

## NỘI DUNG ÔN TẬP MÔN GIẢI TÍCH B2

1. Giới hạn và sự liên tục của hàm số hai biến (14.2)
2. Tính đạo hàm riêng bằng định nghĩa và bằng công thức. Định lý Clairaut. (14.3)
3. Đạo hàm của hàm hợp - Chain Rule. (14.5)
4. Khảo sát sự khả vi bằng định nghĩa của khả vi, bằng điều kiện đủ của tính khả vi. Phép xấp xỉ tuyến tính của hàm số hai biến. (14.4)
5. Khảo sát cực trị của hàm hai biến. (14.7, 14.8)
6. Tính tích phân kép thông qua tích phân lặp (15.2, 15.3), thông qua định lý Green (16.4).
7. Tích phân đường (16.2, 16.3, 16.4), trường thế, hàm thế (16.1, 16.3).

### Về định nghĩa và các định lý có thể sử dụng để chứng minh.

**1. Giới hạn:** Ở đây, ta nói về hàm hai biến, hàm nhiều biến hoàn toàn tương tự.

- Nếu  $f(x,y) \rightarrow L_1$  khi  $(x,y) \rightarrow (a,b)$  theo một đường  $C_1$  nào đó và  $f(x,y) \rightarrow L_2$  khi  $(x,y) \rightarrow (a,b)$  theo đường  $C_2$  khác. Nếu  $L_1 \neq L_2$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  không tồn tại.

Thông thường khi giải toán, ta sẽ chọn hai đường nào đó cho cặp số  $(x,y)$  di chuyển, đặc biệt là lấy đường thẳng hay dễ dễ hơn có thể lấy hai trục tọa độ, nếu  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

- Trong trường hợp ngược lại, nếu muốn chứng minh hàm số có giới hạn và muốn tính giới hạn thì ta phải sử dụng định nghĩa epsilon - delta để đánh giá và chứng minh:

Cho  $f$  là hàm hai biến trên miền  $D$  chứa lân cận  $(a,b)$ . Khi đó, ta nói giới hạn của  $f(x,y)$  khi  $(x,y)$  tiến tới  $(a,b)$  bằng  $L$ , hay  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  viết nếu  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = L$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta : |f(x,y) - L| < \epsilon .$$

- Giới hạn hàm hai biến, nếu tồn tại, còn thỏa:

$(x, y) \rightarrow (a, b) :$

$$i) \quad \lim f \pm \lim g = \lim(f \pm g)$$

$$ii) \quad c \lim f = \lim(cf) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$iii) \quad \lim f \cdot \lim g = \lim(f \cdot g)$$

$$iv) \quad \frac{\lim f}{\lim g} = \lim \frac{f}{g} \quad \text{if } g, \lim g \neq 0$$

$$v) \quad f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = L \Rightarrow \lim g = L \text{ (Squeeze theorem)}$$

### Sự liên tục:

Hàm  $f$  hai biến liên tục tại  $(a, b) \in D$  khi  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$ . Nếu như hàm  $f$  liên tục tại mọi điểm thuộc miền  $D$  thì  $f$  liên tục trên  $D$ . Từ đó, ta có thể chứng minh được hàm số liên tục hay không liên tục, dựa vào cách tính lim ở trên. Từ đó, ta có sự liên tục cũng có những tính chất như trên (i đến iv). Ngoài ra:

- Nếu  $f$  liên tục trên miền  $D_f$  và  $g$  liên tục trên miền  $D_g = f(D_f)$  thì  $f \circ g$  liên tục trên miền  $D = g(D_g)$ .

- Mọi đa thức hai biến đều liên tục trên  $\mathbb{R}^2$ .

