

Tổng hợp kiến thức QHTT

Lý thuyết:

1. Các định nghĩa khác nhau của nghiệm cơ sở / trang 50:

Trừ z ra, các biến nằm ở vế trái các phương trình (tức là biến “phụ thuộc”) ở mỗi bước lặp gọi là *biến cơ sở* ở bước đó (basic variable). Các biến ở vế phải, tức các biến “độc lập” được gọi là *biến không cơ sở* (nonbasic variable). Nghiệm nhận được khi cho các biến không cơ sở giá trị 0 được gọi là *nghiệm cơ sở* (basic solution). Vậy mỗi từ vựng xác định một nghiệm cơ sở tương ứng.

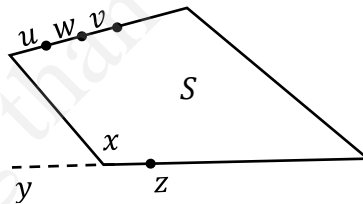
2. Định nghĩa nghiệm cơ sở chấp nhận được / trang 93:

Xét tập lồi đa diện P trong \mathbb{R}^n , xác định bởi các đẳng thức và bất đẳng thức (tuyến tính):

- (a) $x^* \in \mathbb{R}^n$ là *nghiệm cơ sở* (basic solution) của P hoặc tương đương là của hệ đẳng thức tuyến tính và bất đẳng thức tuyến tính, nếu nó thỏa mọi ràng buộc đẳng thức và trong số mọi ràng buộc được thỏa chặt, tức là với dấu $=$, có n ràng buộc độc lập tuyến tính.
- (b) Nghiệm cơ sở thỏa mọi ràng buộc được gọi là *nghiệm cơ sở chấp nhận được* (basic feasible solution)

3. Định nghĩa điểm cực biên của nghiệm chấp nhận được / trang 92:

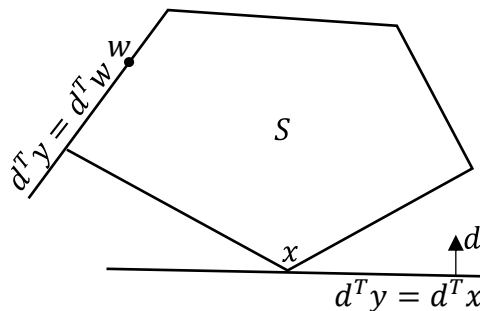
- (a) Điểm x của tập lồi S được gọi là *điểm cực biên* (extreme point) của S nếu x không thể là tổ hợp lồi của hai điểm của S khác x , tức là không có $y, z \in S$, khác x và $\gamma \in [0, 1]$ để $x = (1 - \gamma)y + \gamma z$.



x là điểm cực biên

w không là điểm cực biên

- (b) Điểm x của tập lồi S được gọi là *đỉnh* (vertex) của S , nếu có một siêu phẳng sao cho S nằm hoàn toàn ở một phía của nó và siêu phẳng cắt S chỉ ở điểm x này, tức là $\exists d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ sao cho $d^T x < d^T y, \forall y \in S, y \neq x$.



x là đỉnh

w không phải là đỉnh

4. Định lý phát biểu về sự tương đương của đỉnh, điểm cực biên và nghiệm cơ sở chấp nhận được / trang 94:

Giả sử P là một tập lồi đa diện và $x^* \in P$. Khi đó ta có ba khẳng định tương đương

- (a) x^* là đỉnh;
- (b) x^* là điểm cực biên;

(c) x^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được.

5. Phát biểu định lý sự tương đương đỉnh, tập không chứa đường thẳng và vector có n vector độc lập tuyến tính / trang 98:

Giả sử tập lồi đa diện $P = \{x : a_i^T x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ khác trống. Khi đó các kết luận sau là tương đương:

(a) P có đỉnh;

(b) P không chứa một đường thẳng nào;

(c) trong các vector a_1, \dots, a_m có n vector độc lập tuyến tính.

6. Xây dựng bài toán đối ngẫu:

7. Phát biểu và chứng minh bài toán đối ngẫu

8. Phát biểu và chứng minh bài toán đối ngẫu – gốc

9. Phát biểu và chứng minh bài toán đối ngẫu mạnh

Thực hành:

$$\begin{aligned} & \min/\max \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ \text{RB ĐT/BĐT} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ & \text{RB dấu} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ \vdots \\ x_n \end{cases} \\ & \rightarrow \min/\max J_x \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Phương pháp hình học:

Bước 1: Vẽ miền chấp nhận được.

- Vẽ từng phương trình ràng buộc đẳng thức / bất đẳng thức.
- Chọn miền.

Bước 2: Tìm miền chấp nhận được.

Bước 3: Vẽ đường hàm mục tiêu.

[Vẽ phương
Xác định hướng trượt (min / max)

Bước 4: Kiểm tra / xác định

\Rightarrow 4 Trường hợp

- Nghiệm duy nhất
- Vô số nghiệm
- Vô nghiệm
- Không giới nội

Ví dụ / 23: Nghiệm duy nhất

$$\begin{array}{rcllcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
& x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
- & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& & & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Nghiệm tối ưu:

$$x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow z = -\frac{38}{3}$$

Bài 1.17 / 44 b: Miền chấp nhận được rỗng \rightarrow bài toán vô nghiệm

$$\begin{array}{rcllcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
- & x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
- & 3x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\
& 2x_1 & & & \leq & 1 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Bài 2.15 / 66: Không giới nội

$$\begin{array}{rcllcl}
\max & x_1 & - & x_2 & & \\
- & 2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
- & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0 \\
& & & & & \max = +\infty
\end{array}$$

Bài chế:

$$\begin{array}{rcllcl}
\min & 5x_1 & - & 10x_2 & & \\
- & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& 3x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 4 \\
- & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$\min 5x_1 - 10x_2 = -20$ khi và chỉ khi $[x_1, x_2] \in [A, B]$

