$ a poset?

Not a poset.

Antisymmetric?

No

$3|-3$, and $-3|3$,

but $3 \neq -3$.

38

cuu duong than cong. com

Ex. Is $(2^S, \subseteq)$, where 2^S the set of all subsets of S , a poset?

Reflexive?

Yes, $A \subseteq A$.

Transitive?

Yes, $A \subseteq A$, $\forall A \in 2^S$

$A \subseteq B$, $B \subseteq C$. Does that mean
 $A \subseteq C$?

Antisymmetric?

Yes

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Does that mean
 $A = B$?

Yes

39

Definition. Các phần tử a và b của poset $(S, <)$ gọi là **so sánh được** nếu $a < b$ or $b < a$.

Trái lại thì ta nói a và b **không so sánh được**.

Cho $(S, <)$, nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là **tập sắp thứ tự toàn phần**.

Ta cũng nói rằng $<$ là **thứ tự toàn phần hay thứ tự tuyến tính** trên S .

Example. Quan hệ “ \leq ” trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Example. Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

40

Thứ tự tự điển

Ex. Trên tập các chuỗi bit có độ dài n ta có thể định nghĩa thứ tự như sau:

$$a_1a_2\dots a_n \leq b_1b_2\dots b_n$$

iff $a_i \leq b_i, \forall i$.

Với thứ tự này thì các chuỗi 0110 và 1000 là không so sánh được với nhau. Chúng ta không thể nói chuỗi nào lớn hơn.

Trong tin học chúng ta thường sử dụng thứ tự toàn phần trên các chuỗi bit.

Đó là thứ tự tự điển.

41

Thứ tự tự điển

Cho (A, \leq) và (B, \leq') là hai tập sắp thứ tự toàn phần. Ta định nghĩa thứ tự $<$ trên $A \times B$ như sau:

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ iff

$$a_1 < a_2 \text{ or } (a_1 = a_2 \text{ and } b_1 \leq' b_2)$$

Dễ dàng thấy rằng đây là thứ tự toàn phần trên $A \times B$

Ta gọi nó là **thứ tự tự điển**.

Chú ý rằng nếu A và B được sắp tốt bởi \leq và \leq' , tương ứng thì $A \times B$ cũng được sắp tốt bởi thứ tự $<$.

Chúng ta cũng có thể mở rộng định nghĩa trên cho tích Descartes của hữu hạn tập sắp thứ tự toàn phần.

42

cuu duong than cong. com

Thứ tự tự điển

Cho Σ là một tập hữu hạn (ta gọi là bảng chữ cái).

Tập hợp các chuỗi trên Σ , ký hiệu là Σ^* , xác định bởi

- $\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là chuỗi rỗng.
- Nếu $x \in \Sigma$, và $w \in \Sigma^*$, thì $wx \in \Sigma^*$, trong đó wx là kết nối w với x .

Example. Chẳng hạn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Thế thì $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\}$

43

Thứ tự tự điển

Giả sử \leq là thứ tự toàn phần trên Σ , khi đó ta có thể định nghĩa thứ tự toàn phần $<$ trên Σ^* như sau.

Cho $s = a_1 a_2 \dots a_m$ và $t = b_1 b_2 \dots b_n$ là hai chuỗi trên Σ^*

Khi đó $s < t$ iff

- Hoặc $a_i = b_i$ đối với $1 \leq i \leq m$, tức là $t = a_1 a_2 \dots a_m b_{m+1} b_{m+2} \dots b_n$
- Hoặc tồn tại $k < m$ sao cho
 - ✓ $a_i = b_i$ với $1 \leq i \leq k$ và
 - ✓ $a_{k+1} < b_{k+1}$, nghĩa là

$$s = a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_m$$

$$t = a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_n$$

44

- Chúng ta có thể kiểm tra $<$ là thứ tự toàn phần trên Σ^* . Ta gọi nó là **thứ tự từ điển trên** Σ^* .

Example. Nếu Σ là bảng chữ cái tiếng Anh với thứ tự: $a < b < \dots < z$, thì thứ tự nói trên là thứ tự thông thường giữa các từ trong Từ điển.

For example

✓ $discreet < discrete$

discreet
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
discrete $e \not< t$

✓ $discreet < discreetness$

discreet
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
discreetness

45

Example. Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ với $0 < 1$, thì $<$ là thứ tự toàn phần trên tập tất cả các chuỗi bit Σ^* .

Ta có

✓ $0110 < 10$

✓ $0110 < 01100$

46

cuu duong than cong. com

Hasse Diagrams

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ **Hasse**.

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Definition. Phần tử b trong poset $(S, <)$ được gọi là **phần tử trội** của phần tử a trong S if $a < b$.

