

HÀM SINH VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Thế Bảo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM

cuu duong than cong. com

Giới thiệu

- Bài toán: có 12 trái táo chia cho 03 bạn A, B, C. Theo qui định: A lấy ít nhất 04 trái, B và C lấy ít nhất 02 trái, C không lấy quá 05 trái. Vậy, có bao nhiêu cách chia?

Giải: gọi a, b, c là số táo của các bạn A, B, C được chia. Ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a \geq 4 \\ b \geq 2 \\ 5 \geq c \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Số cách chia táo chính là số nghiệm của phương trình (*)

Phạm Thế Bảo

- Hay gọi $G = \{a+b+c=12 / a \geq 4, b \geq 2, 5 \geq c \geq 2\}$. Thì $|G|$ = số lời giải. Ta đặt $H = \{x^{a+b+c} / a, b, c \in \mathbb{N}, x^{a+b+c} = x^{12}, a \geq 4, b \geq 2, 5 \geq c \geq 2\}$ thì $|G| = |H| \rightarrow$ cần tìm $|H| \rightarrow$ chính là hệ số của x^{12} trong phương trình

$$f(x) = (x^4 + x^5 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + \dots + x^5)$$

$$= \sum_{\substack{4 \leq a < \infty \\ 2 \leq b < \infty \\ 2 \leq c \leq 5}} x^{a+b+c} = \sum_{k=8} a_k x^k$$

Khi $k=12$ thì a_k chính là giá trị cần tìm \rightarrow mục tiêu của bài toán là tìm khai triển của $f(x)$.

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Chuỗi lũy thừa

- Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ với $a_n \in \mathbb{C}$ nếu

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ hội tụ về } G(z) \text{ thì chuỗi hội tụ và}$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

- Cho dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Hàm sinh của dãy này là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Phạm Thế Bảo

- Quay lại bài toán chia tảo. Thay vì $4 \leq a \leq \infty$ và $2 \leq b \leq \infty$ ta cũng có thể viết $4 \leq a \leq 8$ và $2 \leq b \leq 6$.

Thì:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \left(\sum_{a=4}^8 z^a \right) \left(\sum_{b=2}^6 z^b \right) \left(\sum_{c=2}^5 z^c \right) \\
 &= z^4 (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) z^2 (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) z^2 (1 + z + z^2 + z^3) \\
 &= z^8 (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)^2 (1 + z + z^2 + z^3) \\
 &= z^8 \left(\frac{1 - z^5}{1 - z} \right)^2 \left(\frac{1 - z^4}{1 - z} \right) = z^8 (1 - z^5)^2 (1 - z^4) \frac{1}{(1 - z)^3} \\
 \Rightarrow \text{cần xác định hệ số của } z^4 \text{ trong } (1 - z^5)^2 (1 - z^4) \frac{1}{(1 - z)^3}
 \end{aligned}$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Theo chuỗi lũy thừa ta có:

$$\frac{1}{(1 - z)^3} = \left(1 + \binom{3}{1} z + \binom{4}{2} z^2 + \dots + \binom{k+2}{k} z^k + \dots \right)$$

Nên ta có hệ số của z^4 trong chuỗi này là

$$= \binom{6}{4} - 1 = \frac{6!}{4!2!} - 1 = \frac{5 \cdot 6}{2} - 1 = 14$$

Vậy có 14 cách giải bài toán chia tảo.

Phạm Thế Bảo

Tương tự cho bài toán:

Xét tập hợp $\{1, 2, \dots, 15\}$ có bao nhiêu tập con có 04 phần tử mà không chứa 02 số liên tiếp nhau. Vị trí các phần tử trong một tập con không quan trọng, ví dụ: $\{4, 7, 9, 12\}$ và $\{9, 12, 4, 7\}$ là như nhau.