2. Phương pháp đơn hình gốc

a. Đưa về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned} A &= a_{ij} \\ b &= b_i \quad \forall b_i > 0 \\ c &= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \exists c_i < 0 \end{aligned}$$

b. Định nghĩa từ vựng

$$\begin{array}{rcl} z & = & \overbrace{c_1 x_1 \cdots + c_n x_n}^{\text{biến không cơ sở}} \\ w_1 & = & b_1 - a_{11} x_1 \cdots a_{1n} x_n \\ \vdots & & \\ \underbrace{w_m}_{\text{biến cơ sở}} & = & b_m - a_{m1} x_1 \cdots a_{mn} x_n \end{array}$$

c. Biến vào (cơ sở) ra (không cơ sở) của 1 từ vựng.

d. Cách xây dựng biến vào ra:

Biến vào (cơ sở): xem $c_i \quad i = \overline{1, n}$

chọn c_i âm nhất

→ biến vào là x_{i_0}

Biến ra: Xét cột ứng với biến x_{i_0}

Chỉ lấy các dòng có dấu " - "

Lập tỉ lệ $\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$ ở các dòng có dấu trừ

Chọn min $\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$

Ví dụ 1:

$$\begin{array}{rclclcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ - & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Đơn hình (từ vựng):

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & - & 3x_1 \downarrow & - & 2x_2 \\ w_1 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ \leftarrow w_2 & = & 8 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ w_4 & = & 2 & & & - & x_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
z &= -12 - \frac{1}{2}x_2 \downarrow + \frac{3}{2}w_2 \\
\leftarrow w_1 &= 2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}w_2 \\
x_2 &= 4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}w_2 \\
w_3 &= 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}w_2 \\
w_4 &= 2 - x_2 \\
z &= -\frac{38}{3} + \frac{1}{3}w_1 + \frac{4}{3}w_2 \\
x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 \\
x_2 &= \frac{10}{3} + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2 \\
w_3 &= 3 + w_1 - w_2 \\
w_4 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2
\end{aligned}$$

Đơn hình (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	$-3 \downarrow$	-2	0	0	0	0	0
w_1	1	2	1	0	0	0	6
$\leftarrow w_2$	2	1	0	1	0	0	8
w_3	-1	1	0	0	1	0	1
w_4	0	1	0	0	0	1	2
$-z$	0	$-\frac{1}{2} \downarrow$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	12
$\leftarrow w_1$	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
w_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
w_4	0	1	0	0	0	1	2
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
w_3	0	0	-1	1	1	0	3
w_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

Vô chiều (từ vưng):

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & - & 3x_1 & - & 2x_2 \downarrow \\ w_1 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 8 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ \leftarrow w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\ w_4 & = & 2 & & & - & x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -2 & - & 5x_1 \downarrow & + & 2w_3 \\ w_1 & = & 4 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 7 & - & 3x_1 & + & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \\ \leftarrow w_4 & = & 1 & - & x_1 & + & w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -7 & - & 3w_3 \downarrow & + & 5w_4 \\ \leftarrow w_1 & = & 1 & - & w_3 & + & 3w_4 \\ w_2 & = & 4 & - & 2w_3 & + & 3w_4 \\ x_2 & = & 2 & & & + & w_4 \\ x_1 & = & 1 & + & w_3 & - & w_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -10 & + & 3w_1 & - & 4w_4 \downarrow \\ w_3 & = & 1 & - & 2w_1 & + & 3w_4 \\ \leftarrow w_2 & = & 2 & + & 2w_1 & - & 3w_4 \\ x_2 & = & 2 & & & - & w_4 \\ x_1 & = & 2 & + & w_1 & + & 2w_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -\frac{38}{3} & + & \frac{1}{3}w_1 & + & \frac{4}{3}w_2 \\ w_3 & = & 3 & + & w_1 & - & w_2 \\ w_4 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{2}{3}w_1 & - & \frac{1}{3}w_2 \\ x_2 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{2}{3}w_1 & - & \frac{1}{3}w_2 \\ x_1 & = & \frac{10}{3} & + & \frac{1}{3}w_1 & - & \frac{2}{3}w_2 \end{array}$$

Vô chiêu (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	-3	$-2 \downarrow$	0	0	0	0	0
w_1	1	2	1	0	0	0	6
w_2	2	1	0	1	0	0	8
$\leftarrow w_3$	-1	1	0	0	1	0	1
w_4	0	1	0	0	0	1	2
$-z$	$-5 \downarrow$	0	0	0	2	0	2
w_1	3	0	1	0	-2	0	4
w_2	3	0	0	1	-1	0	7
x_2	-1	1	0	0	1	0	1
$\leftarrow w_4$	1	0	0	0	-1	1	1
$-z$	0	0	0	0	$-3 \downarrow$	5	7
$\leftarrow w_1$	0	0	1	0	1	-3	1
w_2	1	0	0	1	2	-3	4
x_2	0	1	0	0	0	1	2
x_1	0	0	0	0	-1	1	1
$-z$	0	0	3	0	0	$-4 \downarrow$	10
w_3	0	0	1	0	1	-3	1
$\leftarrow w_2$	0	0	-2	1	0	3	2
x_2	0	1	0	0	0	1	2
x_1	1	0	1	0	0	-2	2
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
w_3	0	0	-1	1	1	0	3
w_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$

Nghiệm tối ưu:

$$x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow z = \frac{38}{3}$$

3. Phương pháp Bland:

Xác định biến vào sao cho:

- Xác định các biến vào có c_i âm

- Lấy biến vào là biến có chỉ số nhỏ nhất

Xác định biến ra:

- Tính các chỉ số $\frac{b_i}{a_{ii_0}}$, (ứng với cột xoay i_0) (chỉ lấy dòng có dấu “-”)
- Lấy min $\left\{ \frac{b_i}{a_{ii_0}} \right\}$
 - Nếu có 1 giá trị ứng với min \Rightarrow chọn dòng xoay
 - Nếu có ≥ 2 giá trị ứng với min \Rightarrow chọn dòng

Lưu ý:

- TH xảy ra rất hiếm
- Loop \Leftrightarrow từ vựng $\begin{cases} \geq 6 \text{ biến} \\ \geq 3 \text{ RB} \end{cases}$

Ví dụ:

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \min & - & 10x_1 & + & 57x_2 & + & 9x_3 & + & 24x_4 & & \\
 & & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{10}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & x_1 & & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & x_3 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Bland (từ vựng):

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 z & = & - & 10x_1 \downarrow & + & 57x_2 & + & 9x_3 & + & 24x_4 \\
 \leftarrow w_1 & = & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{10}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 9x_4 \\
 w_2 & = & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 \\
 w_3 & = & 1 & - & x_1 & & & & & \\
 \\
 z & = & - & 53x_2 \downarrow & - & 41x_3 & + & 204x_4 & + & 20w_1 \\
 x_1 & = & & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 & - & 2w_1 \\
 \leftarrow w_2 & = & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & + & w_1 \\
 w_3 & = & 1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & + & 2w_1 \\
 \\
 z & = & - & \frac{28}{2}x_3 \downarrow & + & \frac{339}{4}x_4 & + & \frac{27}{4}w_1 & + & \frac{53}{4}w_2 \\
 \leftarrow x_1 & = & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{3}{4}w_1 & - & \frac{11}{4}w_2 \\
 x_2 & = & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 2x_4 & + & \frac{1}{4}w_1 & - & \frac{1}{4}w_2 \\
 w_3 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 4x_4 & - & \frac{3}{4}w_1 & + & \frac{11}{4}w_2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
z &= 29x_1 - 18x_4 \downarrow - 15w_1 + 93w_2 \\
x_3 &= -2x_1 + 8x_4 + \frac{3}{2}w_1 - \frac{11}{2}w_2 \\
\leftarrow x_2 &= x_1 - 2x_4 - \frac{1}{2}w_1 - \frac{5}{2}w_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 20x_1 + 9x_2 - \frac{21}{2}w_1 \downarrow + \frac{141}{2}w_2 \\
\leftarrow x_3 &= 2x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}w_1 - \frac{25}{2}w_2 \\
x_4 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}w_1 - \frac{5}{4}w_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= -22x_1 \downarrow + 93x_2 + 21x_3 - 24w_2 \\
w_1 &= 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 25w_2 \\
\leftarrow x_4 &= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - w_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 27x_2 - x_3 \downarrow + 44x_4 + 20w_2 \\
w_1 &= -2x_2 + 2x_3 + 8x_4 + w_2 \\
x_1 &= 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2w_2 \\
\leftarrow w_3 &= 1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2w_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= -1 + 30x_2 + 42x_4 + 18w_2 + w_3 \\
w_1 &= 2 - 4x_4 + 8w_2 + w_3 \\
x_1 &= 1 - w_3 \\
x_3 &= 1 - 3x_2 + 2x_4 + 2w_2 - w_3
\end{aligned}$$

Bland (dạng bảng):

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
$-z$	$-10 \downarrow$	57	9	24	0	0	0	0
$\leftarrow w_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0
w_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	0	1
$-z$	0	$-53 \downarrow$	-41	204	20	0	0	0
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
$\leftarrow w_2$	0	4	2	-8	-1	1	0	0
w_3	0	11	5	-18	-2	0	1	1
$-z$	0	0	$-\frac{28}{2} \downarrow$	$\frac{339}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0	0
$\leftarrow x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
w_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1	1
$-z$	29	0	0	$-18 \downarrow$	-15	93	0	0
x_3	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0
$\leftarrow x_2$	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
$-z$	20	9	0	0	$-\frac{21}{2} \downarrow$	$\frac{141}{2}$	0	0
$\leftarrow x_3$	-2	4	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{2}$	0	0
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
$-z$	$-22 \downarrow$	93	21	0	0	-24	0	0
w_1	-4	8	2	0	1	25	0	0
$\leftarrow x_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
$-z$	0	27	$-1 \downarrow$	44	0	20	0	0

w_1	0	2	-2	-8	1	-1	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0
$\leftarrow w_3$	0	3	1	-2	0	-2	1	1
$-z$	0	30	0	42	0	18	1	1
w_1	0	0	0	4	1	-5	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1

Vậy nghiệm tối ưu:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow z = -1$$

4. Phương pháp đơn hình 2 pha:

Dạng

$$\min c^T x \\ \exists b_i < 0 \mid a^T x \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Pha 1: Lập bài toán bổ trợ

$$(P_1) \begin{cases} \min & x_0 \\ a_i^T x - x_0 & \leq b_i \\ x_i & \geq 0 \end{cases}$$

Dùng đơn hình giải bài tập

Bước 1: biến vào: x_0

biến ra: ứng với dòng có b_i âm nhất.

Bước 2: ra được 1 từ vựng chấp nhận được.

dùng đơn hình tìm từ vựng tối ưu cho (P_1)

kiểm tra pha 1 \rightarrow 1 từ vựng tối ưu cho P_1

Pha 2: Từ từ vựng tối ưu của pha 1

a. Cho $x_0 = 0$ (ở các ràng buộc)

b. Giữ các ràng buộc của (*)

c. Lấy hàm mục tiêu của (P) , thế các ràng buộc vào hàm mục tiêu mới.