## 2. Tính đạo hàm riêng: Ở đây nói về hàm hai biến, hàm nhiều biến hoàn toàn tương tự.

Cho  $f(x, y)$  trên miền  $D$ ,  $g(x) = f(x, b)$ , ta có, nếu  $g'(a)$  tồn tại, đạo hàm riêng theo  $x$  của  $f$ :

$f_x(a, b) = g'(a)$ . Mà

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$\Rightarrow f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (\text{nếu giới hạn tồn tại})$$

Vậy

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (\text{nếu giới hạn tồn tại})$$

Kí hiệu:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Tương tự, ta có đạo hàm riêng bậc 2. Đối với  $f(x, y)$ , có 4 đạo hàm riêng bậc 2:  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$ .  
(Lưu ý:  $f_{xy}$  tức là đạo hàm riêng theo  $x$  trước rồi đạo hàm riêng theo  $y$ ).

### Định lý Clairaut:

Cho  $f(x, y)$  trên lân cận  $(a, b)$ . Nếu các hàm  $f_{xy}$  và  $f_{yx}$  đều liên tục trên  $D$  thì  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

### 3. Đạo hàm của hàm hợp – Chain Rule:

#### Chain Rule (Case 1)

Cho  $z = f(x, y)$  là hàm kha vi của  $x$  và  $y$ ,  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$  là hàm kha vi của  $t$ .

Khi đó,  $z$  là hàm kha vi của  $t$  và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

#### Chain Rule (Case 2)

Cho  $z = f(x, y)$  là hàm kha vi của  $x$  và  $y$ ,  $x = g(s, t)$ ,  $y = h(s, t)$  là hàm kha vi của  $t$ .

Khi đó,  $z$  là hàm kha vi của  $s, t$  và

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

#### Chain Rule (General Version)

Cho  $u$  là hàm kha vi  $n$  biên  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Và mỗi  $x_j$  là hàm kha vi  $m$  biên  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Khi đó,

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

$i = 1, 2, \dots, m$

#### 4. Khảo sát sự khả vi bằng định nghĩa và định lý:

- Cho  $z = f(x, y)$  trên lân cận  $(a, b)$  và  $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ . Khi đó  $f$  khả vi tại  $(a, b)$  nếu

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

với  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  tiến tới 0 khi  $\Delta x, \Delta y$  tiến tới 0.

- Nếu  $f(x, y)$  khả vi tại  $(a, b)$  thì cũng liên tục tại đó.

- **Định lý:** (hàm nhiều biến hoàn toàn tương tự) Cho  $f(x, y)$  trên miền  $D$  chứa lân cận  $(a, b)$ . Nếu  $f_x, f_y$  tồn tại trên  $D$  và liên tục tại  $(a, b)$  thì  $f$  khả vi tại  $(a, b)$ .

**Xấp xỉ tuyến tính:** (hàm nhiều biến hoàn toàn tương tự) Nếu  $f(x, y)$  xác định trên lân cận  $(a, b)$  và khả vi tại  $(a, b)$ , khi  $(x, y)$  gần  $(a, b)$ , ta có xấp xỉ:

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

#### 5. Khảo sát cực trị của hàm hai biến:

Các định nghĩa về cực trị toàn cục và địa phương tương tự như với hàm một biến.

##### Một số định lý sử dụng:

**5.1** Nếu  $f$  có cực trị địa phương tại  $(a, b)$  và đạo hàm riêng cấp 1 của  $f$  tồn tại thì  $f_x(a, b) = 0$  và  $f_y(a, b) = 0$ .

**5.2** Giả sử  $f$  có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên lân cận  $(a, b)$ , và giả sử rằng  $f_x(a, b) = 0$  và  $f_y(a, b) = 0$ . Đặt

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(Chú ý: do định lý Clairaut nên  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ ).

- a/ Nếu  $D > 0$  và  $f_{xx}(a, b) > 0$  thì  $f$  là cực tiểu địa phương  
 b/ Nếu  $D > 0$  và  $f_{xx}(a, b) < 0$  thì  $f$  là cực đại địa phương  
 c/ Nếu  $D < 0$  thì  $f$  không là cực trị địa phương, mà là điểm yên ngựa (saddle point).  
 d/ Nếu  $D = 0$  thì không xác định được.

