

Lời nói đầu

Xử lý ảnh số (Digital Image Processing) hiểu theo nghĩa rộng bao gồm tất cả các thao tác trên ảnh số như tăng cường ảnh, phục hồi ảnh, nhận dạng, phân đoạn ảnh,... Tuy nhiên nếu xét theo nghĩa hẹp, hay nghĩa cổ điển, thì nó là một quy trình xử lý mà đầu vào là ảnh số, và đầu ra cũng là ảnh số. Nói như vậy nghĩa là việc nhận dạng ảnh không nằm trong phạm vi xử lý theo nghĩa này. Thay vào đó, việc xử lý ảnh hiểu theo nghĩa tự nhiên nhất chính là tăng cường ảnh, tức là làm ảnh trở nên đẹp hơn, tốt hơn hay rõ hơn. Ở đây chúng tôi cũng chỉ quan tâm đến khía cạnh này.

Về mặt lý thuyết, có nhiều phương pháp tăng cường ảnh, nhưng nhìn chung chúng chỉ thuộc một trong hai loại sau: xử lý trên miền không gian và xử lý trên miền tần số. Xử lý ảnh trên miền không gian tuy trực quan hơn nhưng không đủ sắc sảo và không đáp ứng được những yêu cầu cao về ảnh. Với lý do như vậy, bài viết này nhằm giới thiệu tổng quan phương pháp tăng cường ảnh trên miền tần số. Ở đây, chúng tôi mô tả một cách chi tiết cơ sở lý thuyết của phương pháp này, hơn là tập trung vào các ứng dụng cụ thể của nó.

Tuy đã hết sức cố gắng nhưng bài viết này chắc chắn không thể tránh khỏi những sai sót. Vì vậy chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến chân thành từ độc giả. Mọi đóng góp xin liên hệ nhóm tác giả:

Phạm Ngọc Tuấn

Số điện thoại: 0955330136 / 0873074243

Email: pntuanaaa[at]yahoo.com.vn

Nguyễn Quốc Thông

Số điện thoại: 01283596421 / 0838109167

Email: hitman4756[at]yahoo.com

Đặng Nguyễn Đăng Nguyên

Số điện thoại: 0989983266 / 06503715263

Email: dangnguyen325[at]yahoo.com.vn

*Thành phố Hồ Chí Minh,
Ngày 13 tháng 11 năm 2009.*

Mục lục

1	Cơ sở xử lý ảnh trên miền tần số	4
1.1	Hạn chế của xử lý ảnh trên miền không gian	4
1.2	Ý tưởng xử lý trên miền tần số	5
1.3	Tính toán chi tiết	17
2	Cải tiến kỹ thuật	23
2.1	Hạn chế của kỹ thuật trước	23
2.2	Phương pháp cải tiến	23
2.3	Biến đổi Fast Fourier	40
3	Ứng dụng	45
3.1	Làm trơn ảnh	46
3.1.1	Lọc tần số thấp Ideal	46
3.1.2	Lọc tần số thấp Butterworth	48
3.1.3	Lọc tần số thấp Gauss	48
3.2	Làm sắc ảnh	50
3.2.1	Lọc tần số cao Ideal	50
3.2.2	Lọc tần số cao Butterworth	50
3.2.3	Lọc tần số cao Gauss	50
4	Chương trình Matlab	51
4.1	Dùng khai triển Fourier	51
4.2	Dùng FFT	53
4.2.1	Làm trơn ảnh	54
4.2.2	Làm sắc ảnh	55
	Tài liệu tham khảo	57

Danh sách hình vẽ

1.1	Đồ thị hàm $f(x)$	5
1.2	Đồ thị hàm $y = b_1 \sin x$	7
1.3	Đồ thị hàm $y = b_2 \sin 2x$	7
1.4	Đồ thị hàm $y = b_3 \sin 3x$	7
1.5	Đồ thị hàm $y = b_4 \sin 4x$	8
1.6	Đồ thị hàm $y = b_5 \sin 5x$	8
1.7	Đồ thị hàm $y = \sum_{k=1}^5 b_k \sin kx$ và $y = x$	8
1.8	Đồ thị hàm $y = \cos x, y = \cos 3x, y = \cos 9x$	9
1.9	Các pixel của ảnh số	17
2.1	Đồ thị hàm $ G $	29
2.2	Đồ thị hàm g	29
2.3	Đồ thị hàm $ F $	35
2.4	(a) Trước khi dời trục, (b) Sau khi dời trục	36
2.5	Sơ đồ xử lý ảnh màu	39
3.1	Hàm lọc ILPF	47
3.2	(a) Văn bản bị rõ. (b) Văn bản sau khi được lọc tần số thấp	47
3.3	(a) Ảnh với kích thước 500 x 500 pixels (b) Phổ Fourier của ảnh. Các vòng tròn với bán kính lần lượt là 5, 15, 30, 80, và 230 pixel.	48
3.4	Hàm lọc BLPF	49
3.5	Hàm lọc GLPF	49
3.6	(a) Ảnh nhòe, (b) Ảnh sau khi được lọc Butterworth với $D_0 = 320, n = 2$	50

Chương 1

Cơ sở xử lý ảnh trên miền tần số

1.1 Hạn chế của xử lý ảnh trên miền không gian

Biện pháp xử lý ảnh trên miền không gian là khá trực quan. Trên miền không gian, độ xám tại một pixel trong ảnh mới bằng một biểu thức tuyến tính giữa độ xám của các pixel kế cận trong ảnh cũ. Như vậy, để làm các chi tiết trên ảnh trơn hơn, ta có thể tính độ xám tại pixel (x,y) trên ảnh mới bằng trung bình cộng độ xám của chính nó và 8 pixel lân cận trong ảnh cũ

$$g(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{i,j=-1}^1 f(x+i, y+j) \quad (1.1)$$

Nếu muốn làm các chi tiết trên ảnh nổi bật hơn, ta có thể tính độ xám tại pixel (x,y) trên ảnh mới bằng một trung bình có trọng số độ xám của chính nó và 8 pixel lân cận trong ảnh cũ, trong đó trọng số ứng với $f(x, y)$ là lớn nhất, chẳng hạn:

$$\begin{aligned} g(x, y) = \frac{1}{10} & (f(x-1, y-1) + f(x, y-1) + f(x+1, y-1) \\ & + f(x-1, y) + 2f(x, y) + f(x+1, y) \\ & + f(x-1, y+1) + f(x, y+1) + f(x+1, y+1)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nói tóm lại, xử lý trên miền không gian là một phương pháp rất trực quan, phù hợp với cảm giác tự nhiên của chúng ta: nhìn vào các biểu thức (1.1) và (1.2), ta cũng hình dung được phần nào về ảnh kết quả.

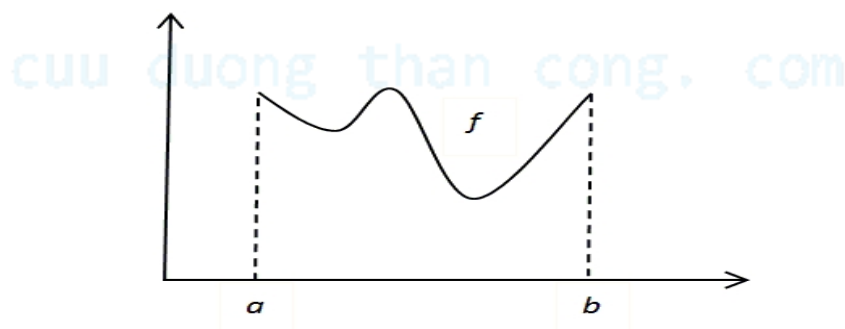
Tuy nhiên, cũng chính do tính đơn giản như trên mà phương pháp xử lý trên miền không gian là không được tinh tế. Chẳng hạn hệ số của mặt nạ (filter mask) thường được chọn là dương

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dĩ nhiên, trong một số trường hợp, mặt nạ có thể chứa các hệ số âm. Một thí dụ khác là các mặt nạ thường là ma trận đối xứng. Hiển nhiên ta thấy rằng mặt nạ không nhất thiết phải là ma trận đối xứng. Hơn nữa, các hệ số của mặt nạ cũng không nhất thiết nguyên hay hữu tỷ. Đối với các trường hợp như vậy, các hệ số phải được chọn bằng một phương pháp nào đó, chứ không còn là bằng trực quan như trước đây. Phương pháp xử lý ảnh trên miền tần số là một trong số đó. Sự can thiệp sâu sắc của toán học cho ta những đối tượng, những đại lượng ẩn dưới lớp vỏ trực quan của ảnh. Do đó, nếu chỉ đơn thuần quan sát, phân tích ảnh bằng thị giác thì ta không dễ gì cảm nhận được các đại lượng này. Thay vì thao tác trực tiếp trên độ xám của các pixel (trường độ xám), ta sẽ thao tác, xử lý trên các đối tượng mới này.

1.2 Ý tưởng xử lý trên miền tần số

Giả sử ta có một máy chụp ảnh đặc biệt, có thể chụp được đúng một đoạn thẳng trên một vật phẳng. Khi đó, ảnh ta nhận được là một đoạn thẳng mà trên mỗi điểm có một độ xám nào đó. Độ xám này có thể được mô tả bởi hàm một biến f như Hình 1.1, ở đây đoạn $[a, b]$ là miền không gian ảnh. Miền không gian ảnh lúc này được xem



Hình 1.1: Đồ thị hàm $f(x)$

như miền liên tục, chứ không phải là miền rời rạc gồm các pixel như trước đây. Hơn nữa, ta có thể xem $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

Ta nhắc lại một định lý quan trọng về chuỗi Fourier như sau:

Cho $\Phi \in L^2(-\pi, \pi)$. Khi đó ta có khai triển

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

và

$$\|\Phi\|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right)$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos nx dx & \forall n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin nx dx & \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Áp dụng với Φ là trường độ xấp xỉ f :

Nếu $f \in L^2(-\pi, \pi)$ thì ta có khai triển

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.3)$$

và

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \quad (1.4)$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & \forall n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Công thức (1.3) nói lên rằng hàm f có thể được phân tích thành tổng của vô hạn các hàm hình sin hoặc cos, mà ta gọi là các sóng.

Thí dụ

Với $f(x) = x$ thì

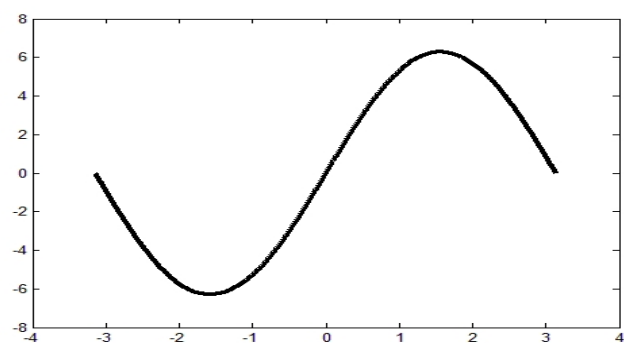
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Do đó

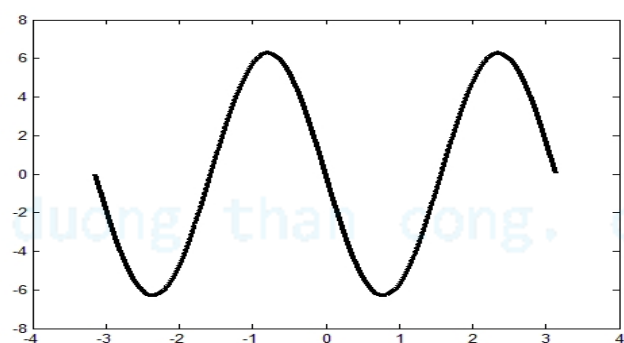
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Trên Hình 1.7, ta thấy chỉ cần lấy tổng 5 số hạng đầu tiên trong chuỗi Fourier của f là đã có một xấp xỉ tốt cho hàm f rồi.

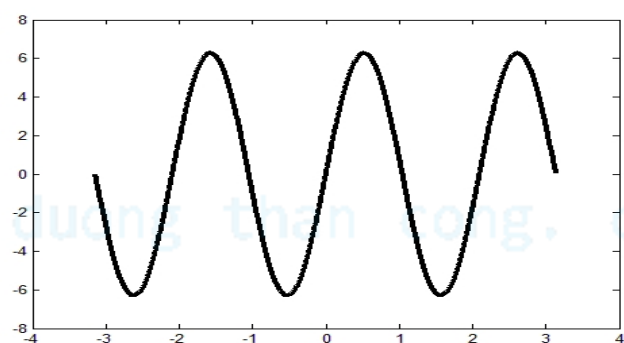
Một điểm đáng lưu ý nữa từ (1.3) là: khi n càng lớn thì các hàm $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ dao động càng nhanh quanh giá trị 0. Đó là bởi vì chu kỳ tuần hoàn của nó càng nhỏ khi n càng lớn.