Ví dụ:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & 23x_1 & - & 7x_2 & & \\ & - & 4x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\ & & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\ & - & x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & - & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 1 \\ & & x_1 & & & \geq 0 \\ & & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Bài toán bổ trợ (từ vựng):

$$\begin{array}{rclclclcl}
\xi & = & & x_0 \downarrow & & & & \\
\leftarrow w_1 & = & -2 & + & x_0 & + & 4x_1 & - & x_2 \\
w_2 & = & 5 & + & x_0 & - & x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & -1 & + & x_0 & + & x_1 & + & x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & 3x_1 & - & 2x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
\xi & = & 2 & - & 4x_1 \downarrow & + & x_2 & + & w_1 \\
x_0 & = & 2 & - & 4x_1 & + & x_2 & + & w_1 \\
w_2 & = & 7 & - & 5x_1 & & & + & w_1 \\
\leftarrow w_3 & = & 1 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & w_1 \\
w_4 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & w_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
\xi & = & \frac{2}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 \downarrow & - & \frac{1}{3}w_1 & + & \frac{4}{3}w_3 \\
\leftarrow x_0 & = & \frac{2}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}w_1 & + & \frac{4}{3}w_3 \\
w_2 & = & \frac{16}{3} & - & \frac{10}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}w_1 & + & \frac{5}{3}w_3 \\
x_1 & = & \frac{1}{3} & + & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}w_1 & - & \frac{1}{3}w_3 \\
w_4 & = & \frac{8}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}w_1 & + & \frac{1}{3}w_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
\xi & = & & x_0 & & & & & \\
x_2 & = & \frac{2}{5} & - & \frac{3}{5}x_0 & - & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{4}{5}w_3 \\
w_2 & = & 4 & + & 2x_0 & & & - & w_3 \\
x_1 & = & \frac{3}{5} & - & \frac{2}{5}x_0 & + & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{1}{5}w_3 \\
w_4 & = & 2 & + & x_0 & + & w_1 & - & w_3
\end{array}$$

Bài toán bổ trợ (bảng):

	x_0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-\xi$	$1 \downarrow$	0	0	0	0	0	0	0
$\leftarrow w_1$	-1	-4	1	1	0	0	0	-2
w_2	-1	1	1	0	1	0	0	5
w_3	-1	-1	-1	0	0	1	0	-1
w_4	-1	-3	2	0	0	0	1	1
$-\xi$	0	$-4 \downarrow$	1	1	0	0	0	-2
x_0	1	4	-1	-1	0	0	0	2
w_2	0	5	0	-1	1	0	0	7
$\leftarrow w_3$	0	3	-2	-1	0	1	0	1
w_4	0	1	1	-1	0	0	1	3
$-\xi$	0	0	$-\frac{5}{3} \downarrow$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
$\leftarrow x_0$	1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
w_2	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{16}{3}$
x_1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
w_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{3}$
$-\xi$	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
w_2	-2	0	0	0	1	1	0	4
x_1	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_4	-1	0	0	-1	0	1	1	2

Bài toán gốc (từ vụng):

$$\begin{aligned}
 z &= 11 + 6w_1 - w_3 \downarrow \\
 x_2 &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}w_3 \\
 w_2 &= 4 - w_3 \\
 x_1 &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}w_1 + \frac{1}{5}w_3 \\
 \leftarrow w_4 &= 2 + w_1 - w_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 9 + 5w_1 + w_4 \\
 x_2 &= 2 + \frac{2}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_4 \\
 w_2 &= 2 - w_1 + w_4 \\
 x_1 &= 1 + \frac{2}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_4 \\
 w_3 &= 2 + w_1 - w_4
 \end{aligned}$$

Bài toán gốc (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	0	0	6	0	-1	0	11
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
w_2	0	0	0	1	1	0	4
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_4	0	0	-1	0	1	1	2
$-z$	0	0	5	0	0	1	-9
x_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	2
w_2	0	0	1	1	0	-1	2
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1
w_3	0	0	-1	0	1	1	2

Vậy nghiệm tối ưu:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow z = 9$$

5. Đổi bài toán đơn hình gốc sang bài toán đơn hình đối ngẫu:

Đổi bài toán như sau:

$\min c^T x$	$\max y^T b$
$a_i^T x = b_i, \quad i \in M_1$	$y_i \text{ tự do}, \quad i \in M_1$
$a_i^T x \leq b_i, \quad i \in M_2$	$y_i \leq 0, \quad i \in M_2$
$a_i^T x \geq b_i, \quad i \in M_3$	$y_i \geq 0, \quad i \in M_3$
$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$	$y^T A_j \leq c_j^T, \quad j \in N_1$
$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$	$y^T A_j \geq c_j^T, \quad j \in N_2$
$x_j \text{ tự do}, \quad j \in N_3$	$y^T A_j = c_j^T, \quad j \in N_3$

Dựa trên bảng quan hệ sau:

GỐC	min	max	ĐỐI NGÃU
ràng buộc	$= b_i$ $\leq b_i$ $\geq b_i$	tự do ≤ 0 ≥ 0	biến
biến	≥ 0 ≤ 0 tự do	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	ràng buộc

Ví dụ 1:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \min & 23x_1 & - & 7x_2 & & \\
 & - & 4x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\
 & - & x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\
 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 1 \\
 & & x_1 & & & \geq 0 \\
 & & & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Chuyển thành đơn hình đối ngẫu

$$\begin{array}{rcccccccc}
\max & - & 2y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & + & y_4 & & \\
& - & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & 3y_4 & \leq & 23 \\
& & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & \leq & -7 \\
& & y_1 & & & & & & & \leq & 0 \\
& & & & y_2 & & & & & \leq & 0 \\
& & & & & & y_3 & & & \leq & 0 \\
& & & & & & & & y_4 & \leq & 0
\end{array}$$

Ví dụ 2 (bài tập 6.6 / a):

$$\begin{array}{rcccccc}
\max & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & \\
& & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & x_3 & \geq & 0 \\
\\
-\min & & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & \\
& & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Chuyển thành đơn hình đối ngẫu

$$\begin{array}{rcccccc}
-\max & & 5y_1 & + & 4y_2 & & \\
& & 2y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
- & & 5y_1 & - & y_2 & \leq & 3 \\
& & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
& & y_1 & & & \leq & 0 \\
& & & & y_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Ví dụ 3 (bài tập 6.6 / b):

$$\begin{array}{rcccccc}
\min & & & - & 7x_2 & + & 3x_3 & & \\
& - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leq & -3 \\
& - & x_1 & & & & & \leq & 1 \\
& & & & & & - & x_3 & \leq & 0 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 27 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 12
\end{array}$$