Chúng ta cũng nói rằng a là **được trội bởi** b . Phần tử b được gọi là **trội trực tiếp của** a nếu b là trội của a , và không tồn tại trội c sao cho

$$a < c < b, \quad a \neq c \neq b$$

47

Hasse Diagrams

- Ta định nghĩa **Hasse diagram** của poset $(S, <)$ là đồ thị:

✓ Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.

✓ Nếu b là trội trực tiếp của a thì vẽ một cung đi từ a đến b .



48

Hasse Diagrams

Ex. Biểu đồ Hasse của poset $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ có thể vẽ như sau

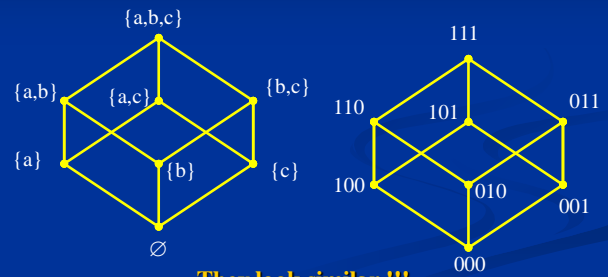


Note. Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

49

Example. Biểu đồ Hasse của $P(\{a,b,c\})$

và biểu đồ Hasse của các chuỗi bit độ dài 3 with thứ tự tự điển



They look similar !!!

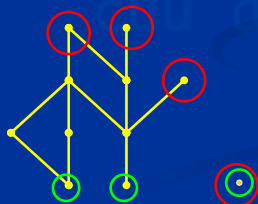
50

cuu duong than cong. com

Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây:

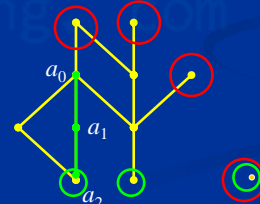
- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là **tối đại**.
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là **tối tiểu**.
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



51

Note. Trong một poset S hữu hạn, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

- ✓ Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$. Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại $a_1 < a_0$, tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu.
- ✓ Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.

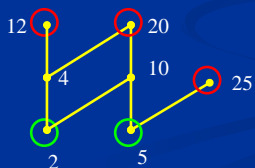


52

Example. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$?

Solution. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu

Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



53

Example. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset các chuỗi bit độ dài 3?

Solution. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 111 là phần tử tối đại duy nhất và 000 là phần tử tối tiểu duy nhất.

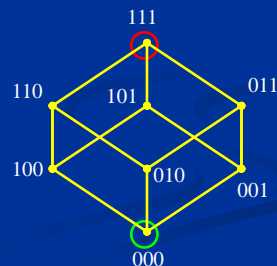
111 là **phần tử lớn nhất**

và

000 là **phần tử nhỏ nhất** theo nghĩa:

$$000 \prec abc \prec 111$$

với mọi chuỗi abc



54

cuu duong than cong. com

Chúng ta có định lý

Theorem. Trong một poset hữu hạn, nếu chỉ có duy nhất một phần tử tối đại thì đó là phần tử lớn nhất. Tương tự cho phần tử nhỏ nhất.

Proof. Giả sử g là phần tử tối đại duy nhất.

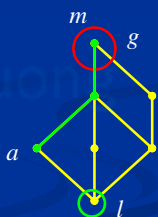
Lấy a là phần tử bất kỳ, khi đó tồn tại phần tử tối đại m sao cho

$$a \prec m$$

Vì g là duy nhất nên $m = g$, do đó ta có $a \prec g$

Như vậy g là phần tử lớn nhất.

Chúng minh tương tự cho phần tử nhỏ nhất l



55

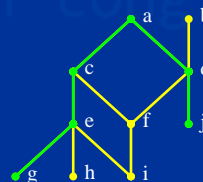
Chặn trên, chặn dưới

Definition. Cho (S, \prec) là poset và $A \subseteq S$. Phần tử **chặn trên** của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall a \in A, a \prec x$.

Phần tử **chặn dưới** của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall a \in A, x \prec a$

Ex. Phần tử chặn trên của $\{g, j\}$ là a .

Tại sao không phải là b ?



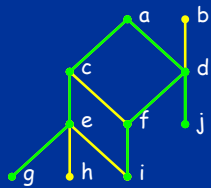
56

Definition. Cho $(S, <)$ là poset và $A \subseteq S$. **Chặng trên nhỏ nhất** của A là phần tử chặng trên x của A sao cho mọi chặng trên y của A , ta đều có $y > x$

Chặng dưới lớn nhất của A là phần tử chặng dưới x của A sao cho mọi chặng dưới y của A , ta có $y < x$

Ex. Chặng trên nhỏ nhất của $\{i, j\}$ là d

Ex. Chặng dưới chung LN của $\{g, j\}$ là gì?