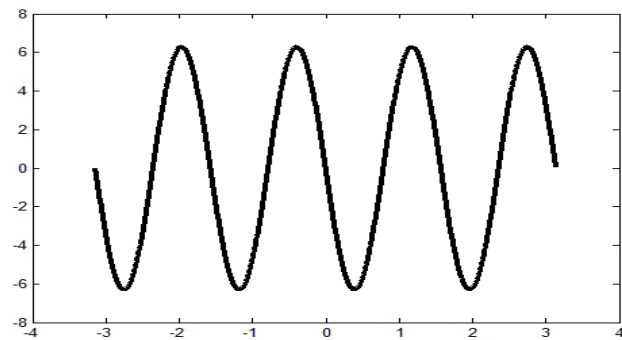
Hình 1.2: Đồ thị hàm $y = b_1 \sin x$



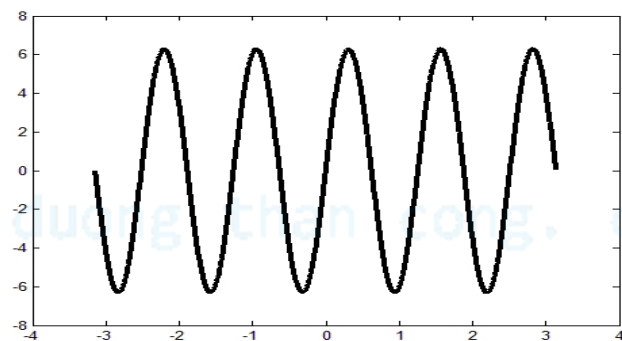
Hình 1.3: Đồ thị hàm $y = b_2 \sin 2x$



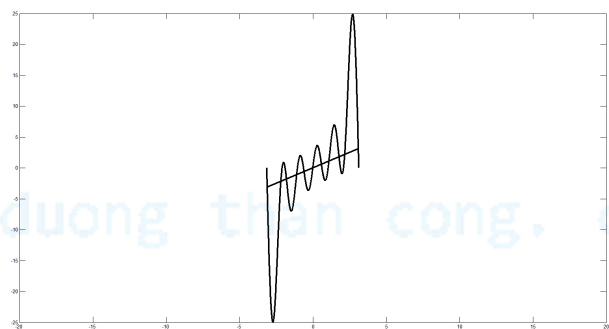
Hình 1.4: Đồ thị hàm $y = b_3 \sin 3x$



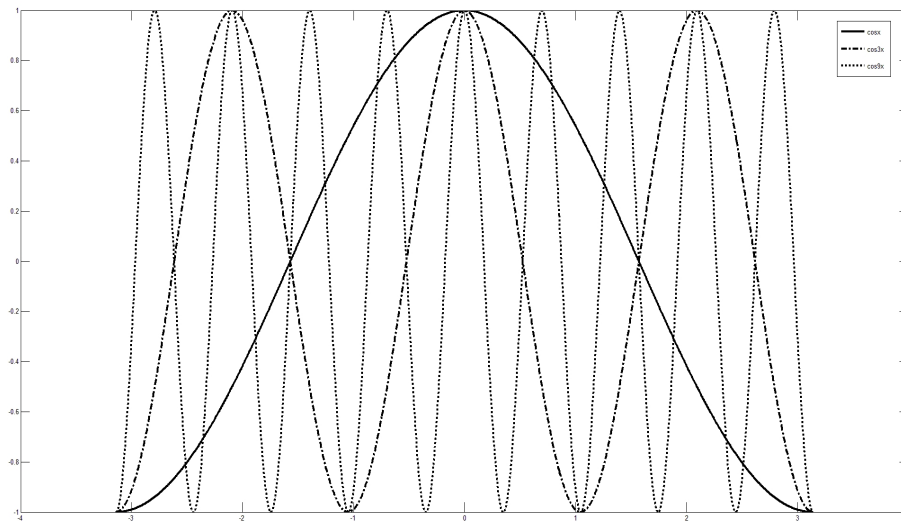
Hình 1.5: Đồ thị hàm $y = b_4 \sin 4x$



Hình 1.6: Đồ thị hàm $y = b_5 \sin 5x$



Hình 1.7: Đồ thị hàm $y = \sum_{k=1}^5 b_k \sin kx$ và $y = x$



Hình 1.8: Đồ thị hàm $y = \cos x$, $y = \cos 3x$, $y = \cos 9x$

Các sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ đều có chu kỳ là $\frac{2\pi}{n}$, tức là có tần số $\frac{n}{2\pi}$. Hình 1.8 cho ta thấy sự dao động của hàm $\cos nx$ với $n = 1, 3, 9$. Sự dao động nhanh của các sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ như trên gây ra sự biến đổi đột ngột giá trị của f . Chính những thành phần này (khi n lớn) gây ra sự xáo trộn mạnh mẽ cho giá trị của hàm f , và do đó làm giảm tính trơn của f (tức là sự liên tục hay khả vi của f). Tuy nhiên, nếu nhìn vào (1.4) thì ta thấy các chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \text{ phải hội tụ.}$$

Vì vậy, ta phải có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0.$$

Do đó, các sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ thay đổi giá trị nhanh nhưng biên độ thay đổi càng nhỏ khi n càng lớn. Đối với trường hợp $f(x) = x$ ở Hình 1.7, ta thấy điều đó rất rõ: biên độ của sóng $b_n \sin nx$ là $|b_n| = \frac{2\pi}{n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Như vậy, ta rút ra nhận xét: khi n càng lớn thì các sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ dao động càng dày đặc nhưng với biên độ càng nhỏ.

Vì vậy, các sóng này càng thể hiện tính "nhiều". Nhiều ở đây được hiểu theo nghĩa làm mất tính ổn định giá trị của f và dẫn đến làm giảm tính trơn của f .

Nếu loại bỏ các sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ thì khi n đủ lớn, hàm f được xấp xỉ bằng

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.5)$$

Vế phải của (1.5) là hàm khả vi liên tục mọi cấp, nghĩa là nó rất trơn. Điều này khá phù hợp với phân tích về ảnh hưởng của các sóng với n lớn mà ta đã nêu ở trên.

Quay lại với ý nghĩa là "trường độ xám" của f , ta nhận xét, trường độ xám mà máy ảnh thu được từ vật được chụp thường khó liên tục. Chẳng hạn như khi ta chụp mặt người, đường biên ngăn cách mặt người với môi trường xung quanh rõ ràng là bước nhảy lớn về giá trị mức xám. Đối với các ảnh sắc nét, ta thấy có nhiều đường biên ngăn cách các miền có mức xám khác nhau. Vì vậy, f bị gián đoạn hoặc không trơn tại các đường này.

Như đã nói ở trên, việc loại bỏ các sóng có tần số cao sẽ làm tăng tính trơn của hàm f . Do đó, ảnh mới thu được sẽ có trường độ xám thay đổi mềm mại hơn, hệ quả là sẽ mờ hơn, nhòe hơn, kém sắc nét hơn ảnh ban đầu. Ngược lại, nếu loại bỏ các sóng có tần số thấp (tức là những số hạng ứng với n nhỏ), ta thu được hàm

$$g(x) = \sum_{n=N}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Hàm g chỉ dao động khá bé quanh giá trị 0 nên không thể là một xấp xỉ của hàm f . Việc loại bỏ các sóng có tần số thấp đã làm mất đi giá trị trung bình của f . Tuy nhiên, hàm g phản ánh sự nhiễu loạn của f xung quanh "đường trung bình" của nó. Do đó, ảnh g cho thấy các chi tiết sắc nét của f như đường biên, các đỉnh, các nốt, các đốm cô lập. Vì $g(x)$ dao động xung quanh giá trị 0 nên màu nền của ảnh mới sẽ là đen.

Nếu quan sát kỹ hơn công thức (1.11) thì ta thấy rằng để làm ảnh trơn hơn, ta không nhất thiết phải chặt cụt chuỗi Fourier của f . Thay vào đó, ta có thể nhân mỗi số hạng của nó với một số $h(n)$ nào đó

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2}h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h(n) (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.6)$$

trong đó $|h(n)|$ phải càng nhỏ khi n càng lớn nhằm làm giảm biên độ của các sóng tần số cao. Chú ý rằng tổng hợp của hai sóng $a_n \cos nx$ và $b_n \sin nx$ cũng là một sóng hình sin. Thật vậy, ta có

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nx \right) \quad (1.7)$$

Gọi $\alpha \in (-\pi, \pi]$ là góc thỏa
$$\begin{cases} \sin \alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \cos \alpha_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases}$$

Thế vào (1.7), ta được

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\sin \alpha_n \cos nx + \cos \alpha_n \sin nx) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(nx + \alpha_n) \end{aligned}$$

Do đó (1.6) được viết lại thành

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2}h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(nx + \alpha_n)$$

Lúc này $f_1(x)$ là tổng hợp của các sóng có biên độ dạng $|h(n)| \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Do đó, lý do để chọn h sao cho $|h(n)|$ càng nhỏ khi n càng lớn rõ ràng.

Ngược lại, để làm nổi bật lên các chi tiết của f , ta chọn h sao cho $|h(n)|$ lớn khi n bé, và bé khi n lớn. Tóm lại, ta hoàn toàn có hướng để xử lý ảnh nếu trường độ xám của nó được phân tích thành tổng của các sóng hình sin hay cos như trên. Muốn vậy, hàm f phải thuộc không gian $L^2(-\pi, \pi)$. Tiếp theo, ta xem xét tính hợp lý của giả thiết này.

Độ xám của ảnh là do nguồn sáng chiếu tới vật được chụp và sự phản xạ ánh sáng của vật đó. Do năng lượng sóng ứng với các bước sóng trong vùng nhìn thấy được là hữu hạn nên độ xám cũng phải hữu hạn. Hơn nữa, độ xám khi được mã hóa thành số lưu trong máy tính bao giờ cũng có giá trị bị chặn (tùy thuộc vào số bit biểu diễn của nó). Do đó, hàm f luôn bị chặn trên $(-\pi, \pi)$:

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Do đó

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |M|^2 dx = 2M^2\pi.$$

Cho nên $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

Thật ra với cách thể hiện độ xám thông qua các pixel, ta dễ dàng nhận ra f là hàm bậc thang. Như vậy, ta vừa chứng minh xong $f \in L^2(-\pi, \pi)$, tức là f luôn đáp ứng là điều kiện đủ để nó có khai triển chuỗi Fourier.

Trên đây ta đã phân tích ứng dụng của khai triển Fourier vào xử lý ảnh một chiều. Tuy nhiên, ảnh một chiều mà ta vừa nói trên chỉ là một mô hình tưởng tượng nhằm phát sinh ý tưởng. Ảnh thực tế mà ta thấy phải là ảnh hai chiều. Như vậy, ta cần phải tìm một thủ thuật nào đó nhằm tổng quát ý tưởng ở một chiều lên hai chiều.

Ở trường hợp một chiều, ta tìm cách biểu diễn hàm một biến thành tổng của vô số sóng dạng sin và cos. Ta cũng sử dụng lại ý tưởng đó ở đây, tức là ta sẽ cố gắng biểu diễn hàm hai biến $f = f(x, y)$ thành tổng của nhiều sóng dạng $\sin(mx + ny)$ hoặc $\cos(mx + ny)$.

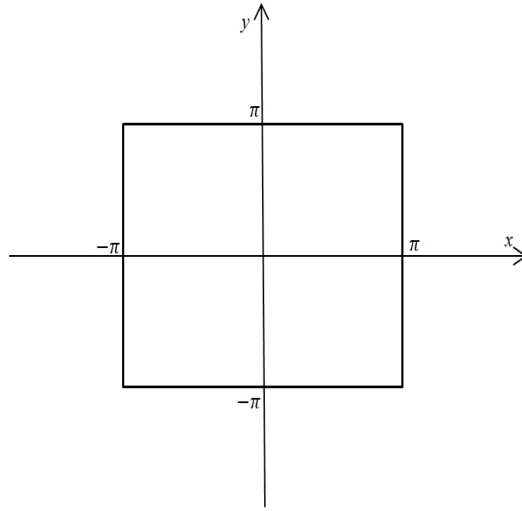
Giả sử hàm $f = f(x, y)$ xác định trên $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Ứng với mỗi $y \in [-\pi, \pi]$, ta có khai triển Fourier của f theo biến x :

$$f(x, y) = \frac{a_0^y}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^y \cos mx + b_m^y \sin mx) \quad (1.8)$$

trong đó

$$a_m^y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx dx \quad (1.9)$$

$$b_m^y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx dx \quad (1.10)$$



Ứng với mỗi $x \in [-\pi, \pi]$, ta lại có khai triển Fourier của f theo biến y :

$$f(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^x \cos ny + b_n^x \sin ny) \quad (1.11)$$

trong đó

$$a_n^x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos ny dy \quad (1.12)$$

$$b_n^x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin ny dy \quad (1.13)$$

Thế (1.11) vào (1.9) và (1.10), ta được

$$a_m^y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0^x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^x \cos ny + b_n^x \sin ny) \right] \cos mx dx,$$

$$b_m^y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0^x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^x \cos ny + b_n^x \sin ny) \right] \sin mx dx.$$

Giả sử dấu tổng có thể lấy ra ngoài tích phân được, ta có

$$a_m^y = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^x}{2} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n^x \cos(ny) \cos(mx) + b_n^x \sin(ny) \cos(mx)) dx \right],$$

$$b_m^y = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^x}{2} \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n^x \cos(ny) \sin(mx) + b_n^x \sin(ny) \sin(mx)) dx \right]$$

Thế (1.12) và (1.13) vào hai biểu thức trên, ta được

$$\begin{aligned}
 a_m^y &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(0y) \cos(mx) dy dx + \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(ny) \cos(mx) dy dx \right) \cos ny + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin(ny) \cos(mx) dy dx \right) \sin ny \right] \Big\} \\
 b_m^y &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(0y) \sin(mx) dy dx + \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(ny) \sin(mx) dy dx \right) \cos ny + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin(ny) \sin(mx) dy dx \right) \sin ny \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

Chuyển tích phân hai lớp thành tích phân bội để viết lại gọn

$$\begin{aligned}
 a_m^y &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos(0y) \cos(mx) dA + \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos(ny) \cos(mx) dA \right) \cos ny + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin(ny) \cos(mx) dA \right) \sin ny \right] \Big\} \\
 b_m^y &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos(0y) \sin(mx) dA + \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos(ny) \sin(mx) dA \right) \cos ny + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin(ny) \sin(mx) dA \right) \sin ny \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

Thế hai biểu thức trên vào (1.8), ta được

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos(0y) \cos(0x) dA + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos(ny) \cos(0x) dA \right) \cos(ny) + \right. \\
& + \left. \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin(ny) \cos(0x) dA \right) \sin(ny) \right] \Bigg\} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos(0y) \cos(mx) dA \right) \cos mx + \right. \right. \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} (f(x, y) \cos(ny) \cos(mx) dA) \right) \cos(ny) \cos(mx) + \right. \\
& \left. \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin(ny) \cos(mx) dA \right) \sin(ny) \cos(mx) \right] \Bigg\} \\
& + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos(0y) \sin(mx) dA \right) \sin mx + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} (f(x, y) \cos(ny) \sin(mx) dA) \right) \cos(ny) \sin(mx) + \right. \\
& + \left. \left(\int_{\Omega} (f(x, y) \sin(ny) \sin(mx) dA) \right) \sin(ny) \sin(mx) \right] \Bigg\} \Bigg\}
\end{aligned}$$