Chuyển thành đơn hình đối ngẫu

$$\begin{array}{rcll}
 \max & - & 3y_1 & + & y_2 & + & 27y_4 & + & 12y_5 & & \\
 & & - & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 0 \\
 & & - & 2y_1 & & & & & + & 3y_4 & - & y_5 & = & -7 \\
 & & - & y_1 & & & + & y_3 & + & 2y_4 & + & 3y_5 & \leq & 3 \\
 & & & y_1 & & & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & y_2 & & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & y_3 & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & y_4 & & & & & & \text{tự do} \\
 & & & & & & & y_5 & & & & & \text{tự do}
 \end{array}$$

Ví dụ 3 (bài tập 6.6 / c):

$$\begin{array}{rcll}
 \max & & 3x_1 & + & x_2 & & \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 - & & x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0 \\
 \\
 -\min & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 - & & x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Chuyển thành đơn hình đối ngẫu

$$\begin{array}{rcll}
 -\max & - & y_1 & - & 3y_2 & + & 2y_3 & & \\
 & & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & \leq & -3 \\
 & - & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \leq & -1 \\
 & & y_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & y_2 & & & & \leq & 0 \\
 & & & & y_3 & & & \leq & 0
 \end{array}$$

Ví dụ 4 (bài tập 2.9 / c):

$$\begin{array}{rcccccccc}
\min & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
& x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 \leq 1 \\
& - & x_1 & + & x_2 & & + & x_4 \leq 1 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & = 1 \\
& & x_1 & & & & & \geq 0 \\
& & & x_2 & & & & \geq 0 \\
& & & & & x_3 & & \text{tự do} \\
& & & & & & x_4 & \text{tự do}
\end{array}$$

Chuyển thành đơn hình đối ngẫu

$$\begin{array}{rcccccccc}
\max & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \\
& y_1 & - & y_2 & & & & \leq 1 \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \leq -1 \\
& & & & & & y_3 & = -1 \\
& - & y_1 & + & y_2 & & & = -1 \\
& y_1 & & & & & & \leq 0 \\
& & & & y_2 & & & \text{tự do} \\
& & & & & & y_3 & \text{tự do}
\end{array}$$

6. Phương pháp đơn hình đối ngẫu:

Dùng cho trường hợp $\exists b_i < 0$

Dạng bài toán:

$$\begin{array}{rcl}
\min & c_i^T x \\
& a_j^T x \leq b_j \\
& x_i \geq 0
\end{array}$$

Các bước thực hiện:

Bước 1: Chọn biến ra là biến ứng với chỉ số b_j âm nhất.

Bước 2: Chọn biến vào, xét dòng ứng với b_{j_0} âm nhất ở bước 1.

- Chỉ xét a_{jk} là dấu "+".
- Xét các chỉ số c_{jk} , lấy dấu "+".
- Lập tỉ lệ $\frac{c_{jk}}{a_{jk}}$ ("+" cho c) \rightarrow min nhất
- Min ứng với cột nào \rightarrow biến đó là biến vào

Xoay $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nếu còn } b_j \text{ âm} \rightarrow \text{đơn hình đối ngẫu giải} \\ \text{Nếu ra dạng hoàn hảo} \rightarrow \text{đơn hình bình thường} \end{array} \right.$

* Phương pháp đơn hình đối ngẫu – góc:

Mục đích tương ứng trường hợp $\left[\begin{array}{l} \text{tất cả các } c_i \text{ đều âm} \\ a_{jk} \text{ nhưng } c_k \text{ âm} \end{array} \right.$

Pha 1: Lập bài toán phụ:

$$\begin{array}{rcl}
\min & |c_i^T| x \\
(P') & \begin{cases} a_j x_j \leq b_i \\ x_i \geq 0 \end{cases}
\end{array}$$

Gọi (P') : dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu
 \Rightarrow từ vừng tối ưu: $\left[\begin{array}{l} \text{bỏ hàm mục tiêu của từ vừng} \\ \text{giữ lại các ràng buộc} \end{array} \right.$

Pha 2:

Tính hàm mục tiêu mới (thay các biến ở ràng buộc của pha 1 vào hàm mục tiêu gốc).

\rightarrow từ vừng mới \Rightarrow tiến hành đơn hình gốc

\Rightarrow nghiệm.

Ví dụ 1:

$$\begin{array}{rclclcl} \min & & x_1 & + & x_2 & & \\ & - & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & - & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & -8 \\ & - & x_1 & + & 3x_2 & \leq & -7 \\ & & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Đơn hình đối ngẫu:

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & x_1 \downarrow & + & x_2 \\ w_1 & = & 4 & + & 2x_1 & + & x_2 \\ \leftarrow w_2 & = & -8 & + & 2x_1 & - & 4x_2 \\ w_3 & = & -7 & + & x_1 & - & 3x_2 \\ z & = & 4 & + & 3x_2 & + & \frac{1}{2}w_2 \downarrow \\ w_1 & = & 12 & + & 5x_2 & + & w_2 \\ x_1 & = & 4 & + & 2x_2 & + & \frac{1}{2}w_2 \\ \leftarrow w_3 & = & -3 & - & x_2 & + & \frac{1}{2}w_2 \\ z & = & 7 & + & 4x_2 & + & w_3 \\ w_1 & = & 18 & + & 7x_2 & + & 2w_3 \\ x_1 & = & 7 & + & 3x_2 & + & w_3 \\ w_2 & = & 6 & + & 2x_2 & + & 2w_3 \end{array}$$

Đơn hình đối ngẫu (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
$-z$	$1 \downarrow$	1	0	0	0	0
w_1	-2	-1	1	0	0	4
$\leftarrow w_2$	-2	4	0	1	0	-8
w_3	-1	3	0	0	1	7
$-z$	0	3	0	$\frac{1}{2} \downarrow$	0	-4
w_1	0	-5	1	-1	0	12
x_1	1	-2	0	$-\frac{1}{2}$	0	4

$\leftarrow w_3$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	-3
$-z$	0	4	0	0	1	-7
w_1	0	-7	1	0	-2	18
x_2	1	-3	0	0	-1	7
w_2	0	-2	0	1	-2	6