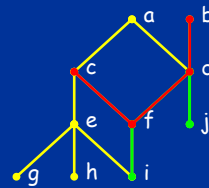
57

Chặng trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặng dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \wedge b$

Ex. $i \vee j = d$

Ex. $b \wedge c = f$



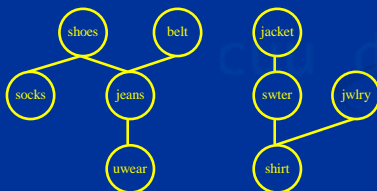
58

cuu duong than cong. com

Topological Sorting

Consider the problem of getting dressed.

Precedence constraints are modeled by a poset in which $a < b$ if and only if you must put on a before b .



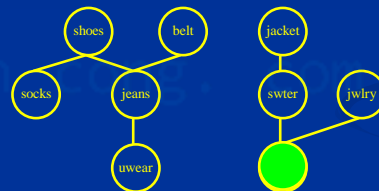
In what order will you get dressed while respecting constraints?

In other words, we will find a new total order so that a is a lower bound of b if $a < b$

59

Topological Sorting

Recall that every finite non-empty poset has at least one minimal element a_1 .



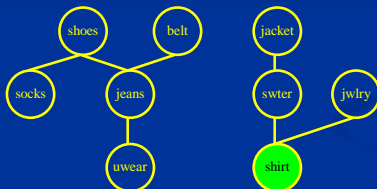
E.g. shirt is a minimal element

✓ Now the new set after we remove a_1 is still a poset.

60

Topological Sorting

- ✓ Let a_2 be a minimal of the new poset.



E.g.
underwear
is a new
minimal
element

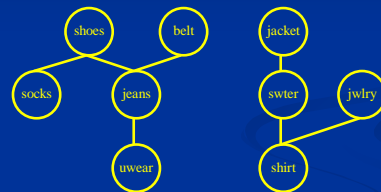
- ✓ Now every element of this new poset cannot be a proper lower bound of a_1 and a_2 in the original poset

61

This process continues until all elements are removed

We obtain a new order of the elements satisfying the given constraints:

a_1, a_2, \dots, a_m



The arrangement of the given poset in the new total order a_1, a_2, \dots compatible with the old order is called the Topological sorting

62

cuu duong than cong. com

Bài tập

1. Khảo sát các tính chất của các quan hệ \mathcal{R} sau. Xét xem quan hệ \mathcal{R} nào là quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương cho các quan hệ tương đương tương ứng.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y;$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq y^2 + 2y;$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow$

$$x^3 - x^2y - 3x = y^3 - xy^2 - 3y;$$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - x^2y - x = y^3 - xy^2 - y.$

63

Bài tập

2. Khảo sát tính chất của các quan hệ sau

a) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x|y;$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x < y + 1.$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x < y - 1.$

d) $\forall (x, y); (z, t) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z \text{ hay } (x = z \text{ và } y \leq t);$

e) $\forall (x, y); (z, t) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x < z \text{ hay } (x = z \text{ và } y \leq t);$

64

Bài tập

3. Xét quan hệ \mathcal{R} trên \mathbb{Z} định bởi:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = y2^n$$

- a) Chứng minh \mathcal{R} là một quan hệ tương đương.
- b) Trong số các lớp tương đương $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ có bao nhiêu lớp phân biệt?
- c) Câu hỏi tương tự như câu hỏi b) cho các lớp.

$$\overline{6}, \overline{7}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{48}$$

65

Bài tập

4. Xét tập mẫu tự $A = \{a, b, c\}$ với

$a < b < c$ và :

$$s_1 = ccbac$$

$$s_2 = abccaa$$

theo thứ tự từ điển. Hỏi có bao nhiêu chuỗi ký tự s gồm 6 ký tự thỏa

$$s_2 \leq s \leq s_1?$$

66

cuu duong than cong. com

Bài tập

5. ĐỀ THI NĂM 2006

- Xét thứ tự “ \subset ” trên tập $P(S)$ các tập con của tập $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ trong đó $A \subset B$ nếu A là tập con của B .
- Tìm một thứ tự toàn phần “ \leq ” trên $P(S)$ sao cho với A, B trong $P(S)$, nếu $A \subset B$ thì $A \leq B$. Tổng quát hoá cho trường hợp S có n phần tử.

67

Bài tập

6. Đề 2007. Có bao nhiêu dãy bit có độ dài ≤ 15 sao cho $00001 \leq s \leq 011$, trong đó “ \leq ” là thứ tự từ điển.

68