Viết gọn lại:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x, y) dA \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny dA \right) \cos ny + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny dA \right) \sin ny \right] \Big\} \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos mx dA \right) \cos mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin mx dA \right) \sin mx \right] \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny \cos mx dA \right) \cos ny \cos mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny \cos mx dA \right) \sin ny \cos mx \right. \\
 & \left. \left. + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny \sin mx dA \right) \cos ny \sin mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny \sin mx dA \right) \sin ny \sin mx \right] \right\} \Big\}
 \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) dA \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny dA \right) \cos ny + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny dA \right) \sin ny \right] \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos mx dA \right) \cos mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin mx dA \right) \sin mx \right] \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny \cos mx dA \right) \cos ny \cos mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny \cos mx dA \right) \sin ny \cos mx \right. \\
 & \left. + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \cos ny \sin mx dA \right) \cos ny \sin mx + \left(\int_{\Omega} f(x, y) \sin ny \sin mx dA \right) \sin ny \sin mx \right]
 \end{aligned}$$

Tóm lại,

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & \frac{1}{4}a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + b_{0n} \sin ny) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + c_{m0} \sin mx) \\
 & + \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny \\
 & + c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny)
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

trong đó

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos mx \cos ny dA \tag{1.15}$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos mx \sin ny dA \tag{1.16}$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \sin mx \cos ny dA \tag{1.17}$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \sin mx \sin ny dA \tag{1.18}$$

Khi m, n càng lớn thì các sóng $a_{mn} \cos mx \cos ny$, $b_{mn} \cos mx \sin ny$, $c_{mn} \sin mx \cos ny$, $d_{mn} \sin mx \sin ny$ dao động càng nhanh, nhưng biên độ của chúng (là $|a_{mn}|$, $|b_{mn}|$, $|c_{mn}|$, $|d_{mn}|$) càng lúc càng bé. Do đó, những sóng này chỉ đóng vai trò nhiễu. Vì vậy, cũng giống như trường hợp một chiều, ta nhân mỗi số hạng chuỗi Fourier của f ở (1.14) với hàm hai biến $h = h(m, n)$ để được

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x, y) = & \frac{1}{4}h(0, 0)a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} h(0, n)(a_{0n} \cos ny + b_{0n} \sin ny) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} h(m, 0)(a_{m0} \cos mx + c_{m0} \sin mx) \\
 & + \sum_{m,n=1}^{\infty} h(m, n)(a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny \\
 & + c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny)
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Nếu muốn thu được ảnh trơn hơn thì hàm h phải được chọn sao cho $|h(m, n)|$ khá bé khi m, n lớn; còn nếu muốn có ảnh nổi bật, sắc nét hơn thì chọn h sao cho $|h(m, n)|$ nhỏ khi m, n bé.

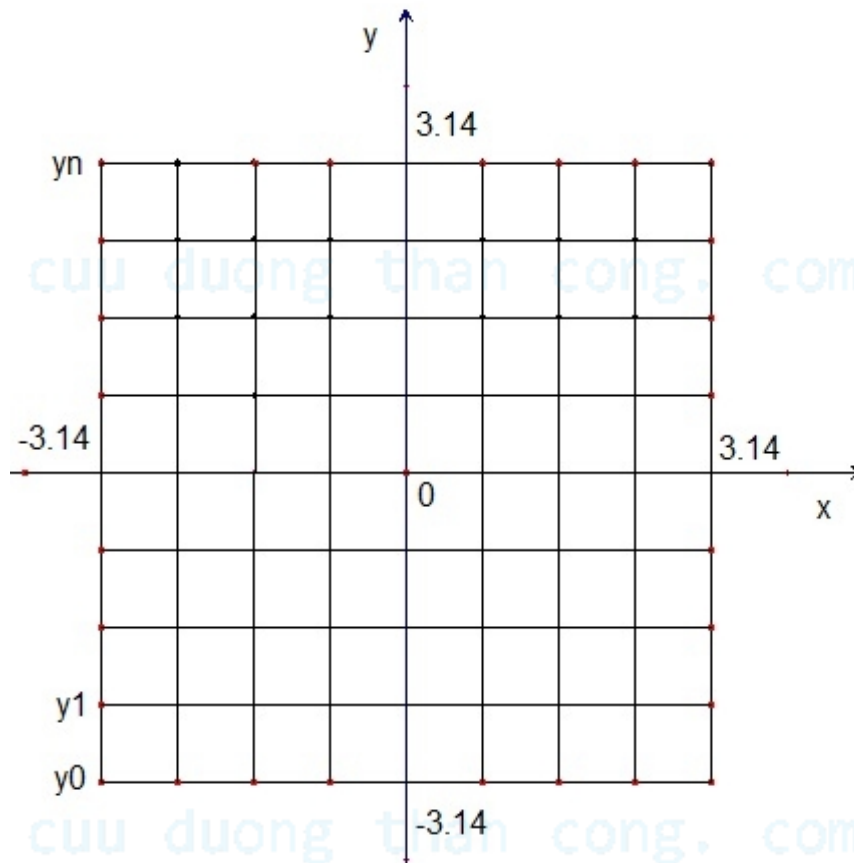
Như vậy, ý tưởng dùng khai triển Fourier để xử lý ảnh hai chiều đã rõ. Tiếp theo, ta sẽ đi chi tiết hơn về mặt tính toán.

1.3 Tính toán chi tiết

Ta tốn công đi tìm khai triển Fourier cho hàm hai biến $f = f(x, y)$ ở mục trên là để có được công thức (1.19). Hàm $\tilde{f} = \tilde{f}(x, y)$ ở (1.19) chính là ảnh kết quả mà ta nhận được. Như vậy, để ý tưởng bên trên thực hiện được, ta phải tìm ra giải pháp tính số cho $\tilde{f}(x, y)$.

Trong công thức (1.19), hàm $h = h(m, n)$ được quyền chọn nên dĩ nhiên ta biết giá trị số của nó. Vấn đề bây giờ nằm ở chỗ làm thế nào tính được các hệ số Fourier a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , và d_{mn} của f .

Trên thực tế, ảnh được máy tính biểu diễn bằng một ma trận độ xám, kích thước $M \times N$. Mỗi hệ số của ma trận này là độ xám trên pixel vị trí của nó. Như vậy, trường độ xám f lúc này là một hàm bậc thang, xác định trên hình chữ nhật kích thước $M \times N$.



Hình 1.9: Các pixel của ảnh số

Khoảng $[-\pi, \pi]$ trên trục hoành được chia làm M khoảng bằng nhau bởi $x_0 < x_1 < \dots < x_M$, với $x_j = \frac{2\pi}{M}j - \pi$.

Khoảng $[-\pi, \pi]$ trên trục tung được chia làm N khoảng bằng nhau bởi $y_0 < y_1 < \dots < y_N$, với $y_j = \frac{2\pi}{N}j - \pi$.

$\dots < y_N$, với $y_k = \frac{2\pi}{N}k - \pi$.

Trị giá của f trên ô $A_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ là f_{mn} . Khi đó:

$$f(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq M-1 \\ 0 \leq k \leq N-1}} f_{jk} \chi_{A_{jk}}(x, y)$$

Từ đây, ta có thể tính được các a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} , và d_{mn} .

- Tính a_{mn} từ (1.15):

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos mx \cos ny dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \sum_{j,k} f_{jk} \cos mx \cos ny \chi_{A_{jk}} dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \int_{A_{jk}} \cos mx \cos ny dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos mx dx \right) \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \cos ny dy \right) \end{aligned}$$

* Nếu $m, n \geq 1$

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2 mn} \sum_{j,k} f_{jk} (\sin(mx_{j+1}) - \sin(mx_j)) (\sin(ny_{k+1}) - \sin(ny_k)) \quad (1.20)$$

* Nếu $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{0n} &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \right) \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \cos ny dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} (x_{j+1} - x_j) \frac{\sin(ny_{k+1}) - \sin(ny_k)}{n} \end{aligned}$$

tức là

$$a_{0n} = \frac{2\pi}{\pi^2 Mn} \sum_{j,k} f_{jk} (\sin(ny_{k+1}) - \sin(ny_k))$$

tức

$$a_{0n} = \frac{2}{Mn\pi} \sum_{j,k} f_{jk} (\sin(ny_{k+1}) - \sin(ny_k)) \quad (1.21)$$

* Nếu $m \geq 1, n = 0$, tương tự như trên, ta cũng có

$$a_{m0} = \frac{2}{Nm\pi} \sum_{j,k} f_{jk} (\sin(my_{k+1}) - \sin(my_k)) \quad (1.22)$$

* Nếu $m = n = 0$

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \right) \left(\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} (x_{j+1} - x_j) (y_{k+1} - y_k) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \frac{2\pi}{M} \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

tức là

$$a_{00} = \frac{4}{MN} \sum_{j,k} f_{jk} \quad (1.23)$$

• Tính b_{mn} từ (1.16)

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \cos mx \sin ny dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \sum_{j,k} f_{jk} \cos mx \sin ny \chi_{A_{jk}} dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \int_{A_{jk}} \cos mx \sin ny dA \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos mx dx \right) \left(\int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin ny dy \right) \end{aligned}$$

* Nếu $m \geq 1$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2 mn} \sum_{j,k} f_{jk} (\sin(mx_{j+1}) - \sin(mx_j)) (\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})) \quad (1.24)$$

* Nếu $m = 0$

$$\begin{aligned} b_{0n} &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \right) \left(\int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin ny dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} (x_{j+1} - x_j) \frac{\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})}{n} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \frac{2\pi}{M} \frac{\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})}{n} \end{aligned}$$

hay

$$b_{0n} = \frac{2}{Mn\pi} \sum_{j,k} f_{jk} (\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})) \quad (1.25)$$

- Tính c_{mn} từ (1.17)

$$\begin{aligned}
c_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \sin mx \cos ny dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \sum_{j,k} f_{jk} \sin mx \cos ny \chi_{A_{jk}} dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \int_{A_{jk}} \sin mx \cos ny dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin mx dx \right) \left(\int_{y_k}^{y_{k+1}} \cos ny dy \right)
\end{aligned}$$

* Nếu $n \geq 1$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2 mn} \sum_{j,k} f_{jk} (\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})) (\sin(ny_{k+1}) - \sin(ny_k)) \quad (1.26)$$

* Nếu $n = 0$

$$\begin{aligned}
c_{m0} &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin mx dx \right) \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} (y_{k+1} - y_k) \frac{\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})}{m} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \frac{2\pi}{N} \frac{\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})}{m}
\end{aligned}$$

hay

$$c_{m0} = \frac{2}{Nm\pi} \sum_{j,k} f_{jk} (\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})) \quad (1.27)$$

- Tính d_{mn} từ (1.18)

$$\begin{aligned}
d_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} f(x, y) \sin mx \sin ny dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \sum_{j,k} f_{jk} \sin mx \sin ny \chi_{A_{jk}} dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \int_{A_{jk}} \sin mx \sin ny dA \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin mx dx \right) \left(\int_{y_k}^{y_{k+1}} \sin ny dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{j,k} f_{jk} \frac{\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})}{m} \frac{\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})}{n}
\end{aligned}$$

hay

$$d_{mn} = \frac{2}{Nm\pi} \sum_{j,k} f_{jk} (\cos(mx_j) - \cos(mx_{j+1})) (\cos(ny_k) - \cos(ny_{k+1})) \quad (1.28)$$

Từ các công thức (1.20)-(1.28), ta hoàn toàn tính được \tilde{f} ở (1.19).

Trên thực tế thì miền không gian ảnh là $[0, M] \times [0, N]$ chứ không phải $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ nên ta dùng phép biến đổi sau

$$\begin{aligned} [0, M] \times [0, N] &\rightarrow [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \\ (x, y) &\mapsto \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M}, -\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \end{aligned}$$

Do đó, khai triển Fourier cho ảnh $[0, M] \times [0, N]$ là:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{0n} \cos n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) + b_{0n} \sin n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{m0} \cos m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) + c_{m0} \sin m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \right) \\ & + \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \cos n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \right. \\ & \quad + b_{mn} \cos m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \sin n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \\ & \quad + c_{mn} \sin m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \cos n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \\ & \quad \left. + d_{mn} \sin m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \sin n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) \right) \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{4}{MN} \int_{\Omega} f(x, y) \cos m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \cos n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) dA \\ b_{mn} &= \frac{4}{MN} \int_{\Omega} f(x, y) \cos m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \sin n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) dA \\ c_{mn} &= \frac{4}{MN} \int_{\Omega} f(x, y) \sin m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \cos n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) dA \\ d_{mn} &= \frac{4}{MN} \int_{\Omega} f(x, y) \sin m \left(-\pi + \frac{2\pi x}{M} \right) \sin n \left(-\pi + \frac{2\pi y}{N} \right) dA \end{aligned}$$

với $\Omega = [0, M] \times [0, N]$

Để tận dụng được kết quả tính toán cho a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} và d_{mn} ở (1.20)-(1.28), ta dùng phép đổi biến

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] &\rightarrow [0, M] \times [0, N] \\ (r, s) &\mapsto (x, y) = \left(\frac{(r + \pi)M}{2\pi}, \frac{(s + \pi)N}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

Khi đó, ta đặt

$$\bar{f}(r, s) = f(x, y) = f\left(\frac{(r + \pi)M}{2\pi}, \frac{(s + \pi)N}{2\pi}\right)$$

thì

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \bar{f}(x, y) \cos mr \cos nsdA \\ b_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \bar{f}(x, y) \cos mr \sin nsdA \\ c_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \bar{f}(x, y) \sin mr \cos nsdA \\ d_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega} \bar{f}(x, y) \sin mr \sin nsdA \end{aligned}$$

với $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

Khi đó, các hệ số a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn} và được cho bởi (1.20) – (1.28) với f_{jk} là giá trị xấp xỉ của ảnh ban đầu trên ô $[j, j + 1] \times [k, k + 1]$. Tóm lại, ta đã tính toán xong tất cả các chi tiết cần thiết để tìm ảnh kết quả \tilde{f} khi biết hàm lọc $h(m, n)$. Độc giả có thể tham khảo phần cài đặt chương trình ở Chương 4.