Ví dụ 2:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + x_2 \\
 & x_1 - x_2 \leq -1 \\
 & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq -2 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\min \quad & -3x_1 - x_2 \\
 & x_1 - x_2 \leq -1 \\
 & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq -2 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Pha 1 đơn hình đối ngẫu – gốc (từ vệt):

$$\begin{aligned}
 \xi &= 3x_1 + x_2 \downarrow \\
 w_1 &= -1 - x_1 + x_2 \\
 w_2 &= 3 - x_1 - x_2 \\
 \leftarrow w_3 &= -2 - 2x_1 + x_2 \\
 \\
 \xi &= 2 + 5x_1 + w_3 \\
 w_1 &= 1 + x_1 + w_3 \\
 w_2 &= 1 - 3x_1 - w_3 \\
 x_2 &= 2 + 2x_1 + w_3
 \end{aligned}$$

Pha 1 đơn hình đối ngẫu – gốc (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
$-\xi$	3	1 ↓	0	0	0	0
w_1	1	-1	1	0	0	-1
w_2	1	1	0	1	0	3
$\leftarrow w_3$	2	-1	0	0	1	-2
$-\xi$	5	0	0	0	1	-2
w_1	-1	0	0	1	-1	1
w_2	3	0	1	0	1	1
x_2	-2	1	0	0	-1	2

Pha 2 đơn hình đối ngẫu – gốc (từ vệt):

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -2 & - & 5x_1 \downarrow & - & w_3 \\ w_1 & = & 1 & + & x_1 & + & w_3 \\ \leftarrow w_2 & = & 1 & - & 3x_1 & - & w_3 \\ x_2 & = & 2 & + & 2x_1 & + & w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -\frac{11}{3} & + & \frac{5}{3}w_2 & + & \frac{2}{3}w_3 \\ w_1 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{1}{3}w_2 & + & \frac{2}{3}w_3 \\ x_1 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{3}w_2 & - & \frac{1}{3}w_3 \\ x_2 & = & \frac{8}{3} & - & \frac{2}{3}w_2 & + & \frac{2}{3}w_3 \end{array}$$

Pha 2 đơn hình đối ngẫu – gốc (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
$-z$	$-5 \downarrow$	0	0	0	-1	2
w_1	-1	0	0	1	-1	1
$\leftarrow w_2$	3	0	1	0	1	1
x_2	-2	1	0	0	-1	2
$-z$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{3}$
w_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

Vậy nghiệm tối ưu:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow z = \frac{11}{3}$$

ÔN TẬP

1. Trường hợp $b_i > 0$:

Cách 1: hình học (trượt hàm mục tiêu)

Cách 2: hình học (thể đỉnh)

Cách 3: đơn hình góc (từ vừng)

Cách 4: đơn hình góc (bảng)

Cách 5: Vô chiều (từ vừng)
(đi ngược chiều đơn hình góc)

Cách 6: Vô chiều (bảng)

* Ứng với mỗi bước lặp của phương pháp đơn hình trên từ vừng (khi kí hiệu A, B, C, D, E trên hình vẽ của Cách 1), chỉ rõ ứng với các đỉnh của miền chấp nhận được.

2. Trường hợp $b_i = 0$:

Cách 1: hình học (trượt hàm mục tiêu)

Cách 2: hình học (thể đỉnh)

Cách 3: Bland (từ vừng)

Cách 4: Bland (bảng)

Cách 5: Vô chiều (từ vừng)

Cách 6: Vô chiều (bảng)

3. Trường hợp $b_i < 0$:

Cách 1: hình học (trượt hàm mục tiêu)

Cách 2: hình học (thể đỉnh)

Cách 3: 2 pha (từ vừng)

Cách 4: 2 pha (bảng)

Cách 5: đơn hình đối ngẫu (từ vừng)

Cách 6: đơn hình đối ngẫu (bảng)

Cách 7: đơn hình đối ngẫu – góc (từ vừng)

Cách 8: đơn hình đối ngẫu – góc (bảng)

Ví dụ 1:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & 23x_1 & - & 7x_2 & & \\ & - & 4x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\ & & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\ & - & x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & - & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 1 \\ & & x_1 & & & \geq 0 \\ & & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Hình học (thể đỉnh):

$$A(1,0), \quad B\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad C(1,2), \quad D\left(\frac{9}{5}, \frac{16}{5}\right), \quad E(5,0)$$

2 pha (từ vừng):

$$\begin{array}{rcllcl} z & = & & 23x_1 & - & 7x_2 \\ w_1 & = & -2 & + & 4x_1 & - & x_2 \\ w_2 & = & 5 & - & x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & -1 & + & x_1 & + & x_2 \\ w_4 & = & 1 & + & 3x_1 & - & 2x_2 \end{array}$$

Pha 1:

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \xi & = & & x_0 \downarrow & & & & \\
 \leftarrow w_1 & = & -2 & + & x_0 & + & 4x_1 & - & x_2 \\
 w_2 & = & 5 & + & x_0 & - & x_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & -1 & + & x_0 & + & x_1 & + & x_2 \\
 w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & 3x_1 & - & 2x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \xi & = & 2 & - & 4x_1 \downarrow & + & x_2 & + & w_1 \\
 x_0 & = & 2 & - & 4x_1 & + & x_2 & + & w_1 \\
 w_2 & = & 7 & - & 5x_1 & & & + & w_1 \\
 \leftarrow w_3 & = & 1 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & w_1 \\
 w_4 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & w_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \xi & = & \frac{2}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 \downarrow & - & \frac{1}{3}w_1 & + & \frac{4}{3}w_3 \\
 \leftarrow x_0 & = & \frac{2}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}w_1 & + & \frac{4}{3}w_3 \\
 w_2 & = & \frac{16}{3} & - & \frac{10}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}w_1 & + & \frac{5}{3}w_3 \\
 x_1 & = & \frac{1}{3} & + & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}w_1 & - & \frac{1}{3}w_3 \\
 w_4 & = & \frac{8}{3} & - & \frac{5}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}w_1 & + & \frac{1}{3}w_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \xi & = & & x_0 & & & & & \\
 x_2 & = & \frac{2}{5} & - & \frac{3}{5}x_0 & - & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{4}{5}w_3 \\
 w_2 & = & 4 & + & 2x_0 & & & - & w_3 \\
 x_1 & = & \frac{3}{5} & - & \frac{2}{5}x_0 & + & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{1}{5}w_3 \\
 w_4 & = & 2 & + & x_0 & + & w_1 & - & w_3
 \end{array}$$

