

ĐÁNH GIÁ BẰNG CÔNG CỤ TOÁN HỌC CƠ BẢN

Phạm Thế Bảo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM

cuu duong than cong. com

Đánh giá bằng công cụ toán học sơ cấp

1. Phương pháp chung:

Phân tích trực tiếp đoạn mã và sử dụng các kỹ thuật:

- Phép đếm
- Tính tổng hữu hạn
- Xét dấu hàm
- ...

Xác định số phép toán chủ yếu

Phép toán chủ yếu trong các đoạn mã là phép gán và so sánh.

Phương pháp này không giải quyết được tất cả các trường hợp.

Phạm Thế Bảo

• Ví dụ 1:

```

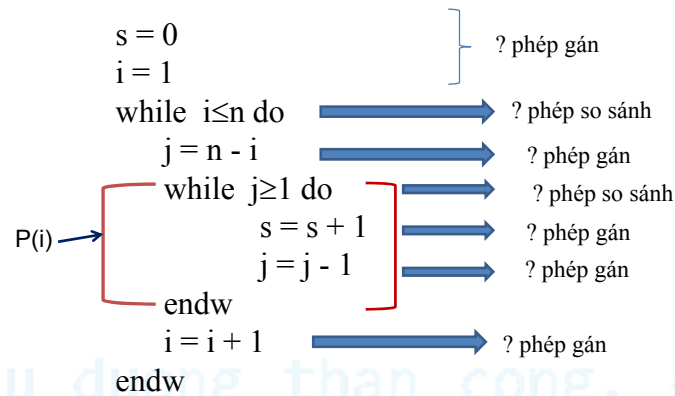
s = 0
i = 1
while i ≤ n do
    j = n - i
    while j ≥ 1 do
        s = s + 1
        j = j - 1
    endw
    i = i + 1
endw

```

Khảo sát độ phức tạp trên số phép gán và so sánh trong thuật toán.

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com



$$\text{Số phép gán} = 2 + n + \left[\sum_{i=1}^n \text{Gán}(P_i) \right] + n$$

$$= 2 + 2n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + n + 2 = O(n^2)$$

Phạm Thế Bảo

Số phép so sánh = ? (Bài tập 1)

• Ví dụ 2:

```

sum = 0
i = 1
while i ≤ n do
    j = n - i * i
    while j ≤ i * i do
        sum = sum + i * j
        j = j + 1
    endw
    i = i + 1
endw

```

P_i → [while j ≤ i*i do ... endw]

$$\text{Số phép gán} = 2 + n + \left[\sum_{i=1}^n \text{Gán}(P_i) \right] + n$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

$$= 2 + 2n + \sum_{i=1}^n (2\alpha_i) = 2 + 2n + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Nếu thay dòng lệnh $j = n - i^2$ bằng dòng lệnh $j = 1$ thì $\alpha_i = i^2$

Vòng lặp P_i chỉ thực hiện khi $n - i^2 \leq i^2 \Leftrightarrow i^2 \geq n/2$

Từ đây suy ra :

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i^2 < \frac{n}{2} \\ i^2 - (n - i^2) + 1 & \text{nếu } i^2 \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

Bài tập 2: Hãy viết chương trình thử nghiệm để đếm số phép gán và so sánh của đoạn chương trình ví dụ 2, để kiểm tra lại lý thuyết.

Như vậy:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil}^n (2i^2 - n + 1) = 2 \sum_{i=\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil}^n i^2 - (n - \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil + 1)(n - 1)$$

Phạm Thế Bảo

- **Ví dụ 3:** Xét thuật toán tìm phần tử max của mảng một chiều có n phần tử.

```

max = A[0];
i=1;
while i<n do
    if max<A[i] then
        max = A[i];
    endif
    i=i+1;
endw

```

Số phép so sánh = ?

Số phép gán = ?

