HOÁN VỊ VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Thế Bảo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM

Vài khái niệm cơ bản

- S tập hợp có n phần tử. Một hoán vị của S là một song ánh δ: S→S

Ví dụ: S ={1, 2, 3} δ:

S	→	S
1	→	3
2	→	1
3	→	2

Ký hiệu $\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Nếu S = {1, 2, 3, …, n} và dòng trên luôn được hiểu sắp là 1 2 3 … n thì ta chỉ viết dòng dưới.

Ví dụ: $\delta = (3\ \ 1\ \ 2)$

- Nếu |S| = n thì có bao nhiêu hóan vị (cách sắp xếp chúng) của S?

  Đó là n!, với 0!=1, và n!=n*(n-1)!

- Hàm gia thừa này tăng rất nhanh 10!=3628800 (≈3.6 triệu)

- Một cách tính gia thừa khác, đó là công thức Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{với } e \approx 2.71828 \text{ khi n đủ lớn}$$

- Vậy $O(n!) = O(n^n)$ và $O(\log(n!)) = O(n\log(n))$

- Tính n! theo phân tích thừa số nguyên tố:
  – Nếu xét p là số nguyên tố thì $\mu(p) = \sum_{i=1} \left[\frac{n}{p^i}\right]$ là lũy thừa của p trong n!
  – Ví dụ: n=5 → p= 2, 3, 5

$$\mu(2) = \left[\frac{5}{2}\right] + \left[\frac{5}{2^2}\right] = 3$$

Vậy $n! = 2^3 . 3^1 . 5^1$

$$\mu(3) = \left[\frac{5}{3}\right] = 1$$

$$\mu(2) = \left[\frac{5}{5}\right] = 1$$

Bài tập 1: Viết chương trình tính n! theo phương pháp này

Nghịch thế

a. Định nghĩa: cho a_1, a_2, …, a_n là một hoán vị của [n]. Nếu i<j và $a_i>a_j$ thì cặp (a_i, a_j) là một nghịch thế của hóan vị đang xét.

Ví dụ: δ = (3 1 4 2) có các nghịch thế là:

(3,1); (3, 2); (4, 2)

Vậy một hoán vị có n phần tử thì có bao nhiêu nghịch thế (vì một số thuật toán có thời gian thực hiện phụ thuộc vào số nghịch thế).

- Ví dụ: cho n phần tử phân biệt a[1], a[2], …, a[n]. Thuật toán tạo chỉ mục sao cho a[i]=b[Index[i]] với b là một hoán vị của n và ta có b[1] < b[2] < … < b[n]. Index[i] = số phần tử của a nhỏ hơn a[i+1]

```
Index[i]=1 ∀i=1..n;
i=1;
while (i≤n-1) do
        j=i+1;
        t=n-i;
        while (j ≤n) do
                if (a[i]<a[j]) then
                        Index[j]=Index[j]+1;
                        t=t-1;
                endif
                Index[i]=Index[i]+t;
                j=j+1;
        endw
        i=i+1;
endw
```

số cặp ở vị trí thuận $= \binom{n}{2} -$ **số nghịch thế**

$$\text{số nghịch thế} = \begin{cases} \text{tối thiểu} & =0 \\ \text{tối đa} & = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ \text{trung bình} & = \dfrac{n(n-1)}{4} \end{cases}$$

do số thuận thế và nghịch thế đối xứng nhau

ví dụ: n=3

			Số nghịch thế
1	2	3	0
1	3	1	1
2	1	3	1
2	3	1	2
3	1	2	2
3	2	1	9
Tổng			9

$$\textbf{Trung bình} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2}$$

b. Bảng nghịch thế:

Cho δ là một hoán vị của $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ với mỗi $j \in S$ ta quan tâm đến $b_j(\delta)$ = số phần tử bên trái j trong δ mà lớn hơn j.

Ta gọi $b_1 b_2 \ldots b_n$ là bảng nghịch thế của hóan vị δ.

Ví dụ 1: $\delta = (3\ \ 4\ \ 1\ \ 5\ \ 2)$

Bảng nghịch thế = 2 3 0 0 0

Ví dụ 2: $\delta = (5\ \ 9\ \ 1\ \ 8\ \ 2\ \ 6\ \ 4\ \ 7\ \ 3)$

Bảng nghịch thế = 2 3 6 4 0 2 2 1 0

- Mệnh đề:
  i. Nếu $b_1 b_2 \ldots b_n$ là bảng nghịch thế của hóan vị δ của $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ thì $0 \leq b_i \leq n-i$. Đặc biệt $b_n=0$.
  ii. $\forall n \in N$, cho $b_1 b_2 \ldots b_n$ là dãy thỏa điều kiện $0 \leq b_i \leq n-i$, $\forall i=1..n$ thì luôn có duy nhất một hoán vị δ sao cho bảng nghịch thế của δ là $b_1 b_2 \ldots b_n$. Hay luôn tồn tại song ánh giữa hoán vị và bảng nghịch thế.