Pha 2:

$$\begin{array}{rclclclcl}
 z & = & 11 & + & 6w_1 & - & w_3 \downarrow \\
 x_2 & = & \frac{2}{5} & - & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{4}{5}w_3 \\
 w_w & = & 4 & & & - & w_3 \\
 x_1 & = & \frac{3}{5} & + & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{1}{5}w_3 \\
 \leftarrow w_4 & = & 2 & + & w_1 & - & w_3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
z &= 9 + 5w_1 + w_4 \\
x_2 &= 2 + \frac{3}{5}w_1 - \frac{4}{5}w_4 \\
w_2 &= 2 - w_1 + w_4 \\
x_1 &= 1 + \frac{2}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_4 \\
w_3 &= 2 + w_1 - w_4
\end{aligned}$$

2 pha (bảng):

Pha 1:

	x_0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-\xi$	$1 \downarrow$	0	0	0	0	0	0	0
$\leftarrow w_1$	-1	-4	1	1	0	0	0	-2
w_2	-1	1	1	0	1	0	0	5
w_3	-1	-1	-1	0	0	1	0	-1
w_4	-1	-3	2	0	0	0	1	1
$-\xi$	0	$-4 \downarrow$	1	1	0	0	0	-2
x_0	1	4	-1	-1	0	0	0	2
w_2	0	5	0	-1	1	0	0	7
$\leftarrow w_3$	0	3	-2	-1	0	1	0	1
w_4	0	1	1	-1	0	0	1	3
$-\xi$	0	0	$-\frac{5}{3} \downarrow$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
$\leftarrow x_0$	1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
w_2	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{16}{3}$
x_1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
w_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{3}$
$-\xi$	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
w_2	-2	0	0	0	1	1	0	4
x_1	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_4	-1	0	0	-1	0	1	1	2

Pha 2:

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	0	0	6	0	$-1 \downarrow$	0	-11
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
w_2	0	0	0	1	1	0	4
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$\leftarrow w_4$	0	0	-1	0	1	1	2
$-z$	0	0	5	0	0	1	-9
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	2
w_2	0	0	1	1	0	-1	2
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1
w_3	0	0	-1	0	1	1	2

Đơn hình đối ngẫu (từ vệt):

$$\begin{aligned}
 z &= 23x_1 \downarrow - 7x_2 \\
 \leftarrow w_1 &= -2 + 4x_1 - x_2 \\
 w_2 &= 5 - x_1 - x_2 \\
 w_3 &= -1 + x_1 + x_2 \\
 w_4 &= 1 + 3x_1 - 2x_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{23}{2} - \frac{5}{4}x_2 + \frac{23}{4}w_1 \downarrow \\
 x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}w_1 \\
 w_2 &= \frac{9}{2} - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}w_1 \\
 \leftarrow w_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}w_1 \\
 w_4 &= \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}w_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 23 - 30x_2 \downarrow + 23w_3 \\
 x_1 &= 1 - x_2 + w_3 \\
 w_2 &= 4 - w_3 \\
 \leftarrow w_1 &= 2 - 5x_2 + 4w_3 \\
 w_4 &= 4 - 5x_2 + 3w_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 11 + 6w_1 - w_3 \downarrow \\
 x_1 &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}w_1 + \frac{1}{5}w_3 \\
 w_2 &= 4 - w_3 \\
 x_2 &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}w_3 \\
 \leftarrow w_4 &= 2 + w_1 - w_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 9 + 5w_1 + w_4 \\
 x_1 &= 1 + \frac{2}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_4 \\
 w_2 &= \frac{3}{2} - w_1 + w_4 \\
 x_2 &= 2 + \frac{3}{5}w_1 - \frac{4}{5}w_4 \\
 w_3 &= 2 + w_1 - w_4
 \end{aligned}$$

Đơn hình đối ngẫu (bảng):

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-Z$	23 ↓	-7	0	0	0	0	0
$\leftarrow w_1$	-4	1	1	0	0	0	-2
w_2	1	1	0	1	0	0	5
w_3	-1	-1	0	0	1	0	-1
w_4	3	2	0	0	0	1	1
$-Z$	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{23}{4}$ ↓	0	0	0	$-\frac{23}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
w_2	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{9}{2}$
$\leftarrow w_3$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
w_4	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{2}$
$-Z$	0	-30 ↓	0	0	23	0	-23
x_1	1	1	0	0	-1	0	1
w_2	0	0	0	1	1	0	4
$\leftarrow w_1$	0	5	1	0	-4	0	2
w_4	0	5	0	0	-3	1	4
$-Z$	0	0	6	0	-1 ↓	0	-11
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_2	0	0	0	1	1	0	4
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$\leftarrow w_4$	0	0	-1	0	1	1	2
$-Z$	0	0	5	0	0	1	-9
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1
w_2	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	2
w_3	0	0	-1	0	1	1	2

Đơn hình đối ngẫu – gốc (từ vệtng):

Pha 1:

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & 23x_1 \downarrow & + & 7x_2 \\ \leftarrow w_1 & = & -2 & + & 4x_1 & - & x_2 \\ w_2 & = & 5 & - & x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & -1 & + & x_1 & + & x_2 \\ w_4 & = & 1 & + & 3x_1 & - & 2x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & \frac{23}{2} & + & \frac{51}{4}x_2 \downarrow & + & \frac{23}{4}w_1 \\ x_1 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{4}w_1 \\ w_2 & = & \frac{9}{2} & - & \frac{5}{4}x_2 & - & \frac{1}{4}w_1 \\ \leftarrow w_3 & = & -\frac{1}{2} & + & \frac{5}{4}x_2 & + & \frac{1}{4}w_1 \\ w_4 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{5}{4}x_2 & + & \frac{3}{4}w_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & \frac{83}{5} & + & \frac{16}{5}w_1 & + & \frac{51}{5}w_3 \\ x_1 & = & \frac{3}{5} & + & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{1}{5}w_3 \\ w_2 & = & 4 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & \frac{2}{5} & - & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{4}{5}w_3 \\ w_4 & = & 2 & + & w_1 & - & w_3 \end{array}$$