Chương 2

Cải tiến kỹ thuật

2.1 Hạn chế của kỹ thuật trước

Quan sát công thức (1.19) ta thấy, khi đưa vào máy tính chuỗi Fourier phải được chặt cụt. Giả sử miền chạy của các chỉ số m và n là $0, 1, 2, \dots, K-1$. Theo công thức (1.20), để tính a_{mn} , ta phải dùng $2MN$ phép cộng, $2MN$ phép nhân và $4MN$ phép tính lượng giác. Tương tự đối với b_{mn} , c_{mn} , và d_{mn} .

Như vậy, với mỗi (x, y) với $0 \leq x \leq M+1, 0 \leq y \leq N-1$, ta phải dùng khoảng $2K^2MN$ phép cộng, $2K^2MN$ phép nhân và $4K^2MN$ phép tính lượng giác. Do đó, để có được kết quả ảnh \tilde{f} , ta phải tốn $2K^2M^2N^2$ phép cộng, $2K^2M^2N^2$ phép nhân và $4K^2M^2N^2$ phép tính lượng giác.

Với ảnh có kích thước nhỏ 100×100 , và $K = 10$ thì ta cần khoảng 20 triệu phép cộng, 20 triệu phép nhân, 40 triệu phép tính lượng giác. Điều đó đòi hỏi thời gian chạy chương trình quá lớn. Sau đây là kết quả thử nghiệm:

Kích thước $M \times N$	K	Thời gian(giây)
32x32	10	116.237
40x40	10	275.96
45x45	10	420.518
50x50	10	648.992
50x50	5	165.553

Do vậy, một nhu cầu bức xúc đặt ra ở đây là làm sao giảm một cách đáng kể thời gian thực hiện chương trình, hay nói cách khác là phải tìm một phương thức tính toán nào đó nhanh hơn. Biến đổi Fourier rời rạc là một trong những giải pháp như vậy. Ở đó, ta lợi dụng triệt để tính rời rạc của ảnh số.

2.2 Phương pháp cải tiến

Như mục trên đã nói, ý tưởng của việc áp dụng khai triển Fourier nằm ở chỗ ta muốn phân tích một hàm hai biến $f = f(x, y)$ bất kỳ thành tổng của vô hạn các sóng dạng

sin hay cos. Tuy nhiên, không nhất thiết chỉ có khai triển Fourier mới cho ta một cách phân tích như vậy. Hơn nữa, trường độ xấp xỉ f mà ta đang xét là hàm bậc thang, tức là có hữu hạn giá trị nên f hoàn toàn có thể được phân tích thành sóng một cách đơn giản hơn. Ta bắt đầu xét cách phân tích "đơn giản hơn" này dưới dạng một chiều để thấy rõ ý tưởng.

Định nghĩa 2.2.1. Gọi g là một hàm có miền xác định rời rạc như sau

$$g : \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

khi đó hàm $G : \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi

$$G(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \quad (2.1)$$

được gọi là biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform hay viết tắt là DFT) của g .

Công thức (2.1) cho thấy mỗi hàm rời rạc g đều có DFT. Hơn nữa, khi biết DFT của g là G , ta có thể tìm ngược trở lại g bằng công thức

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} G(u) e^{i2\pi \frac{ux}{M}} \quad (2.2)$$

Thật vậy, ta có

$$G(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}}$$

Nhân $e^{i2\pi \frac{uy}{M}}$ ở hai vế của phương trình trên, ta được

$$G(u) e^{i2\pi \frac{uy}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{u}{M}(x-y)}$$

Lấy tổng với u từ 0 đến $M-1$, ta được

$$\sum_{u=0}^{M-1} G(u) e^{i2\pi \frac{uy}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}u} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}u}$$

hay

$$\sum_{u=0}^{M-1} G(u) e^{i2\pi \frac{uy}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}u} \quad (2.3)$$

* Với $x = y$, ta có

$$g(x) \sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}u} = g(y) \sum_{u=0}^{M-1} 1 = Mg(y)$$

* Với $x \neq y$, khi đó $\sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-y}{M} u}$ là một cấp số nhân với công bội $q = e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}} \neq 1$ nên

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-y}{M} u} = \frac{1 - q^M}{1 - q} = \frac{1 - e^{-i2\pi(x-y)}}{1 - e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}}} = \frac{1 - \cos(2\pi(x-y)) + i \sin(2\pi(x-y))}{1 - e^{-i2\pi \frac{x-y}{M}}} = 0$$

Do đó

$$g(x) \sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-y}{M} u} = g(x) \cdot 0 = 0$$

Do vậy, từ (2.3), ta suy ra

$$\sum_{u=0}^{M-1} G(u) e^{i2\pi \frac{uy}{M}} = g(y)$$

Tóm lại ta đã chứng minh được (2.2).

Công thức (2.1) và (2.2) cho thấy sự tương ứng 1 - 1 giữa một hàm rời rạc và DFT của nó. Khi biết g , ta có thể tìm được G và ngược lại. Tuy nhiên, điều đặc biệt lại nằm ở công thức (2.2). Ta biết rằng

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

nên (2.2) được viết lại như sau

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} G(u) \left(\cos \frac{2\pi xu}{M} + i \sin \frac{2\pi xu}{M} \right) \quad (2.4)$$

Vì G là hàm nhận giá trị phức nên ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$G(u) = R(u) - iI(u) \quad \forall u \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

trong đó R và I chỉ nhận các giá trị thực. Thế vào (2.4), ta được

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} (R(u) - iI(u)) \left(\cos \frac{2\pi xu}{M} + i \sin \frac{2\pi xu}{M} \right)$$

hay

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} \left(R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M} + I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M} \right) + i \sum_{u=0}^{M-1} \left(R(u) \sin \frac{2\pi xu}{M} - I(u) \cos \frac{2\pi xu}{M} \right)$$

Vì g chỉ nhận giá trị thực nên phần ảo ở vế phải bằng 0. Do đó

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} \left(R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M} + I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M} \right) \quad (2.5)$$

Rõ ràng (2.5) là một sự phân tích hàm g thành tổng của các sóng sin hay cos. Chú ý rằng tổng ở đây là tổng hữu hạn, chứ không phải là tổng vô hạn (chuỗi) như khai triển Fourier mà ta đã xét ở mục trước.

Mỗi sóng thành phần là $R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M}$ và $I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M}$. ứng với mỗi u , các sóng này đều có chu kỳ là $\frac{M}{u}$, tức là có tần số là $\frac{u}{M}$. Do đó, khi u càng lớn (tức là càng gần M) thì tần số dao động của các sóng này càng cao. Tiếp theo, ta xét biên độ của các sóng này. Từ (2.1), ta có

$$R(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \cos \frac{2\pi xu}{M} \quad (2.6)$$

$$I(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \sin \frac{2\pi xu}{M} \quad (2.7)$$

Vì $R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M}$ và $I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M}$ là hai sóng cùng tần số (sóng kết hợp) nên tổng hợp của hai sóng này cũng có dạng sin hoặc cos. Do

$$G(u) = R(u) - iI(u)$$

nên

$$|G(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

Vì vậy

$$R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M} + I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M} = |G(u)| \left(\frac{R(u)}{\sqrt{R^2(u) + I^2(u)}} \cos \frac{2\pi xu}{M} + \frac{I(u)}{\sqrt{R^2(u) + I^2(u)}} \sin \frac{2\pi xu}{M} \right)$$

$$\text{Gọi } \alpha_u \in (-\pi, \pi] \text{ là góc thỏa } \begin{cases} \cos \alpha_u = \frac{R(u)}{\sqrt{R^2(u) + I^2(u)}} \\ \sin \alpha_u = \frac{I(u)}{\sqrt{R^2(u) + I^2(u)}} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} R(u) \cos \frac{2\pi xu}{M} + I(u) \sin \frac{2\pi xu}{M} &= |G(u)| \left(\cos \alpha_u \cos \frac{2\pi xu}{M} + \sin \alpha_u \sin \frac{2\pi xu}{M} \right) \\ &= |G(u)| \cos \left(\frac{2\pi xu}{M} - \alpha_u \right) \end{aligned}$$

Do đó (2.5) được viết lại như sau

$$g(x) = \sum_{u=0}^{M-1} |G(u)| \cos \left(\frac{2\pi xu}{M} - \alpha_u \right) \quad (2.8)$$

Công thức (2.8) cho ta thấy g có thể phân tích được thành tổng của M sóng có biên độ dương. Mỗi sóng như vậy có tần số là $\frac{u}{M}$, với $u \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$. Ta mong

muốn rằng khi n càng lớn thì biên độ của các sóng trên càng nhỏ.

Theo công thức (2.8) thì biên độ của sóng ứng với $u = 0$ là $|G(0)|$. Ở (2.1), ta có $G(0) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x)$, tức là giá trị trung bình của g . Ta sẽ chứng minh rằng

$$|G(u)| \leq |G(0)|, \quad \forall u \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

Điều cần chứng minh tương đương với

$$\left| \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \right| \leq \left| \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \right|$$

hay

$$\left(\sum_{x=1}^{M-1} g(x) a_x \right)^2 + \left(\sum_{x=1}^{M-1} g(x) b_x \right)^2 \leq \left(\sum_{x=1}^{M-1} g(x) \right)^2 \quad (2.9)$$

với

$$a_x = \cos 2\pi \frac{ux}{M}, \quad b_x = \sin 2\pi \frac{ux}{M}$$

Khai triển hai vế của (2.9)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{x=1}^{M-1} g(x) a_x \right)^2 &= \sum_{x=1}^{N-1} (g(x) a_x)^2 + 2 \sum_{x < y} g(x) g(y) a_x a_y, \\ \left(\sum_{x=1}^{N-1} g(x) b_x \right)^2 &= \sum_{x=1}^{N-1} (g(x) b_x)^2 + 2 \sum_{x < y} g(x) g(y) b_x b_y, \\ \left(\sum_{x=1}^{N-1} g(x) \right)^2 &= \sum_{x=1}^{N-1} (g(x))^2 + 2 \sum_{x < y} g(x) g(y). \end{aligned}$$

Ta có được bất đẳng thức tương đương với (2.9):

$$\sum_{x < y} g(x) g(y) (a_x a_y + b_x b_y) \leq \sum_{x < y} g(x) g(y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski-Cauchy-Schwarz, ta có

$$a_x a_y + b_x b_y \leq \sqrt{(a_x^2 + b_x^2)(a_y^2 + b_y^2)}$$

Mà $a_x^2 + b_x^2 = a_y^2 + b_y^2 = 1$ nên ta có ngay điều phải chứng minh.

Như vậy, sóng ứng với $u = 0$ có biên độ lớn nhất. Nếu quan sát kỹ (2.6) và (2.7), ta

sẽ phát hiện ra một tính chất đặc biệt nữa của G .

Theo (2.6), thay u bởi $M - u$, ta được

$$\begin{aligned} R(M - u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \cos\left(\frac{2\pi x}{M}(M - u)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \cos\left(2\pi x - \frac{2\pi xu}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \cos\left(\frac{2\pi xu}{M}\right) \\ &= R(u) \end{aligned}$$

Theo (2.7), thay u bởi $M - u$, ta được

$$\begin{aligned} I(M - u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \sin\left(\frac{2\pi x}{M}(M - u)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \sin\left(2\pi x - \frac{2\pi xu}{M}\right) \\ &= -\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) \sin\left(\frac{2\pi xu}{M}\right) \\ &= -I(u) \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $u \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$, ta có

$$\begin{aligned} R(M - u) &= R(u) \\ I(M - u) &= -I(u) \end{aligned}$$

Vì vậy nên

$$|G(M - u)| = |G(u)|$$

Điều đó có nghĩa là đồ thị của $|G|$ đối xứng qua đường thẳng $u = \frac{M}{2}$.

Do đó, thật ra ta chỉ cần biết $|G(u)|$ với $0 \leq u \leq \frac{M}{2}$ là có thể suy ra giá trị của các $|G(u)|$ với $\frac{M}{2} \leq u \leq M - 1$.

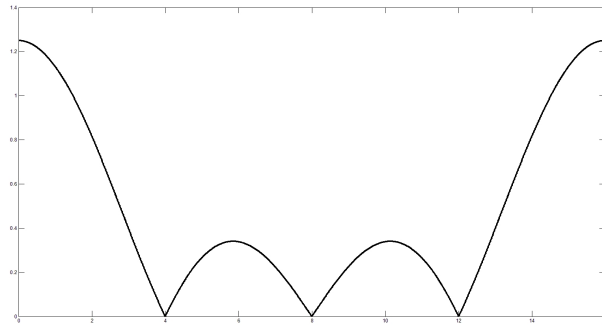
Tuy nhiên, ngay cả trên miền $0, 1, \dots, \frac{M}{2}$ ta cũng chưa chắc có $|G(u)| \geq |G(u + 1)|$.