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{tối thiểu khi } A[0] \text{ là max} \\ n-1 & \text{tối đa khi } A \text{ được sắp xếp tăng} \\ & \text{hay max nằm ở cuối} \\ ? & \text{Trung bình: dùng công cụ toán} \end{cases}$$

→ Độ phức tạp $f(n) = a(2n-1) + b[n+1 + \alpha(n)]$

Thời gian cho 01 so sánh

Thời gian cho 01 phép gán

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Ta có:

$$a(2n-1) + b(n+1) \leq f(n) \leq a(2n-1) + b(2n)$$

Tuyến tính

Tuyến tính

cuu duong than cong. com



$$f(n) \sim O(n)$$

Phạm Thế Bảo

Phân loại sơ bộ các đoạn mã

1. Những tính toán lặp

- Tùy tình huống

2. Các loại tính toán lặp

- Số lần lặp xác định tường minh: được thể hiện rõ ràng trong đoạn mã. Có thể tính toán bằng một công thức xác định.

Ví dụ: Tổng n số nguyên.

- Số lần lặp không tường minh: biến sẽ ngẫu nhiên phụ thuộc vào dữ liệu đầu vào và phân bố.

Ví dụ: Tìm số lớn nhất.

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

• Ví dụ 4: Xét đoạn mã.

```

i=1;
res=0;
while i≤n do
    j=1;
    k=1;
    while j ≤ i do
        res=res+i*j;
        k=k+2;
        j=j+k;
    endw
    i=i+1;
endw

```

P_i →

Phạm Thế Bảo

- Vòng lặp while ngoài cùng: số lần lặp tường minh: n lần .
- Vòng lặp while bên trong: số lần lặp không xác định. Cách giải quyết:
 - Gọi α_i là số lần lặp của vòng while này (quy ước tính độc lập).
 - Việc xác định số phép gán, so sánh trong đoạn mã sẽ quy về tính $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ theo α_i
- Ta thấy j là tổng với các số là 1, 3, 5, ...
Nên là các số chính phương.
 - $\Rightarrow \alpha_i$ là số phần tử của $\{r/ r \geq 1 \ \& \ r^2 \leq i\}$.
 - $\Rightarrow \alpha_i = \lfloor \sqrt{i} \rfloor$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Ví dụ 5: Xét đoạn mã tương tự ví dụ 4.

```

i=1;
res=0;
s=0; // số thực
while i ≤ n do
    j=1;
    s=s+1/i;
    while j ≤ s do
        res=res+i*j;
        j=j+1;
    endw
    i=i+1;
endw

```

$P_i \rightarrow$

Lúc này $\alpha_i = \lfloor H_i \rfloor$

với $H_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i}$, H_i là số điều hòa

Phạm Thế Bảo

- Ví dụ 6: xét đoạn mã

Đoạn chương trình dừng khi nào?

```
i=0;
A[n]=x;
while A[i] ≠ x do
    i=i+1;
endw
```

Đoạn chương trình dừng trong các trường hợp sau:

- $i=n \Leftrightarrow x \neq A[i], \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- $i < n \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sao cho $x = A[i_0]$ và $x \neq A[j], \forall j < i_0$

Vậy số lần lặp không xác định tường minh,
nhưng lại tường minh cho một mảng dữ liệu cụ thể

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

3. Vấn đề rẽ nhánh:

– Rẽ nhánh tất định:

- Cân bằng cách nhánh
- Độ lệch các nhánh rẽ tính được
- Không phụ thuộc dữ liệu nhập

– Rẽ nhánh phụ thuộc phân bố dữ liệu:

- Phải tính toán theo xác suất phân bố của dữ liệu

Phạm Thế Bảo

- Ví dụ 7: Tìm số lớn nhất trong mảng một chiều.

```

i=1;
max=A[0];
A[n]=x;
while i<n do
    if max<A[i] then
        max=A[i];
    endif
    i=i+1;
endw

```

Biến α_n là biến ngẫu nhiên lấy các giá trị
Rời rạc $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Ví dụ 8:

```

s=0;
i=1;
while i≤n do
    j=1;
    while j≤i2 do
        s=s+i*j;
        j=j+1;
    endw
    i=i+1;
endw

```

Phạm Thế Bảo


```

s=0;
i=1;
while i≤n do
    j=1;
    while j≤i² do
        s=s+i*j;
        j=j+1;
    endw
    i=i+1;
endw

```

P_i →

$$\begin{aligned} \text{số phép so sánh} &= n+1 + \sum_{i=1}^n P(i) \Big|_{\text{so sánh}} = n+1 + \sum_{i=1}^n (i^2 + 1) \\ &= 2n+1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim n^3 \end{aligned}$$

$$\text{số phép gán} = 2n+2 + \sum_{i=1}^n P(i) \Big|_{\text{so sánh}} = ?$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

• Ví dụ 9:

```

count=0;
i=n;
while i>0 do
    count=count + i%2;
    i=i/2;
endw

```

So sánh = $\alpha + 1$
Gán = $2 + 2\alpha$

cuu duong than cong. com

→ Cần ước lượng α

$$\text{Có } \alpha(n) \approx \log_2 n$$

Phạm Thế Bảo

Ví dụ: có $n=25 \rightarrow$ số lần lặp?