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

Dùng hàm sinh giải hệ thức truy hồi

- Trong quá trình phân tích thuật toán, chúng ta tìm được độ phức tạp của thuật toán là công thức truy hồi. Ví dụ:

$$x_0 = 0$$

$$x_n = \frac{n+2}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad \text{hay} \quad \begin{matrix} a_0 = 0 & a_1 = 5 \\ 6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \end{matrix} \quad \forall n \geq 2$$

- Chúng ta sẽ dùng hàm sinh để tìm nghiệm (độ phức tạp của thuật toán)

Phạm Thế Bảo

Hàm sinh của dãy xác suất

- Xét biến A có thể lấy các giá trị $0, 1, 2, \dots$. Với xác suất là p_0, p_1, p_2, \dots . Với $p_i \geq 0$ và $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ thì hàm sinh của dãy xác suất (phân bố) là

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

- Ví dụ xét thuật toán tìm số lớn nhất trong mảng (ví dụ 3 – phần đánh giá bằng công cụ toán học cơ bản).

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Có thể thấy độ phức tạp là $O(n)$. Vậy số lần thực hiện α :

- Tối thiểu: 0
- Tối đa: $n-1$
- Trung bình: ?

Nếu xét $n=3$, dữ liệu là một dãy số đôi một phân biệt $\{a[0], a[1], a[0]\} \rightarrow$ có 6 tổ hợp thứ tự với xác suất ngang nhau là $1/6$

Phạm Thế Bảo

Vị trí	Số lần gán	Trung bình
$A[0] < A[1] < A[2]$	2	=5/6
$A[0] < A[2] < A[1]$	1	
$A[1] < A[0] < A[2]$	1	
$A[1] < A[2] < A[0]$	0	
$A[2] < A[0] < A[1]$	1	
$A[2] < A[1] < A[0]$	0	

Dùng hàm sinh tính giá trị trung bình của α .

Giả sử mỗi n , gọi A_n là số lần thực hiện α thì $0 \leq A_n \leq n-1$.

Với mỗi k gọi $p_{n,k}$ là xác suất để $A_k = k$.

Có $p_{n,k} \geq 0$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ và

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} = 1$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Hàm sinh $G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} z^k$
- Gọi B là biến cố a_n lớn nhất trong $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

→ $P(B) = \frac{1}{n}$ (xác suất tại bước thứ n có 1 phép gán)

và $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{n-1}{n}$ (xác suất tại bước thứ n không có phép gán)

có $P(A_n) = P(B) \cdot P(A_n / B) + P(\bar{B}) \cdot P(A_n / \bar{B})$

và $P(A_n / B) = p_{n-1, k-1}$, $P(A_n / \bar{B}) = p_{n-1, k}$

$$\Rightarrow p_{n,k} = \frac{1}{n} p_{n-1, k-1} + \frac{n-1}{n} p_{n-1, k}$$

Phạm Thế Bảo

- Tại bước thứ n có 01 phép gán thì $n-1$ bước trước đó có $k-1$ phép gán.
- Tại bước thứ n không có phép gán thì $n-1$ bước trước đó có k phép gán.

$$G_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n-1,k-1} z^k + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n-1,k} z^k$$

$$= \frac{z+n-1}{n} G_{n-1}(z)$$

truy hồi ...



$$= \left(\frac{z+n-1}{n} \right) \left(\frac{z+n-2}{n-1} \right) \dots \left(\frac{z+1}{2} \right)$$

hạng tử thứ k :

$$g_k(z) = \frac{z+k-1}{k} = \frac{z}{k} + \frac{k-1}{k} \text{ mà ta có } \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} = 1$$

nên $\frac{z+k-1}{k}$ là hàm sinh của dãy xác suất

$$\Rightarrow \text{mean}(G_n) = \sum_{k=2}^n \text{mean}(g_k) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

Phạm Thế Bảo

cuu duong than cong. com

- Quay lại bài toán khi $n=3$ ta có

$$\text{mean}(G_3) = 1/2 + 1/3 = 5/6$$

cuu duong than cong. com

Phạm Thế Bảo