Hình 2.1 và 2.2 là một thí dụ với

$$g(x) = \begin{cases} A & \text{nếu } 0 \leq x \leq K - 1 \\ 0 & \text{nếu } K \leq x \leq M \end{cases}$$

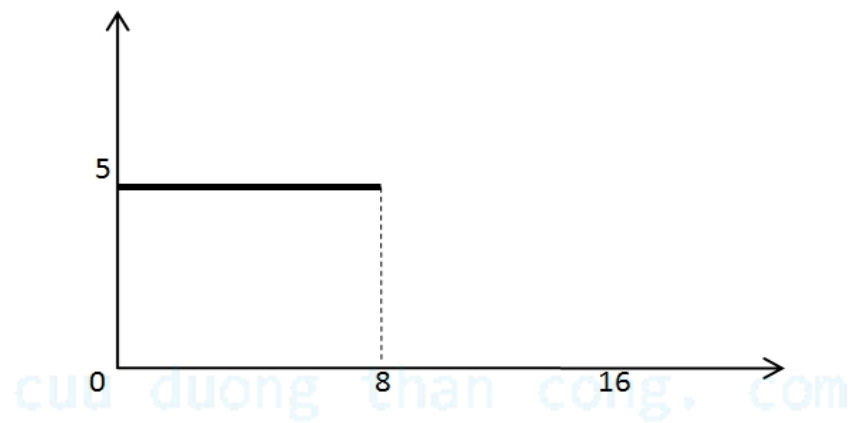
thì

$$G(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} A e^{-2\pi i \frac{xu}{M}} \chi_{[0, K-1]} = \frac{A}{M} \sum_{x=0}^{K-1} \left(e^{-2\pi i \frac{u}{M}}\right)^x$$



Hình 2.1: Đồ thị hàm $|G|$

cuu duong than cong. com



Hình 2.2: Đồ thị hàm g

Với $u = 0$ thì $G(0) = \frac{AK}{M}$,

Với $1 \leq u \leq \frac{M}{2}$ thì $G(u) = \frac{A}{M} \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{uK}{M}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{u}{M}}}$

hay

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{A}{M} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{uK}{M}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{uK}{M}\right)}{1 - \cos\left(2\pi \frac{u}{M}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{u}{M}\right)} \\ &= \frac{A}{M} \frac{2\sin^2\left(\pi \frac{uK}{M}\right) + 2i \sin\left(\pi \frac{uK}{M}\right) \cos\left(\pi \frac{uK}{M}\right)}{2\sin^2\left(\pi \frac{u}{M}\right) + 2i \sin\left(\pi \frac{u}{M}\right) \cos\left(\pi \frac{u}{M}\right)} \\ &= \frac{A}{M} \frac{\sin\left(\pi \frac{uK}{M}\right) \sin\left(\pi \frac{uK}{M}\right) + i \cos\left(\pi \frac{uK}{M}\right)}{\sin\left(\pi \frac{u}{M}\right) \sin\left(\pi \frac{u}{M}\right) + i \cos\left(\pi \frac{u}{M}\right)} \end{aligned}$$

Do đó

$$|G(u)| = \frac{A}{M} \frac{|\sin\left(\pi \frac{uK}{M}\right)|}{|\sin\left(\pi \frac{u}{M}\right)|}$$

Hình 2.1 là đồ thị của $|G|$ ứng với $M = 16, K = 4, A = 5$. Ta có thể thấy ngay rằng trên khoảng $[0, 8]$, giá trị $|G(u)|$ có xu hướng giảm dần khi u lớn (nhưng không giảm theo nghĩa $|G(u)| \geq |G(u+1)|$). Do đó, ta cũng có thể chấp nhận rằng các sóng $|G(u)| \cos\left(\frac{2\pi xu}{M} + \alpha_u\right)$ chỉ đóng vai trò là nhiễu khi u khá xa $\frac{M}{2}$.

Trên đây ta vừa đưa ra một cách biểu diễn sóng cho hàm một biến g . ở đó, một số sóng đóng góp lớn vào giá trị trung bình của G (khi u gần 0 hoặc gần M), trong khi một số sóng khác chỉ đóng vai trò nhiễu (khi u gần $\frac{M}{2}$). Trên tinh thần đó, ta cũng có một cách khai triển tương tự cho trường hợp hàm hai biến.

Ứng với mỗi $x \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, lấy Fourier rời rạc theo biến y của $f(x, y)$ ta được

$$F_1(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}}$$

Tiếp tục lấy Fourier rời rạc theo biến x của $F_1(x, v)$, ta được

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F_1(x, v) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \end{aligned}$$

Như vậy, ta có biến đổi Fourier rời rạc cho hàm hai biến $f(x, y)$ là

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \quad (2.10)$$

với $u = 0, 1, \dots, M-1, v = 0, 1, \dots, N-1$.

Tương tự như trường hợp một chiều, ta cũng có thể tìm lại f nếu biết DFT của nó bằng công thức

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (2.11)$$

Thật vậy, với mỗi $\alpha \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, nhân $e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}}$ cho hai vế của phương trình (2.10), ta được

$$\begin{aligned} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{vy}{N} \right)} e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u} e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{y=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u} \end{aligned}$$

Lấy tổng với u từ 0 đến $M-1$, ta được

$$\sum_{u=0}^{M-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} = \frac{1}{MN} \sum_{y=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y) \sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u} \quad (2.12)$$

* Với $x = \alpha$, ta có

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u} = M$$

* Với $x \neq \alpha$, khi đó $\sum_{u=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u}$ là một cấp số nhân với công bội $q = e^{i2\pi \frac{x-\alpha}{M}}$ nên

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M} u} = \frac{1 - q^M}{1 - q} = \frac{1 - e^{-i2\pi(x-\alpha)}}{1 - e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M}}} = \frac{1 - \cos(2\pi(x-\alpha)) + i \sin(2\pi(x-\alpha))}{1 - e^{-i2\pi \frac{x-\alpha}{M}}} = 0$$

Do đó ở (2.12) ta suy ra

$$\sum_{u=0}^{M-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} = \frac{1}{MN} \sum_{y=0}^{N-1} f(\alpha, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} M$$

hay

$$\sum_{u=0}^{M-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(\alpha, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \quad (2.13)$$

Với mỗi $\beta \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, nhân $e^{i2\pi \frac{v\beta}{N}}$ ở hai vế của (2.13), ta được

$$\sum_{u=0}^{M-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} e^{i2\pi \frac{v\beta}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(\alpha, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} e^{i2\pi \frac{v\beta}{M}} = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(\alpha, y) e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N} v}$$

Lấy tổng với v từ 0 đến $N-1$, ta được

$$\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} e^{i2\pi \frac{v\beta}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(\alpha, y) \sum_{v=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N} v} \quad (2.14)$$

* Với $y = \beta$, ta có

$$\sum_{v=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N} v} = N$$

* Với $y \neq \beta$, khi đó $\sum_{v=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N} v}$ là cấp số nhân với công bội $q = e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N}} \neq 1$ nên

$$\sum_{v=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N} v} = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{1 - e^{-i2\pi(y-\beta)}}{1 - e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N}}} = \frac{1 - \cos(2\pi(y-\beta)) + i \sin(2\pi(y-\beta))}{1 - e^{-i2\pi \frac{y-\beta}{N}}} = 0$$

Do đó, từ (2.14) ta suy ra

$$\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} e^{i2\pi \frac{v\beta}{N}} = \frac{1}{N} f(\alpha, \beta) \cdot N = f(\alpha, \beta)$$

Vậy

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi \frac{u\alpha}{M}} e^{i2\pi \frac{v\beta}{N}}$$

Nghĩa là (2.11) đã được chứng minh.

Nếu viết

$$F(u, v) = R(u, v) - iI(u, v)$$

thì (2.11) được viết lại thành

$$f(x, y) = \sum_{u=1}^{M-1} \sum_{v=1}^{N-1} (R(u, v) - iI(u, v)) \left(\cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + i \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right).$$

Do f là hàm giá trị thực nên phần ảo của vế phải bằng 0. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[R(u, v) \cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + I(u, v) \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] \\ &= \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)| \left[\frac{R(u, v)}{|F(u, v)|} \cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \frac{I(u, v)}{|F(u, v)|} \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

Gọi $\alpha_{uv} \in (-\pi, \pi]$ là góc thỏa

$$\begin{cases} \cos \alpha_{uv} = \frac{R(u,v)}{|F(u,v)|} \\ \sin \alpha_{uv} = \frac{I(u,v)}{|F(u,v)|} \end{cases} \quad (2.15)$$

Ta có

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)| \cos \left[2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \alpha_{uv} \right] \quad (2.16)$$

Như vậy, hàm hai biến f cũng được phân tích thành tổng của MN sóng dạng sin hay cos, mà không cần đến khai triển Fourier cho hàm hai biến.

Tiếp theo, ta xét biên độ của các sóng này, tức là $|F(u, v)|$. Đẳng thức (2.10) có thể được viết lại thành

$$R(u, v) + iI(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left[\cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + i \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

Do đó

$$R(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \quad (2.17)$$

$$I(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \quad (2.18)$$

Từ (2.17) suy ra

$$R(M - u, N - v) = R(u, v)$$

Từ (2.18) suy ra

$$I(M - u, N - v) = -I(u, v)$$

Do đó

$$R^2(M - u, N - v) + I^2(M - u, N - v) = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

hay

$$|F(M - u, N - v)| = |F(u, v)| \quad (2.19)$$

Như vậy, hàm $|F|$ đối xứng qua đường thẳng

$$\begin{cases} u = \frac{M}{2} \\ v = \frac{N}{2} \end{cases}$$

Từ (2.10), ta có

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

tức $F(0, 0)$ là giá trị trung bình của f . Ta sẽ chứng minh rằng

$$F(0, 0) = \max_{\substack{0 \leq u \leq M-1 \\ 0 \leq v \leq N-1}} |F(u, v)|$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \frac{1}{MN} \sum_{x,y} f(x, y) \\ F(u, v) &= \frac{1}{MN} \sum_{x,y} f(x, y) \left[\cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + i \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

Do đó điều cần chứng minh thành

$$\left(\sum_{x,y} f(x, y) \right)^2 \geq \left(\sum_{x,y} f(x, y) a_{x,y} \right)^2 + \left(\sum_{x,y} f(x, y) b_{x,y} \right)^2$$

với

$$a_{x,y} = \cos 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right), \quad b_{x,y} = \sin 2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right)$$

Đặt $f(Nx + y + 1) = f(x, y)$; $a_{Nx+y+1} = a_{x,y}$; $b_{Nx+y+1} = b_{x,y}$ thì điều cần chứng minh thành

$$\left(\sum_n f(n) \right)^2 \geq \left(\sum_n f(n) a_n \right)^2 + \left(\sum_n f(n) b_n \right)^2 \quad (2.20)$$

với $1 \leq n \leq MN$.

Khai triển hai vế của (2.20):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{MN} f(n) a_n \right)^2 &= \sum_{n=1}^{MN} (f(n) a_n)^2 + 2 \sum_{n < m} f(n) f(m) a_n a_m, \\ \left(\sum_{n=1}^{MN} f(n) b_n \right)^2 &= \sum_{n=1}^{MN} (f(n) b_n)^2 + 2 \sum_{n < m} f(n) f(m) b_n b_m, \\ \left(\sum_{n=1}^{MN} f(n) \right)^2 &= \sum_{n=1}^{MN} (f(n))^2 + 2 \sum_{n < m} f(n) f(m). \end{aligned}$$

Với chú ý rằng $a_n^2 + b_n^2 = 1$, (2.20) tương đương với

$$\sum_{n < m} f(n) f(m) (a_n a_m + b_n b_m) \leq \sum_{n < m} f(n) f(m) \quad (2.21)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski-Cauchy-Schwarz

$$a_n a_m + b_n b_m \leq \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)(a_m^2 + b_m^2)}$$

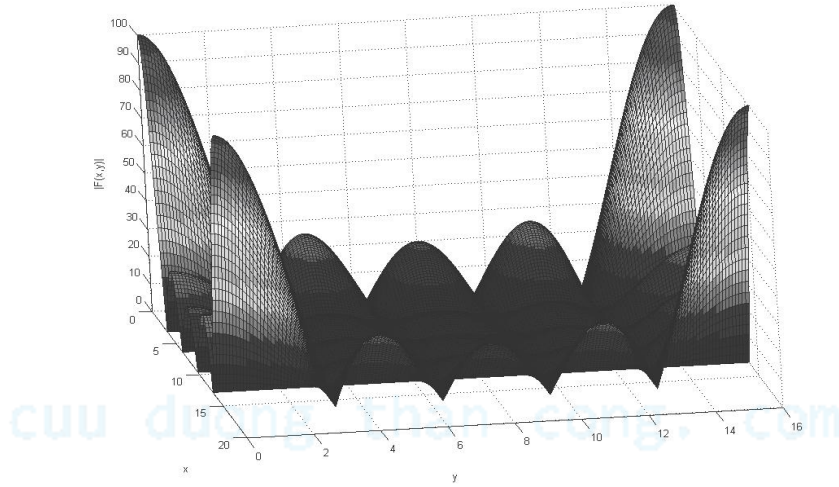
Mà $a_n^2 + b_n^2 = a_m^2 + b_m^2 = 1$ nên (2.21) đã được chứng minh.

Vậy ta đã chứng minh được $|F(u, v)|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(u, v) = (0, 0)$. Điều đó có nghĩa là trong các sóng thành phần của f , sóng có biên độ lớn nhất là sóng ứng với $(u, v) = (0, 0)$, và biên độ này bằng giá trị trung bình của f .

Dưới đây là biểu đồ độ cao của hàm $F(u, v)$ với

$$f(x, y) = \begin{cases} 5 & \text{nếu } 0 \leq u, v \leq 4 \\ 0 & \text{nếu } 5 \leq u, v \leq 15 \end{cases}$$

Theo Hình 2.3 thì $|F(u, v)|$ càng nhỏ khi (u, v) càng gần $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$. Do đó, các sóng



Hình 2.3: Đồ thị hàm $|F|$

ứng với (u, v) gần $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ có biên độ nhỏ (và do đó chỉ đóng vai trò nhiễu), còn các sóng ứng với (u, v) gần $(0, 0)$, hay $(M, 0)$, hay $(0, N)$, hay (M, N) thì có biên độ lớn. Tiếp theo, ta xét khả năng vận dụng biến đổi DFT hai chiều ở (2.10) và (2.11) vào việc xử lý ảnh. Hàm f giờ đây là trường độ xám, trong đó $f(x, y)$ là độ xám của ảnh tại pixel có tọa độ là (x, y) .

Giả sử ta muốn làm trơn ảnh, tức là làm trơn hàm f . Công thức (2.16) gợi ý rằng ảnh kết quả g sẽ có dạng

$$g(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) |F(u, v)| \cos \left[2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \alpha_{uv} \right] \quad (2.22)$$

trong đó $H(u, v)$ khá nhỏ khi (u, v) gần $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ để làm giảm biên độ của các nhiễu này. ở đây, từ "giảm" có thể hiểu theo nghĩa $H(u, v) = 1$ khi (u, v) khá gần $(0, 0)$, hoặc $(M, 0)$, hoặc $(0, N)$, hoặc (M, N) , còn $0 \leq H(u, v) < 1$ khi (u, v) khá gần $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$. Để tiện cho việc tính toán sau này, ta dùng phép biến đổi sau

$$\tilde{F}(u, v) = F \left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2} \right)$$

Khi đó $|\tilde{F}(u, v)|$ khá bé khi (u, v) xa $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$.