= số chữ số trong biểu diễn nhị phân của n .

$$\begin{array}{r}
 25 \mid 2 \\
 1 \mid 12 \mid 2 \\
 \quad 0 \mid 6 \mid 2 \\
 \quad \quad 0 \mid 3 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad 1 \mid 1 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \mid 0
 \end{array}$$

$$n=25=1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$$

$$n=b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0 \text{ với } b_i = \{0,1\}$$

$$\longrightarrow \alpha = k+1$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

• Ví dụ 10:

```

sum=0;
i=1;
while i≤n do
    j=i;
    while j>0 do
        sum=sum + 1;
        j=j/2;
    endw
    i=i + 1;
endw

```

P_i lặp n lần \rightarrow [while j>0 do ... endw]

$$\text{Số sánh} = n+1 + \sum_{i=1}^n P_i = n+1 + \sum_{i=1}^n (\alpha(i)+1) = 2n+1 + \sum_{i=1}^n \alpha(i)$$

Gán = ? **Bài tập 4**

Xác định $\alpha(i)$? **Bài tập 3**

Phạm Thế Bảo

• Ví dụ 11:

```

max=A[0];
i=1;
count=0;
while i≤n do
    if (max<A[i])
        max =A[i];
    else
        count=count +1;
    endif
    i = i+1;
endw

```

P_i lặp? →

Gán = ?
So sánh = ? → Bài tập 5

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

• Ví dụ 12:

So sánh = ?
Gán = ?

```

i=1;
c_d=0;
c_a=0;
c_z=0;
while i≤n do
    if (A[i]>0)
        c_d=c_d+1;
    else
        if(A[i]<0)
            c_a=c_a+1;
        else
            c_z=c_z+1;
        endif
    endif
    i = i+1;
endw

```

P_i lặp? →

Phạm Thế Bảo

Nếu viết lại P_i ta có:

```

if(A[i]>0)
    c_d=c_d+1;
else
    if(A[i]<0)
        c_a=c_a+1;
    endif
    if(A[i]==0)
        c_z=c_z+1;
    endif
endif

```

Gán =?
So sánh =?

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Nếu viết lại P_i ta có:

```

if(A[i]>0)
    c_d=c_d+1;
endif
if(A[i]<0)
    c_a=c_a+1;
endif
if(A[i]==0)
    c_z=c_z+1;
endif

```

Gán =?
So sánh =?

3 so sánh
1 gán

Phạm Thế Bảo

• Ví dụ 13:

```

found = false;
i = 1;
sum = 0;
while i ≤ n do
    if ((!found) && (A[i] == X))
        idx_f = i;
        found = true;
    endif
    sum = sum + A[i];
    i = i + 1;
endw

```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Khi $x \in \{A[i] \mid i=1..n\}$
 - Gán $\quad \quad \quad = 5 + 2n$
 - So sánh $\quad \quad = 2n + \alpha + 1$
- Khi $x \notin \{A[i] \mid i=1..n\}$
 - Gán $\quad \quad \quad = 3 + 2n$
 - So sánh $\quad \quad = 3n + 1$

Phạm Thế Bảo

• Ví dụ 14:

```

i =1;
count=0;
while i≤n do
    x=2m-i;
    y=i-m;
    if (x>0)
        if(y>0)
            count=count+1;
        endif
    endif
    i=i+1;
endw

```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

• Nhận xét:

- ☐ $x = x(i) = 2m - i$
- ☐ $y = y(i) = i - m$
- ☐ Số lần $\alpha = |\{i / x(i) > 0\}|$
Số lần $\beta = |\{i / x(i) > 0 \text{ và } y(i) > 0\}|$

i	1				
---	---	--	--	--	--

Phạm Thế Bảo

- Nếu $n \geq 2m$
 - $\alpha = 2m-1$
 - $\beta = m-1$
 - Gán $= 2+3n+ \beta = 3n+m+1 \leq 3n + \frac{n}{2}+1 \approx O(n)$
 - So sánh $= 2n+ \alpha+1=2n+2m \leq 2n+n \approx O(n)$
- Nếu $n < 2m$
 - $\alpha = n$
 - $\beta = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \leq m \\ n-m & \text{nếu } m < n < 2m \end{cases}$
 - So sánh $= 2n+ 1+ \alpha = 3n \approx O(n)$
 - Gán $= 3n+ \beta+2 = \begin{cases} 3n+2 & \text{nếu } n \leq m \\ 4n+2-m & \text{nếu } m < n < 2m \end{cases} \approx O(n)$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Ví dụ 15: xét đoạn mã.

```

i=1;
count=0;
s=0;
while i ≤ n do
    x=n-2*i;
    y=n-3*i;
    if x>0 then
        j=1;
        while j ≤ x do
            if y>0 then
                count=count+1;
                s=s+i*j;
            endif
            j=j+1;
        endw
    endif
    i=i+1;
endw

```

Phạm Thế Bảo

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Đánh giá bằng thực nghiệm

- Chèn thêm lệnh đếm trong đoạn mã
- Phát sinh dữ liệu để thực thi đoạn mã
- Ghi xuống file (dạng văn bản)
- Dùng Excel vẽ đồ thị tính phương sai, độ lệch chuẩn → ước lượng độ phức tạp.

Phạm Thế Bảo

Ví dụ: Thuật toán tìm giá trị lớn nhất

```
max = A[0];
i=1;
while i<n do
    if(max<A[i])
        max=A[i];
    endif
endw
```

1. Cài đặt hàm

```
int findMax(int n, int a[]){
    ...
}
```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

2. Cài đặt đếm

```
int evaluateFindMax(int n, int a[], long &gan, long &sosanh){
    int max=a[0];
    int i=1;
    gan=2;
    sosanh=0;
    while(i<n){
        sosanh+=2;
        if(max<a[i]){
            max=a[i];
            gan++;
        }
        i++;
        gan++;
    }
    sosanh++;
    return max;
}
```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

3. Phát sinh dữ liệu

```
void generateData(int n, int *a){
    // dùng hàm random hay rand hoặc kết hợp nhiều // hàm, hay tự
    // viết (sách)
}
```

4. Chạy thử nghiệm và ghi dữ liệu

```
#define ấ MAX 50
#define ấ LOOP 200
int a[ấ MAX];
void runData(char *name){
    FILE *fp = fopen(name,"wt");
    if(fp==ấ ULL){
        printf("Can not open to write file!!!");
        return;
    }
}
```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

```
int n=1;
while(n<ấ LOOP){
    long gan=0;
    long sosanh=0;
    generateData(ấ MAX,a);
    evaluteFindMax(ấ MAX,a,gan,sosanh);
    fprintf(fp,"%d\t%e\t%e\n",n,gan,sosanh);
    n++;
}
fclose(fp);
}
```

Hay viết lại đoạn while theo cách tính trung bình cho NLOOP lần chạy cho mảng có số phần tử thay đổi từ 1 đến NMAX.

Phạm Thế Bảo

```

while(n<=MAX){
    long gan, tgan=0;
    long sosanh, tsosanh=0;
    for (int i=0; i<=LOOP; i++){
        gan=sosanh=0;
        generateData(MAX,a);
        evaluteFindMax(MAX,a,gan,sosanh);
        tgan+=gan;
        tsosanh+=sosanh;
    }
    double tbgan=(double)tgan/LOOP;
    double tbsosanh=(double)tsosanh/LOOP;
    fprintf(fp,"%d \t %f \t %f\n",n,tbgan,tbsosanh);
    n++;
}

```

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Chú ý

- Phân biệt rõ ràng: phép gán, so sánh khóa, sao chép mẫu tin, so sánh
 - Ví dụ khi so sánh khóa là chuỗi k ký tự thì?
 - Sao chép một record sinh viên?
 - Phép hoán đổi 2 phần tử swap(a[i],a[j]):
 - Chỉ là 2 số nguyên → 3 phép gán
 - 2 phần tử bất kỳ?

Phạm Thế Bảo