**5.3** Giả sử  $f$  liên tục trên miền  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D$  đóng và bị chặn. Khi đó,  $f$  có cực tiểu toàn cục và cực đại toàn cục trên  $D$ .

### Cách tìm cực trị của hàm hai biến:

- Tìm giá trị của  $f$  tại các điểm mà  $f_x$  hoặc  $f_y$  không tồn tại, hoặc  $f_x$  và  $f_y$  đều bằng 0 trên  $D$ .
- Tìm giá trị cực trị của  $f$  trên biên của  $D$ .
- So sánh 2 tập trên để tìm giá trị cực trị của  $f$  trên  $D$ .

## 6. Tính tích phân kép thông qua tích phân lặp:

### Định lý Fubini:

Nếu  $f$  khả tích trên một hình chữ nhật  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  thì

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Trong một số trường hợp, ta có thể tách hàm  $f(x, y)$  ra thành  $g(x)$  nhân  $h(y)$  thì ta luôn có:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$$

Ghi chú: Hàm hai biến  $f$  khả tích trên miền  $D \subset \mathbb{R}^2$  khi và chỉ khi  $f$  có tích phân kép trên  $D$ .  
 Nếu  $f$  liên tục trên  $D$  thì  $f$  khả tích trên  $D$ .

### Tính tích phân kép thông qua tích phân lặp:

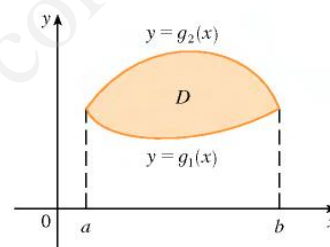
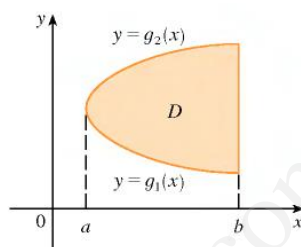
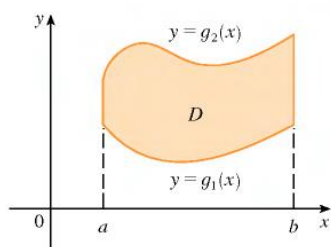
- **Kiểu I:** Nếu  $f$  khả tích trên miền kiểu I -  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  ( $g_1, g_2$  khả tích - theo nghĩa của hàm một biến - trên  $[a, b]$ )

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

- **Kiểu II:** Nếu  $f$  khả tích trên miền kiểu II -  $D = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$  ( $h_1, h_2$  khả tích - theo nghĩa của hàm một biến - trên  $[c, d]$ )

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Ghi chú: Mỗi kiểu có thể chia nhỏ thành 3 dạng sau:



- **Tính chất:** Tích phân kép trên miền  $D \subset \mathbb{R}^2$  thỏa: (các tích phân giả sử đã tồn tại)

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$$

$$\iint_D c f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$$

- 
- Nếu  $f(x, y) \geq g(x, y) \forall (x, y) \in D$  thì  $\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$ .
- Nếu  $D = D_1 \cup D_2$  và  $D_1, D_2$  chỉ giao nhau nhiều nhất ở biên thì

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

- $\iint_D 1 dA = S_D$

## Tính tích phân kép thông qua định lý Green:

### Định lý Green:

Nếu  $C$  là một đường cong kín và “bình thường” và có chiều dương,  $D$  là miền được bao bởi  $C$ ,  $P$  và  $Q$  là hai hàm hai biến có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền mở  $D' \supset D$ , thì:

$$\oint_C (Pdx + Qdy) \equiv \int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Từ đó, thay vì tính tích phân kép, ta tính tích phân đường tương ứng.