Phép biến đổi này tương đương với phép biến đổi trên miền ảnh (tức là đổi ảnh) sau

$$\tilde{f}(x, y) = (-1)^{x+y} f(x, y)$$

Thật vậy,

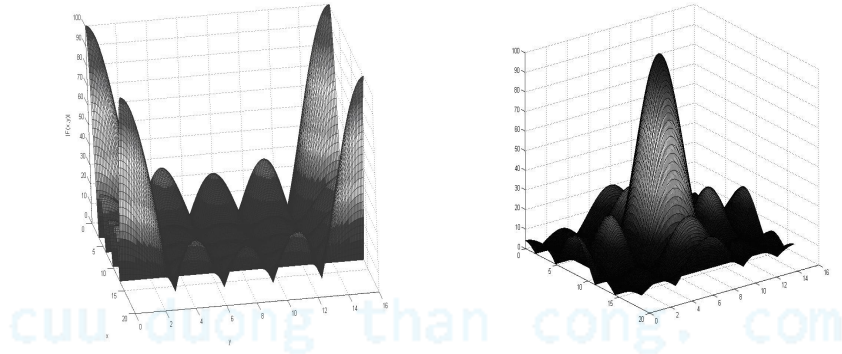
$$\begin{aligned} \Im[\tilde{f}(x, y)] &= \Im[(-1)^{x+y} f(x, y)] \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{x+y} e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi[\frac{x}{M}(u - \frac{M}{2}) + \frac{y}{N}(v - \frac{N}{2})]} \\ &= F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) = \tilde{F}(u, v) \end{aligned}$$

Công thức (2.22) lúc này thành

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) |\tilde{F}(u, v)| \cos\left[2\pi\left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right) + \alpha_{uv}\right] \quad (2.23)$$

trong đó $H(u, v)$ khá nhỏ khi (u, v) xa $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$. Ta có thể hiểu là $0 \leq H(u, v) < 1$ khi (u, v) khá xa $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$, còn $H(u, v) = 1$ khi (u, v) khá gần $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$.

Sự đổi biến này chỉ là sự dời điểm sáng nhất trên $|F(u, v)|$ từ $(0, 0)$ sang $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ mà thôi (Hình 2.4)



Hình 2.4: (a) Trước khi dời trục, (b) Sau khi dời trục

Ảnh \tilde{g} thu được ở (2.23) là ảnh kết quả của ảnh đã được đổi biến. Do đó, ảnh kết quả ứng với f là g phải thỏa

$$\tilde{g}(x, y) = (-1)^{x+y} g(x, y)$$

tức là

$$g(x, y) = (-1)^{x+y} \tilde{g}(x, y)$$

Như vậy, quy trình biến đổi ảnh gồm các bước sau (Quy trình 1):

1. Đảo ảnh: $\tilde{f}(x, y) = (-1)^{x+y} f(x, y)$.
2. Lập biến đổi DFT hai chiều $\tilde{F}(u, v)$ của \tilde{f} .
3. Tạo một lọc $H(u, v)$.

- Nếu muốn làm trơn ảnh

$$\begin{cases} H(u, v) = 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ gần } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \\ H(u, v) < 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ xa } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \end{cases}$$

- Nếu muốn làm sắc ảnh: ngược lại

4. Tìm \tilde{g} từ (2.23).

5. Ảnh kết quả $g(x, y) = (-1)^{x+y} \tilde{g}(x, y)$.

Trong quy trình trên, bước rắc rối nhất là bước 4, bởi vì trong công thức (2.23) còn có α_{uv} khá khó tính. Do đó, ta sẽ phân tích kỹ hơn phương pháp tính toán ở bước này.

Nếu đặt $G(u, v) = H(u, v) \tilde{F}(u, v)$ thì (2.23) được viết lại thành

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |G(u, v)| \cos \left[2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \alpha_{uv} \right] \quad (2.24)$$

trong đó α_{uv} được cho bởi (2.15) nhưng thay R và I bằng \tilde{R} và \tilde{I}

$$\begin{cases} \cos \alpha_{uv} = \frac{\tilde{R}(u, v)}{|\tilde{F}(u, v)|} \\ \sin \alpha_{uv} = \frac{\tilde{I}(u, v)}{|\tilde{F}(u, v)|} \end{cases} \quad (2.25)$$

Nếu gọi $\tilde{\tilde{g}}$ là phần thực của DFT ngược của G thì áp dụng (2.16) với $F \equiv G$, ta có

$$\tilde{\tilde{g}}(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |G(u, v)| \cos \left[2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \alpha'_{uv} \right] \quad (2.26)$$

trong đó α'_{uv} được cho bởi (2.15) nhưng thay F bởi G và thay R và I lần lượt là $Re(G)$ và $-Im(G)$.

Vì

$$G(u, v) = H(u, v) \tilde{F}(u, v) = H(u, v) \tilde{R}(u, v) - iH(u, v) \tilde{I}(u, v)$$

nên với giả thiết $H(u, v)$ thực, ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(G) &= H(u, v) \tilde{R}(u, v) \\ -\operatorname{Im}(G) &= H(u, v) \tilde{I}(u, v) \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \cos \alpha'_{uv} &= \frac{H(u, v) \tilde{R}(u, v)}{|G(u, v)|} = \frac{H(u, v) \tilde{R}(u, v)}{|H(u, v)| |\tilde{F}(u, v)|} \\ \sin \alpha'_{uv} &= \frac{H(u, v) \tilde{I}(u, v)}{|G(u, v)|} = \frac{H(u, v) \tilde{I}(u, v)}{|H(u, v)| |\tilde{F}(u, v)|} \end{aligned}$$

Do đó, nếu $H(u, v) \geq 0$ thì

$$\begin{cases} \cos \alpha'_{uv} = \frac{\tilde{R}(u, v)}{|\tilde{F}(u, v)|} \\ \sin \alpha'_{uv} = \frac{\tilde{I}(u, v)}{|\tilde{F}(u, v)|} \end{cases} \quad (2.27)$$

Từ (2.25) và (2.27) ta suy ra $\alpha'_{uv} = \alpha_{uv}$.

Do đó (2.26) được viết lại thành

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |G(u, v)| \cos \left[2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) + \alpha_{uv} \right]$$

So sánh với (2.24) ta suy ra $\tilde{g}(x, y) = \tilde{g}(x, y)$. Điều đó có nghĩa là \tilde{g} ở (2.23) chính là phần thực của biến đổi DFT ngược của $G(u, v) = H(u, v) \tilde{F}(u, v)$. Như vậy, với hạn chế rằng hàm lọc H là thực và không âm thì quy trình xử lý ảnh được viết lại như sau (Quy trình 2)

1. Đảo ảnh: $\tilde{f}(x, y) = (-1)^{x+y} f(x, y)$.
2. Lập biến đổi DFT hai chiều $\tilde{F}(u, v)$ của \tilde{f} .
3. Tạo một lọc thực không âm $H(u, v)$.

- Nếu muốn làm trơn ảnh

$$\begin{cases} H(u, v) = 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ gần } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2} \right) \\ 0 \leq H(u, v) < 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ xa } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2} \right) \end{cases}$$

- Nếu muốn làm sắc ảnh:

$$\begin{cases} H(u, v) = 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ xa } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2} \right) \\ 0 \leq H(u, v) < 1 & \text{nếu } (u, v) \text{ gần } \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2} \right) \end{cases}$$

4. Tính $G(u, v) = H(u, v) \tilde{F}(u, v)$.

5. Tìm \tilde{g} , là phần thực của biến đổi DFT ngược của G .

6. Ảnh kết quả $g(x, y) = (-1)^{x+y}\tilde{g}(x, y)$

Nếu ảnh đầu vào là ảnh màu (RGB) thì quy trình xử lý được cho bởi



Hình 2.5: Sơ đồ xử lý ảnh màu

Giải thích các đối tượng:

a : Ma trận $M \times N \times 3$ biểu diễn ảnh màu.

f : Ma trận $M \times N$ biểu diễn ảnh xám tương ứng.

F : Biến đổi Fourier rời rạc của f .

G : kết quả của F sau khi được lọc.

g : ma trận $M \times N$ biểu diễn ảnh xám đã được tăng cường.

Giải thích các bước:

(1) : chuyển từ ảnh màu (RGB) sang ảnh xám. Bước này được thực hiện bởi lệnh "rgb2gray" của Matlab, tức là:

$$f = \text{rgb2gray}(a);$$

(2) : Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) f để được F . Bước này được thực hiện bởi lệnh "fft2" của Matlab, tức là:

$$F = \text{fft2}(f);$$

Đây chính là bước tạo nên tần số của ảnh, $F(u,v)$, từ miền không gian, $f(x,y)$. Kể từ đây, mọi thao tác xử lý ảnh sẽ không được thực hiện trực tiếp trên f nữa, mà sẽ được thực hiện trên F .

(3) : Đây là phần chính của quy trình tăng cường ảnh. Miền tần số F sẽ được lọc bởi hàm lọc H . Kết quả của phép lọc này là một tần số mới G , được cho bởi

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

Rõ ràng việc lọc tần số F như thế nào được quyết định hoàn toàn bởi H :

* Nếu ta muốn khử hoặc làm giảm ảnh hưởng của các tần số cao trong F lên ảnh, ta sẽ chọn H sao cho $H(u,v)$ khá bé khi $\sqrt{u^2 + v^2}$ lớn.

* Nếu ta muốn khử hoặc làm giảm ảnh hưởng của các tần số thấp trong F lên ảnh, ta sẽ chọn H sao cho $H(u,v)$ khá bé khi $\sqrt{u^2 + v^2}$ nhỏ.

Nói tóm lại, việc chọn hàm H thế nào phụ thuộc vào tình trạng ảnh ban đầu và yêu

cầu xử lý cụ thể.

(4) Từ tần số mới G , ta dùng biến đổi Fourier ngược để tìm được không gian mới g . Đây chính là ma trận biểu diễn độ xám của ảnh sau khi được tăng cường.

Tiếp theo, ta phân tích độ phức tạp của Quy trình xử lý 2.2:

Ở quy trình này, hai bước có độ phức tạp cao là bước 2 và bước 5. Đó là các bước tính DFT và DFT ngược của một hàm số.

Ở (2.10), với mỗi (u, v) để tính được $F(u, v)$, ta phải tốn MN phép cộng, MN phép nhân và $2MN$ phép tính lượng giác. Do đó, để tính được hết tất cả các $F(u, v)$ với $0 \leq u \leq N - 1$, ta phải tốn M^2N^2 phép cộng, M^2N^2 phép nhân và $2M^2N^2$ phép tính lượng giác.

Biến đổi DFT ngược cho bởi (2.11) cũng tương tự như vậy, để tìm lại $f(x, y)$ với mọi $0 \leq x \leq M - 1, 0 \leq y \leq N - 1$ ta phải tìm M^2N^2 phép cộng, M^2N^2 phép nhân, $2M^2N^2$ phép tính lượng giác.

Do đó, Quy trình 2.2 đòi hỏi $2M^2N^2$ phép cộng, $2M^2N^2$ phép nhân và $4M^2N^2$ phép tính lượng giác. So sánh với độ phức tạp của phương pháp xử lý ảnh của khai triển Fourier được đề cập ở mục 2.1, ta thấy Quy trình 2.2 có độ phức tạp thấp hơn do ta không dùng đến chỉ số chốt chốt K .

Tuy nhiên, độ phức tạp $O(M^2N^2)$ cũng còn khá lớn. Chẳng hạn với ảnh cỡ nhỏ $M = N = 100$ thì số phép toán phức tạp là cỡ $2M^2N^2 + 2M^2N^2 + 4M^2N^2 = 8M^2N^2 = 8 \cdot 10^8$, tức là 800 triệu phép toán phức tạp. Điều đó đòi hỏi phải có một thuật toán nhanh giúp tìm DFT và DFT ngược của một hàm số. Đó chính là động lực cho sự khám phá một giải thuật tính toán mới Fast Fourier (Fast Fourier Transform hay viết tắt là FFT).

2.3 Biến đổi Fast Fourier

Trên tinh thần đánh giá độ phức tạp của thuật toán, chúng tôi chỉ nêu ý tưởng và phân tích chi phí của thuật toán chứ không đi sâu vào chi tiết của nó. Để thấy ý tưởng của FFT, ta xét trường hợp hai một biến f và với M có dạng lũy thừa cơ số 2. Giả sử DFT của hàm một biến f là F

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi \frac{xu}{M}} \quad (2.28)$$

Biến đổi DFT ngược tương ứng là

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi \frac{xu}{M}} \quad (2.29)$$

Vấn đề đặt ra là làm sao tính nhanh $F(u)$ với $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ từ (2.28) nếu biết $f(x)$ với $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. Làm sao tính nhanh $f(x)$ với $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ từ (2.29) nếu biết $F(u)$ với $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$.

Vì (2.28) và (2.29) các cấu trúc khá giống nhau nên ta chỉ phân tích vào (2.28) ta viết lại dưới dạng

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(\cos\left(2\pi \frac{xu}{M}\right) - i \sin\left(2\pi \frac{xu}{M}\right) \right)$$

hay

$$F(u) = \frac{1}{M} \left[\sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cos\left(2\pi \frac{xu}{M}\right) - i \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \sin\left(2\pi \frac{xu}{M}\right) \right] \quad (2.30)$$

Nếu tính $F(u)$ từ (2.30) thì với mỗi u ta phải tốn ít nhất $2M$ phép cộng, $2M$ phép nhân và $2M$ phép tính lượng giác. Do đó, để tính ra được $F(u)$ với mọi $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, ta phải tốn khoảng $2M^2$ phép cộng, $2M^2$ phép nhân và $2M^2$ phép tính lượng giác. Như vậy, độ phức tạp của phương pháp ở (2.30) là $O(M^2)$. Đó là ta đã xem như phép tính lượng giác có chi phí ngang với phép cộng và nhân. Thực tế thì các phép tính sin hay cos có chi phí lớn hơn nhiều. Do đó, khuyết điểm ở (2.30) là ta phải tính toán quá nhiều trên các hàm lượng giác. Công thức (2.28) gợi ý cho ta một giải pháp.