Ví dụ: có b = 2 3 0 0 0, hãy viết $\delta(n)$

có 5 phần tử? Theo mệnh đề ta sẽ viết ngược từ phần tử 5 như sau:

do $b_4=0$ → 4 5 (4 phải nằm trước 5)

do $b_3=0$ → 3 4 5 (3 phải nằm trước 4 và 5)

do $b_2=3$ →

do $b_1=2$ →

c. Hoán vị ngược: δ^{-1}, cách tính

có $\delta = (2\ \ 3\ \ 1)$ hay

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\qquad\qquad)$$

Bài tập 2: Viết chương trình đưa vào một hoán vị rồi tính bảng nghịch thế và hoán vị ngược

- Mệnh đề:

  Số nghịch thế của hoán vị δ bằng số nghịch thế của hoán vị ngược δ^{-1}.

d. Tính số nghịch thế trung bình:

Gọi $I_n(k)$ là số hoán vị của n phần tử có k nghịch thế. Nếu $b_1b_2\ldots b_n$ là bảng nghịch thế của hoán vị δ thì $\sum_{i=1}^{n} b_i =$ số nghịch thế của δ

$\Rightarrow I_n(k)$ **là số nghiệm của hệ**

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} b_i = k \\ 0 \le b_i \le n-i \end{cases}$$

và cũng là hệ số của x^k **trong đa thức**

$$\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\left(1+x+\ldots+x^{n-2}\right)\ldots(1+x)1 = G_n(x)$$

- Gọi $p_{n,k}$ là xác suất để hoán vị δ có k nghịch thế thì $p_{n,k} = \frac{I_n(k)}{n!}$, hàm sinh của dãy $\{p_{n,k}\}_{k=0}^{\infty}$ là:

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_n(k)}{n!} z^k$$

$$= \frac{G_n(z)}{n!} = \left(\frac{1+z+...+z^{n-1}}{n}\right)\left(\frac{1+z+...+z^{n-2}}{n-1}\right)...\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

đặt $h_i(z) = \frac{1+z+...+z^{i-1}}{i} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{i} z^k$ là hàm sinh của dãy

$\underbrace{\frac{1}{i}, \frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}}_{\text{i lần}}, 0, 0, ..., 0 \Rightarrow$ đây là dãy xác suất

$$\Rightarrow g'_n(1) = \sum_{i=1}^{n} h'_i(1) \text{ mà } h'_i(z) = \frac{1+2z+...+(i-1)z^{i-2}}{i}$$

$$\Rightarrow h'_i(1) = \frac{1+2+...+(i-1)}{i} = \frac{i(i-1)}{2i} = \frac{i-1}{2}$$

$$\Rightarrow g'_n(1) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} i = \frac{n(n-1)}{4}$$

- Mệnh đề:

  Số trung bình của các nghịch thế trong một hoán vị n phần tử là $\frac{n(n-1)}{4}$

  Tình cờ $= \frac{\min+\max}{2}$

Các phần tử cực đại bên phải

a. Định nghĩa: cho hoán vị δ của S={1, 2, ..., n}. Phần tử j∈S được gọi là phần tử cực đại bên phải nếu nó lớn hơn tất cả các phần tử nằm bên phải của nó.

Ví dụ: δ = 5 7 3 2 6 1 4

có 7, 6, 4 là phần tử cực đại bên phải

- Mệnh đề: cho hoán vị δ của S={1, 2, ..., n} nếu j∈S là cực đại bên phải $\Longleftrightarrow$ b_j=n-j

b. Khái niệm đối ngẫu:
- Cực tiểu so với bên trái
- Cực tiểu so với bên phải
- Cực đại so với bên trái

Ví dụ: độ phức tạp sẽ phụ thuộc "số phần tử cực đại so với bên phải".

```
max=a[n];
i=n-1;
while (i≥1) do
    if (max<a[i]) then
        max=a[i];        → Số cực đại so với bên phải
    endif
    i=i-1;
endw
```


Số phần tử cựa đại bên phải của một hoán vị:

ít nhất =1;
nhiều nhất =n;
trung bình =?

Bài tập 3: Viết chương trình xuất các phần tử cực đại bên phải của một hoán vị

- Mệnh đề:

  Gọi M là tổng số các phần tử cực đại bên phải của một hoán vị δ thì giá trị trung bình của M là $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

- Tính chất của H_n

i) $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$

2i) $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \varepsilon$

với $0 < \varepsilon < \frac{1}{252n^6}$ và $\gamma \approx 0.5772156649$ (hằng số Euler)

3i) H(n)=O(log(n))