Pha 2:

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & 11 & + & 6w_1 & - & w_3 \downarrow \\ x_1 & = & \frac{3}{5} & + & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{1}{5}w_3 \\ w_2 & = & 4 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & \frac{2}{5} & - & \frac{1}{5}w_1 & + & \frac{4}{5}w_3 \\ \leftarrow w_4 & = & 2 & + & w_1 & - & w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & 9 & + & 5w_1 & + & w_4 \\ x_1 & = & 1 & + & \frac{2}{5}w_1 & - & \frac{1}{5}w_4 \\ w_2 & = & \frac{3}{2} & - & w_1 & + & w_4 \\ x_2 & = & 2 & + & \frac{3}{5}w_1 & - & \frac{4}{5}w_4 \\ w_3 & = & 2 & + & w_1 & - & w_4 \end{array}$$

Đơn hình đối ngẫu – gốc (bảng):

Pha 1:

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	$23 \downarrow$	-7	0	0	0	0	0
$\leftarrow w_1$	-4	1	1	0	0	0	-2
w_2	1	1	0	1	0	0	5
w_3	-1	-1	0	0	1	0	-1
w_4	3	2	0	0	0	1	1
$-z$	0	$\frac{51}{4} \downarrow$	$\frac{23}{4} \downarrow$	0	0	0	$-\frac{23}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
w_2	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{9}{2}$
$\leftarrow w_3$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
w_4	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1	$\frac{5}{2}$
$-z$	0	0	$\frac{16}{5}$	0	$\frac{51}{5}$	0	$-\frac{83}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_2	0	0	0	1	1	0	$\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
w_4	0	0	-1	0	1	1	$\frac{2}{5}$

Pha 2:

	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
$-z$	0	0	6	0	-1	0	-11
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
w_2	0	0	0	1	1	0	$\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$\leftarrow w_4$	0	0	-1	0	1	1	$\frac{2}{5}$
$-z$	0	0	5	0	0	1	-9
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1
w_2	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	2
w_3	0	0	-1	0	1	1	2

Vậy nghiệm tối ưu:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow z = 9$$

Ví dụ 2:

$$\begin{array}{rclclcl} \min & - & x_1 & + & x_2 & & \\ & - & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & - & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Hình học (thể đỉnh):

$$O(0,0), \quad A(0,-2), \quad B\left(-1,-\frac{5}{2}\right), \quad C\left(-\frac{8}{3},-\frac{5}{3}\right), \quad D(-1,0)$$

Đơn hình (từ vưng):

Đặt $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & y_1 & - & y_2 \downarrow \\ w_1 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 \\ \leftarrow w_2 & = & 4 & + & y_1 & - & 2y_2 \\ w_3 & = & 1 & - & y_1 & + & y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & -2 & + & \frac{1}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}w_2 \\ w_1 & = & 2 & - & 2y_1 & + & w_2 \\ y_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}y_1 & - & \frac{1}{2}w_2 \\ w_3 & = & 3 & - & \frac{1}{2}y_1 & - & \frac{1}{2}w_2 \end{array}$$

Đơn hình (bảng):

	y_1	y_2	w_1	w_2	w_3	
$-z$	1	$-1 \downarrow$	0	0	0	0
w_1	1	2	1	0	0	6
$\leftarrow w_2$	-1	2	0	1	0	4
w_3	1	-1	0	0	1	1
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
w_1	2	0	1	-1	0	2
y_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2
w_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	3

Vô chiều (từ vưng):

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & & y_1 \downarrow & - & y_2 \\ w_1 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 \\ w_2 & = & 4 & + & y_1 & - & 2y_2 \\ \leftarrow w_3 & = & 1 & - & y_1 & + & y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} z & = & 1 & + & 0y_2 \downarrow & - & w_3 \\ \leftarrow w_1 & = & 5 & - & 3y_2 & + & w_3 \\ w_2 & = & 5 & - & y_2 & - & w_3 \\ y_1 & = & 1 & + & y_2 & - & w_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
z &= 1 - w_3 \downarrow \\
y_2 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_3 \\
\leftarrow w_2 &= \frac{10}{3} + \frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}w_3 \\
y_1 &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}w_1 \downarrow + \frac{3}{4}w_2 \\
y_2 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{4}w_2 \\
w_3 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}w_1 - \frac{3}{4}w_2 \\
\leftarrow y_1 &= 1 - \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= -2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}w_2 \\
y_2 &= 2 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}w_2 \\
w_3 &= 3 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}w_2 \\
w_1 &= 2 - 2y_1 + w_2
\end{aligned}$$

Vô chiều (bảng):

	$y_1 \downarrow$	y_2	w_1	w_2	w_3	
$-z$	1	-1	0	0	0	0
w_1	1	2	1	0	0	6
w_2	-1	2	0	1	0	4
$\leftarrow w_3$	1	-1	0	0	1	1
$-z$	0	$0 \downarrow$	0	0	-1	-1
$\leftarrow w_1$	0	3	1	0	-1	5
w_2	0	1	0	1	1	5
y_1	1	-1	0	0	1	1
$-z$	0	0	0	0	$-1 \downarrow$	-1
y_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\leftarrow w_2$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$
y_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
$-z$	0	0	$-\frac{1}{4} \downarrow$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
y_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
w_3	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{2}$
$\leftarrow y_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
$-z$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
y_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2
w_3	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	3
w_1	2	0	1	-1	0	2

Vậy nghiệm tối ưu:

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \Rightarrow z = -2$$