Nếu đặt $W_M = e^{-2\pi i \frac{1}{M}}$ thì (2.28) được viết lại thành

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{xu}$$

Vì $M = 2^n$ nên

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{2^n-1} f(x) W_M^{xu}$$

hay

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} f(2x) W_M^{2xu} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} f(2x+1) W_M^{(2x+1)u} \quad (2.31)$$

Đặt $M = 2K$ với $K = 2^{n-1}$, thì ta thấy

$$W_M^{2xu} = W_{2K}^{2xu} = W_K^{xu}$$

Do đó (2.31) được viết lại thành

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_M^{(2x+1)u} \quad (2.32)$$

Nếu số hạng thứ nhất của vế phải (2.32) chỉ được tính với $u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ thì cấu trúc của nó giống vế phải của (2.28) nhưng $f(x)$ thay bởi $g(x) = f(2x)$.

Với $0 \leq u \leq M-1$, thay u bởi $u+K$ ở (2.32), ta được

$$F(u+K) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{x(u+K)} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_M^{(2x+1)(u+K)} \quad (2.33)$$

Ta có

$$W_K^{x(u+K)} = W_K^{xu+xK} = e^{-i2\pi \frac{xu+xK}{K}} = e^{-i2\pi \frac{xu}{K}} e^{-i2\pi x} = e^{-i2\pi \frac{xu}{K}}$$

Do đó

$$W_K^{x(u+K)} = W_K^{xu} \quad (2.34)$$

Ta có

$$W_M^{(2x+1)(u+K)} = W_M^{(2x+1)u+(2x+1)K} = e^{-i2\pi \left[\frac{(2x+1)u}{M} + (2x+1) \frac{K}{M} \right]}$$

hay

$$W_M^{(2x+1)(u+K)} = e^{-i2\pi \frac{(2x+1)u}{M}} e^{-i2\pi (2x+1) \frac{1}{2}} = W_M^{(2x+1)u} e^{i\pi (2x+1)} = -W_M^{(2x+1)u}$$

Do đó

$$W_M^{(2x+1)(u+K)} = -W_M^{(2x+1)u} \quad (2.35)$$

Thế (2.34) và (2.35) vào (2.33), ta được

$$F(u+K) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu} - \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_M^{(2x+1)u} \quad (2.36)$$

Vấn đề bây giờ là số hạng thứ hai ở vế phải của (2.32) hay (2.36) vẫn chưa có cấu trúc giống số hạng thứ nhất của nó. Do đó ta cần phải phân tích tiếp số hạng này. Ta thấy

$$W_M^{(2x+1)u} = W_M^{2xu+u} = e^{-i2\pi \frac{2xu+u}{M}} = e^{-i2\pi \left(\frac{2xu}{2K} + \frac{u}{M} \right)}$$

hay

$$W_M^{(2x+1)u} = e^{-i2\pi \frac{xu}{K}} e^{-i2\pi \frac{u}{M}}$$

hay

$$W_M^{(2x+1)u} = W_K^{xu} W_M^u \quad (2.37)$$

Thế (2.37) vào (2.32) và (2.36), ta được

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu} - \frac{1}{M} W_M^u \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_M^{xu} \quad (2.38)$$

hay

$$F(u+K) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu} - \frac{1}{M} W_M^u \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_M^{xu} \quad (2.39)$$

Đặt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(2x) & \text{với } 0 \leq x \leq K-1 \\ f_2(x) &= f(2x+1) & \text{với } 0 \leq x \leq K-1 \end{aligned}$$

và gọi $F_1(u)$ và $F_2(u)$ lần lượt là DFT của chúng thì (2.38) và (2.39) được viết lại như sau

$$F(u) = \frac{1}{2} F_1(u) + \frac{1}{2} W_M^u F_2(u) \quad (2.40)$$

$$F(u+K) = \frac{1}{2}F_1(u) - \frac{1}{2}W_M^u F_2(u) \quad (2.41)$$

Như vậy, để tính được tất cả các $F(u)$ với $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ thì ta cần phải tính $F_1(u)$, $F_2(u)$ và W_M^u .

Nếu gọi a_n và m_n lần lượt là số phép cộng và phép nhân cần dùng để tìm $F(u)$ ở (2.28) ứng với $M = 2^n$ thì chi phí tính tất cả các $F_1(u)$, với $u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ là $a_{n-1} + m_{n-1}$. Chi phí tính tất cả các $F_2(u)$, với $u = 0, 1, 2, \dots, K-1$ là $a_{n-1} + m_{n-1}$. Để tính $F(u)$ ở (2.40) và (2.41) ta còn phải tính được W_M^u

$$W_M^u = e^{-i2\pi \frac{u}{M}} = \cos\left(2\pi \frac{u}{M}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{u}{M}\right) \quad (2.42)$$

Nếu dùng (2.42) để tính W_M^u thì ta vẫn phải tốn đến 2 phép tính lượng giác ứng với mỗi u . tức là phải tốn $2M$ phép tính lượng giác để tính được tất cả các $F(u)$. Đó là chi phí lớn mà ta đang muốn né tránh. Ta thấy rằng

$$W_M^{u+1} = W_M^u W_M$$

Như vậy, ta chỉ cần dùng 2 phép tính lượng giác để tính được W_M , rồi sau đó dùng phép nhân hai số phức để lần lượt tính được $W_M^2, W_M^3, \dots, W_M^{K-1}$. Một phép nhân hai số phức tốn 4 phép nhân số thực và 2 phép cộng số thực. Do vậy, chi phí tính W_M^u ở (2.40) và (2.41) là 4 phép nhân và 2 phép cộng. Do đó, để tính hết tất cả các W_M^u với $u = 0, 1, \dots, K-1$ thì ta phải tốn $4K$ phép nhân và $2K$ phép cộng. Như vậy, từ (2.40) và (2.41) ta có

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + M + 2K \\ m_n &= 2m_{n-1} + 4K + 2K \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 2.2^n \\ m_n &= 2m_{n-1} + 4.2^n \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} a_n &= A_1 n 2^n \\ m_n &= A_2 n 2^n \end{aligned}$$

trong đó A_1 và A_2 là các hằng số.

Do đó chi phí để tìm DFT của f là

$$a_n + m_n = (A_1 + A_2) n 2^n = (A_1 + A_2) M (\log M)$$

tức là thuật toán có độ phức tạp là $M \log M$.

Rõ ràng chi phí này tốt hơn nhiều so với chi phí M^2 như phương pháp tính thông thường.

Tiếp theo, ta ứng dụng thuật toán FFT như trên vào trường hợp 2 chiều. Giả sử $f = f(x, y)$ là hàm hai biến và $F = F(u, v)$ là DFT của $f(x, y)$

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{xu}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (2.43)$$

hay

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}} \right) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \quad (2.44)$$

Ứng với mỗi x và v , ta đặt

$$A_{xv} = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi \frac{vy}{N}}$$

Khi đó với mỗi $x = 0, 1, \dots, M-1$ thì A_{xv} chính là DFT một chiều của $f_x(y) = f(x, y)$. Do đó, chi phí để tính được các A_{xv} với $v = 0, 1, \dots, N-1$ là $N \log N$. Công thức (2.44) được viết lại

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} A_{xv} e^{-i2\pi \frac{ux}{M}} \quad (2.45)$$

Như vậy, chi phí để tính được tất cả các A_{xv} ở (2.45) là $MN \log N$.

Tiếp theo, ứng với mỗi $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$, vế phải của (2.45) chính là DFT của $g_v(x) = A_{xv}$. Do đó, chi phí để tính được tất cả các $F(u, v)$ với $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ là $M \log M$. Do đó chi phí tính tất cả $F(u, v)$ của (2.45) với $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ và $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ là $MN \log M$. Tóm lại, chi phí tính tất cả các $F(u, v)$ từ f là

$$MN \log N + MN \log M = MN \log(MN)$$

Thuật toán tính DFT ngược hoàn toàn tương tự DFT thuận, tức là cũng có độ phức tạp là $MN \log(MN)$. Như vậy Quy trình 2.2 có độ phức tạp là $MN \log(MN)$. Rõ ràng đây là chi phí thấp hơn nhiều so với chi phí của phương pháp xử lý ảnh bằng khai triển Fourier hai chiều như đã nêu ở mục 2.1.

Chương 3

Ứng dụng

Trong mục này, ta sẽ áp dụng những cơ sở lý thuyết đã lập được ở các mục trên vào bài toán xử lý ảnh cụ thể. Ứng dụng cụ thể mà ta xét ở đây là *tăng cường ảnh*. Đó là việc làm cho ảnh trở nên tốt hơn, đẹp hơn, hay rõ hơn. Với một ảnh nhòe, ta luôn muốn làm cho nó rõ hơn. Khi đó, ta sẽ lọc lấy những sóng có tần số cao trong miền tần số, vì đây là những sóng thể hiện sự thay đổi đột ngột về độ xám của ảnh. Lúc đó, hàm lọc tần số cao (Highpass filter) sẽ được dùng. Hình 3.6 là một thí dụ minh họa.

Tuy nhiên, nhiều khi không phải ảnh nào rõ nét cũng đẹp, chẳng hạn những vật thể mà bản thân nó đã xấu thì ảnh chụp của nó không thể đẹp được. Thậm chí ảnh chụp càng rõ nét thì càng xấu, vì cái xấu đã được soi rất rõ, rất kỹ. Hình 3.2 là một thí dụ cho thấy điều đó. Do đó, đối với những ảnh như vậy, ta không mong muốn nó rõ thêm nữa, mà muốn nó mờ đi để che bớt phần nào đó khuyết điểm của vật trong ảnh. Lúc này, ta chỉ giữ lại những sóng với tần số thấp trong miền tần số (Lowpass filter), mà bỏ đi các sóng có tần số cao thể hiện độ sắc nét của ảnh. Với ta, các sóng này giờ đây chỉ đóng vai trò nhiễu mà thôi.

Hơn nữa, ta biết rằng việc muốn làm trơn ảnh hay làm sắc ảnh chỉ khác nhau ở cách chọn hàm lọc. Do đó, đối với bài toán xử lý ảnh cụ thể, hàm lọc phải được xác định một cách tường minh. Đó chính là nguyên nhân ra đời nhiều phương pháp chọn hàm lọc mà ta sẽ nêu dưới đây. Trước hết, ta nhắc lại quy trình xử lý ảnh trên miền tần số:

Lọc sóng trên miền tần số gồm các bước

1. Nhân ảnh f với $(-1)^{x+y}$ để tịnh tiến gốc tọa độ của biến đổi vào giữa ảnh.
2. Tính $F(u, v)$ từ ảnh nhận được ở bước 1.
3. Nhân hàm lọc $H(u, v)$ vào hàm $F(u, v)$
4. Tính Fourier ngược của hàm nhận được ở bước 3.
5. Lấy phần thực của hàm nhận được ở bước 4.

6. Tịnh tiến ảnh lại bằng cách nhân $(-1)^{x+y}$

Nếu $f(x, y)$ biểu diễn ảnh nhập vào, và $F(u, v)$ là biến đổi Fourier của nó. Khi đó miền tần số sau khi lọc là

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v). \quad (3.1)$$

Để có được ảnh sau khi lọc, ta chỉ cần lấy Fourier ngược của hàm $G(u, v)$

$$\text{Ảnh đã lọc} = \mathfrak{F}^{-1}[G(u, v)] \quad (3.2)$$

Có hai kiểu lọc cơ bản là lọc *tần số thấp*, và lọc *tần số cao*. Lọc tần số thấp nghĩa là làm suy giảm các tần số cao trong khi đó lại giữ lại các thành phần có tần số thấp. Ngược lại, lọc tần số cao lại giữ lại các tần số cao và làm yếu đi các tần số thấp.

3.1 Làm trơn ảnh

Ở Hình 3.2a, ta có một đoạn văn bản bị vỡ, các ký tự bị vỡ tạo các khoảng trống, tuy mắt chúng ta có thể dễ dàng đọc được các ký tự này nhưng với máy tính thì việc nhận dạng các ký tự bị đứt này khá khó khăn. Cách để khắc phục các khe hở nhỏ này là làm nhòe ảnh để lấp các khe hở (Hình 3.2b).

Các tần số thấp trong biến đổi Fourier đóng góp lớn cho mức xám tại những vùng trơn của ảnh. Do đó để làm trơn ảnh ta phải làm mờ đi các đường biên, tức phải giảm đi các tần số cao. Vì vậy ta phải sử dụng kiểu lọc tần số thấp. Có ba loại lọc tần số thấp hay được dùng là Ideal, Butterworth, và Gauss.

3.1.1 Lọc tần số thấp Ideal

Đây là cách lọc đơn giản nhất, ta chỉ cần bỏ đi các thành phần tần số trong biến đổi Fourier mà khoảng cách tối tâm lớn hơn một D_0 xác định. Ta gọi đây là *lọc Ideal tần số thấp* (Ideal Lowpass Filter, hay viết tắt là ILPF)

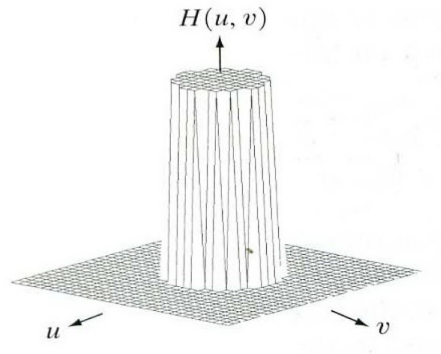
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{nếu } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Trong đó D_0 là số không âm, và $D(u, v)$ là khoảng cách từ điểm (u, v) tới tâm. Nếu ảnh kích thước $M \times N$ thì tâm của miền tần số là $(u, v) = (M/2, N/2)$, vậy nên

$$D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2} \quad (3.4)$$

Tuy nhiên, con số D_0 không mang đầy đủ ý nghĩa, vì vậy ta cần một tiêu chuẩn để xác định D_0 . Để làm như vậy, ta xác định lượng năng lượng trong miền đang xét đối với năng lượng tổng cộng P_T

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v) \quad (3.5)$$



Hình 3.1: Hàm lọc ILPF

XỬ LÝ ẢNH
TRÊN MIỀN
TẦN SỐ

XỬ LÝ ẢNH
TRÊN MIỀN
TẦN SỐ

cuu duong than cong. com

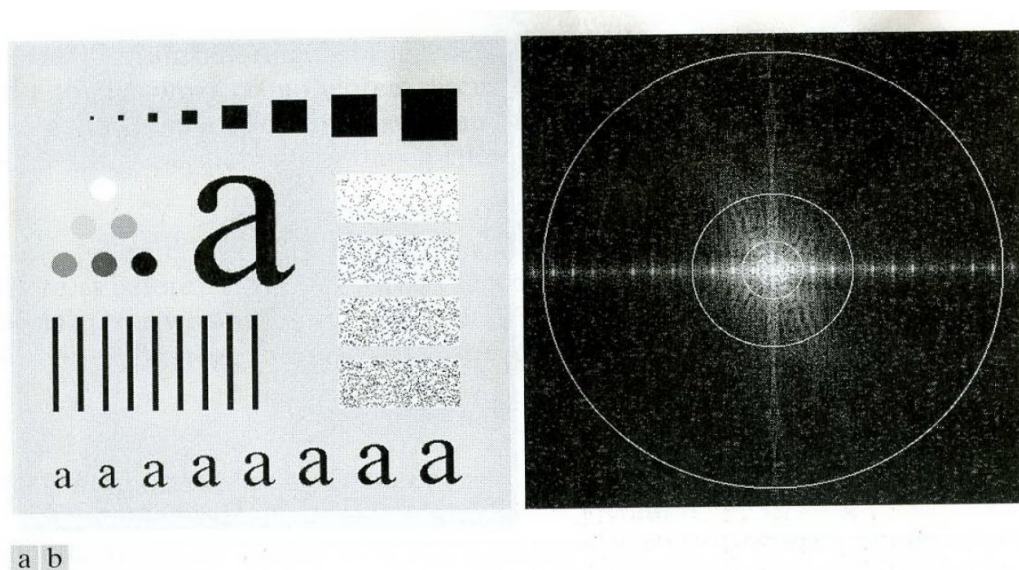
Hình 3.2: (a) Văn bản bị rỗ. (b) Văn bản sau khi được lọc tần số thấp

tỉ lệ phần trăm năng lượng trong đường tròn

$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right] \quad (3.6)$$

với (u, v) chạy trong miền đó.