Ghi chú:

- Nếu  $C$  có chiều âm thì ta đảo dấu tích phân đường.
- Nếu  $D$  thuộc hai kiểu I, II (phân tích phân kép) thì ta có:

$$\left| \begin{aligned} \oint_C Pdx &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ \oint_C Qdy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \end{aligned} \right.$$

## 7. Tích phân đường, trường thế, hàm thế:

### Tích phân đường:

- Cho  $f$  là hàm hai biến liên tục và  $\mathbf{r}(t)$  là hàm vector. Từ  $\mathbf{r}(t)$  vẽ ra được **đường cong mượt**  $C$  ( $t \in [a, b]$ ) và  $C$  chỉ được đi qua đúng một lần khi  $t$  tăng từ  $a$  đến  $b$ ). Khi đó, tích phân đường của  $f$  dọc theo  $C$ :

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b \left( f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \right) dt$$

Tương tự, tích phân đường của  $f$  theo  $x$  và  $y$ :

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

**Dạng đặc biệt:** Cho  $P, Q$  là các hàm hai biến liên tục và  $\mathbf{r}(t)$  tương tự như trên. Ta có:

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

Ghi chú: Đường cong  $C$  vẽ từ hàm vector  $\mathbf{r}(t)$  ( $t \in [a, b]$ ) được gọi là mượt khi và chỉ khi  $\mathbf{r}'(t)$  liên tục khi  $t \in [a, b]$  và  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ .

- Tính chất:

- Nếu  $C_1, \dots, C_n$  đều mượt và rời nhau,  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$  liên tục thì

$$\int_C f ds = \sum_i \left( \int_{C_i} f ds \right)$$

- Khi  $t$  tăng từ  $a$  đến  $b$ ,  $\mathbf{r}(t)$  đã tạo ra một hướng trên  $C$ ,  $-C$  chính là đường cong  $C$  tính theo hướng ngược lại. Ta có:

$$\int_{-C} f(x, y) dx = - \int_C f(x, y) dx \quad \int_{-C} f(x, y) dy = - \int_C f(x, y) dy$$

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

- Nếu  $C$  là đoạn thẳng thì ta có  $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_{P_{\text{begin}}} + t \mathbf{r}_{P_{\text{end}}}$  với  $t \in [0, 1]$ .

**Trường thế:** là trường vector (hàm nhận vào 1 điểm trong không gian và trả về 1 vector trong không gian cùng số chiều)  $\mathbf{F}$  thỏa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_i P_i(\mathbf{x}) \mathbf{t}_i \quad \&\& \quad P_i(\mathbf{x}) = f_{x_i}(\mathbf{x}) \quad \forall i$$

( $f$  là hàm nhiều biến cùng số chiều,  $\mathbf{t}_i$  là các vector đơn vị chuẩn).



Khi đó,  $f$  được gọi là **hàm thế**.

Xét trên  $\mathbb{R}^2$ , ta đặt trường vector  $\mathbf{F}$  liên tục trên miền  $D$  (tức là  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$  và  $P, Q$  liên tục trên  $D$ ).

- a. Nếu  $\mathbf{F}$  là trường thế có hàm thế  $f(x,y)$  thì  $\int_C (Pdx + Qdy)$  không phụ thuộc vào **đường cong mở**  $C \subset D$  mà chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối tích phân đường (2 điểm này thuộc  $D$ ). Cụ thể,

$$\int_C (Pdx + Qdy) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Đây chính là định lý cơ bản của tích phân đường hàm hai biến.

Thêm điều kiện  $P, Q$  có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên  $D$ .

- b. Nếu  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  trên  $D$  và  $D$  là miền **mở và liên thông** “bình thường” thì  $\mathbf{F}$  là trường thế.

Định lý **b.** có thể được chứng minh bằng định lý Green.

- Ghi chú: Điều kiện khả vi trong **a.** thường được mặc định ở bài tập.