Trên Hình 3.2a ta có một văn bản bị lỗi, các kí tự bị vỡ tạo các khoảng trống, tuy mất chúng ta có thể dễ dàng đọc được các kí tự này nhưng với máy tính thì việc nhận dạng các kí tự bị đứt này khá khó khăn. Cách để khắc phục các khe hở nhỏ này là làm nhòa ảnh để lấp các khe hở (Hình 3.2b). Hình 3.3(a) là một bức ảnh kích thước 500 x 500 và phổ Fourier của nó là Hình 3.3(b). Các vòng tròn bán kính lần lượt là 5, 15, 30, 80, và 230, bao quanh vùng chứa năng lượng α tương ứng là $\alpha = 92.0, 94.6, 96.4, 98, \text{ và } 99.5\%$.



Hình 3.3: (a) Ảnh với kích thước 500 x 500 pixels (b) Phổ Fourier của ảnh. Các vòng tròn với bán kính lần lượt là 5, 15, 30, 80, và 230 pixel.

3.1.2 Lọc tần số thấp Butterworth

Hàm lọc Butterworth tần số thấp (Butterworth Lowpass Filter, hay BLPF) bậc n với D_0 cho trước được định nghĩa như sau

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (3.7)$$

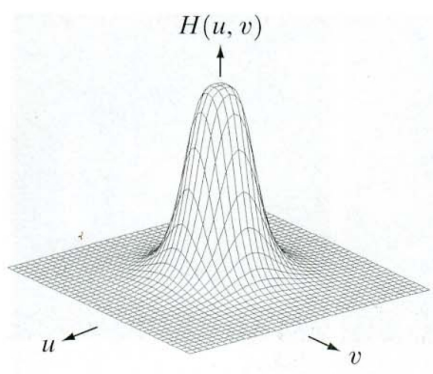
với $D(u, v)$ được định nghĩa như (3.4). Không giống như ILPF là cắt bỏ hoàn toàn các thành phần tần số cao, BLPF chỉ làm giảm cường độ của các thành phần tần số, và tần số càng cao thì cường độ càng bị giảm đi nhiều. Ví dụ như với $D(u, v) = 0$ thì $H(u, v) = 1$, nghĩa là thành phần tần số tại tâm không đổi, trong khi $H(u, v) = 0.5$ khi $D(u, v) = D_0$ thì cường độ tại đây giảm đi 50%.

3.1.3 Lọc tần số thấp Gauss

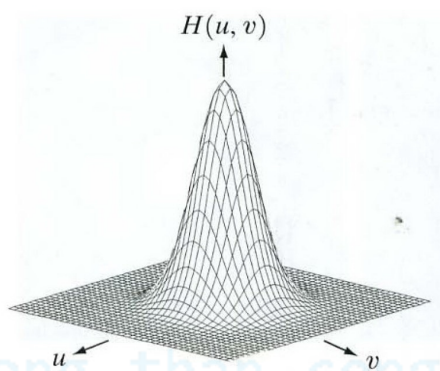
Hàm lọc Gauss (Gaussian Lowpass Filter, hay GLPF) được định nghĩa như sau

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad (3.8)$$

D_0 cho thấy sự trải rộng của đường cong Gauss, nghĩa là khi D_0 càng nhỏ thì hàm lọc H làm giảm các tần số cao mạnh hơn, và ngược lại. Khi $D(u, v) = D_0$ thì cường độ tại đây sẽ giảm còn 0.607 so với ban đầu (Hình 3.5).



Hình 3.4: Hàm lọc BLPF



Hình 3.5: Hàm lọc GLPF

3.2 Làm sắc ảnh

Do các cạnh hay các biên trên vật thể được thể hiện qua các thành phần tần số cao nên ta sử dụng kiểu lọc tần số cao để làm sắc ảnh. Do lọc tần số cao là trái ngược với lọc tần số thấp nên hàm lọc tần số cao có thể được tính nhờ quan hệ

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v) \quad (3.9)$$

trong đó $H_{lp}(u, v)$ là lọc tần số thấp. Phần này ta cũng sẽ nói đến ba loại lọc tần số cao: ideal, Butterworth, và Gauss.

3.2.1 Lọc tần số cao Ideal

Hàm lọc tần số cao Ideal (Ideal Highpass Filter, hay IHPF) được định nghĩa như sau

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{nếu } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.2 Lọc tần số cao Butterworth

Hàm lọc tần số cao Butterworth (Butterworth Highpass Filter, hay BHPF) được định nghĩa như sau

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (3.11)$$



Hình 3.6: (a) Ảnh nhòe, (b) Ảnh sau khi được lọc Butterworth với $D_0 = 320$, $n = 2$

3.2.3 Lọc tần số cao Gauss

Hàm lọc tần số cao Gauss (Gaussian Highpass Filter, hay GHPF) được định nghĩa như sau

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad (3.12)$$

Chương 4

Chương trình Matlab

4.1 Dùng khai triển Fourier

Cơ sở lý thuyết của phương pháp này được nêu ở phần 1.2 và 1.3.

```
clc;
clear all;
a = imread('7.jpg');
f = rgb2gray(a);
[M,N] = size(f);
x = linspace(-pi,pi,M+1);
y = linspace(-pi,pi,N+1);
K = 10;
h = zeros(K,K);
for i = 1:K
    for j = 1:K
        h(i,j) = 1;
    end
end
f = zeros(M,N);
f = double(f);
time = clock;

%Tinh a00
a00 = 0;
for j = 1:M
    for k = 1:N
        a00 = a00 + f(j,k);
    end
end
a00 = a00/(M*N)*4;
```

```

for r = 1:M
    r
    for s = 1:N
        s
        f_(r,s) = f_(r,s) + 1/4*h(1,1)*a00;
        %Cong voi so hang thu hai
        for n = 1:K
            %Tinh a0n, b0n
            a0n = 0;
            b0n = 0;
            for j = 1:M
                for k = 1:N
                    a0n = a0n + f(j,k)*(sin(n*y(k+1))-sin(n*y(k)));
                    b0n = b0n + f(j,k)*(cos(n*y(k))-cos(n*y(k+1)));
                end
            end
            a0n = a0n/(M*n)/pi*2;
            b0n = b0n/(M*n)/pi*2;
            f_(r,s) = f_(r,s) + 1/2*h(1,n)*(a0n*cos(n*y(s)) + b0n*sin(n*y(s)));
        end
        %Cong voi so hang thu ba
        for m = 1:K
            %Tinh am0, cm0
            am0 = 0;
            cm0 = 0;
            for j = 1:M
                for k = 1:N
                    am0 = am0 + f(j,k)*(sin(m*x(j+1))-sin(m*x(j)));
                    cm0 = cm0 + f(j,k)*(cos(m*x(j))-cos(m*x(j+1)));
                end
            end
            am0 = am0/(N*m)/pi*2;
            cm0 = cm0/(N*m)/pi*2;
            f_(r,s) = f_(r,s) + 1/2*h(m,1)*(am0*cos(m*x(r)) + cm0*sin(m*x(r)));
        end
        %Cong voi so hang thu tu
        for m = 1:K
            for n = 1:K
                %Tinh amn, bmn, cmn, dmn
                amn = 0;
                bmn = 0;
                cmn = 0;
            end
        end
    end
end

```

```

        dmn = 0;
        for j = 1:M
            for k = 1:N
                amn = amn + f(j,k)*(sin(m*x(j+1))-sin(m*x(j)))
                    *(sin(n*y(k+1))-sin(n*y(k)));
                bmn = bmn + f(j,k)*(sin(m*x(j+1))-sin(m*x(j)))
                    *(cos(n*y(k))-cos(n*y(k+1)));
                cmn = cmn + f(j,k)*(cos(m*x(j))-cos(m*x(j+1)))
                    *(sin(n*y(k+1))-sin(n*y(k)));
                dmn = dmn + f(j,k)*(cos(m*x(j))-cos(m*x(j+1)))
                    *(cos(n*y(k))-cos(n*y(k+1)));
            end
        end
        amn = amn/(pi*pi*m*n);
        bmn = bmn/(pi*pi*m*n);
        cmn = cmn/(pi*pi*m*n);
        dmn = dmn/(pi*pi*m*n);
        f_(r,s) = f_(r,s) + h(m,n)*(amn*cos(m*x(r))*cos(n*y(s))
            + bmn*cos(m*x(r))*sin(n*y(s))
            + cmn*sin(m*x(r))*cos(n*y(s))
            + dmn*sin(m*x(r))*sin(n*y(s)));
    end
end
end
end
time1 = etime(clock,time);
fprintf('Thoi gian thuc hien = %g (s)\n',time1);
g = uint8(round(f_));
imshow(g);

```

4.2 Dùng FFT

Cơ sở lý thuyết của phương pháp này được nêu ở phần 2.2 và 2.3.

Hàm xác định D_0 (cutoff frequency)

```

function D0 = cutoffFrequencyCircleShape(F,anpha)
[M,N] = size(F);
m = floor(M/2);
n = floor(N/2);
minHalfSize = min(m,n);
% Tính năng lượng tổng cộng Ptotal
Ptotal = 0;

```

```

for u = 1:M
    for v = 1:N
        Ptotal = Ptotal + abs(F(u,v))^2;
    end
end
% Tinh nang luong xap xi
P = Ptotal*anpha/100;
D0 = 1;
s = abs(F(m,n))^2;
while ((s < P)&&(D0 < minHalfSize))
    D0 = D0 + 1;
    uLower = 1 - D0 + m;
    uUpper = D0 - 1 + m;
    for u = uLower:uUpper
        beta = ceil(sqrt((D0-1)^2-(u-m)^2));
        gamma = ceil(sqrt(D0^2-(u-m)^2)) - 1;
        vLower1 = beta + n;
        vUpper1 = gamma + n;
        for v = vLower1 : vUpper1
            s = s + abs(F(u,v))^2;
        end
        vLower2 = n - beta;
        vUpper2 = n - gamma;
        for v = vLower2 : vUpper2
            s = s + abs(F(u,v))^2;
        end
    end
end
end

```

4.2.1 Làm tròn ảnh

Hàm lọc dùng phương pháp Ideal Lowpass nêu ở mục 3.1.1

```

function H = idealLowpassFilter(M,N,D0)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
for u = 1:M
    for v = 1:N
        if(sqrt((u-m)^2+(v-n)^2)<D0)
            H(u,v) = 1;
        else
            H(u,v) = 0;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

```

Hàm lọc dùng phương pháp Butterworth Lowpass nêu ở mục 3.1.2

```

function H = btwlLowpassFilter(F,M,N,D0,h)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
for u = 1:M
    for v = 1:N
        D(u,v) = sqrt(u^2 + v^2);
        H(u,v) = 1./(1 + (D(u,v)./D0).^(2*h));
    end
end
end

```

Hàm lọc dùng phương pháp Gauss Lowpass nêu ở mục 3.1.3

```

function H = GausslLowpassFilter(F,M,N,D0,h)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
for u = 1:M
    for v = 1:N
        D(u,v) = sqrt(u^2 + v^2);
        H(u,v) = exp(-(D(u,v).^2)./(2*(D(u,v)^2)));
    end
end
end

```

4.2.2 Làm sắc ảnh

Hàm lọc dùng phương pháp Ideal Highpass nêu ở mục 3.2.1

```

function H = idealHighpassFilter(M,N,D0)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
for u = 1:M
    for v = 1:N
        if(sqrt((u-m)^2+(v-n)^2)>D0)
            H(u,v) = 1;
        else
            H(u,v) = 0;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

```

Hàm lọc dùng phương pháp Butterworth Highpass nêu ở mục 3.2.2

```

function H = btwLowpassFilter(F,M,N,D0,h)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
h
for u = 1:M
    for v = 1:N
        D(u,v) = sqrt(u^2 + v^2);
        H(u,v) = 1./( 1 + (D0./D(u,v)).^(2*h));
    end
end
end

```

Hàm lọc dùng phương pháp Gauss Highpass nêu ở mục 3.2.3

```

function H = GausslHighpassFilter(F,M,N,D0,h)
H = zeros(M,N);
m = M/2;
n = N/2;
for u = 1:M
    for v = 1:N
        D(u,v) = sqrt(u^2 + v^2);
        H(u,v) = 1- exp(-(D(u,v).^2)./(2*(D(u,v).^2)));
    end
end
end

```


Tài liệu tham khảo

- [1] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods: *Digital Image Processing*, Second Edition, Prentice-Hall, 2002

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com