

CHỦ ĐỀ 2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

1. MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	\dots	x_n
\mathbb{P}	p_1	p_2	\dots	p_n

trong đó $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Lưu ý: tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

a) **Trung trình (kỳ vọng)** của biến ngẫu nhiên X là

$$\mathbb{E}(X) \equiv \mu_X = \bar{x} = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (\text{lấy giá trị nhân với xác suất rồi cộng lại})$$

Trung bình của biến ngẫu nhiên X^2 là

$$\mathbb{E}(X^2) = x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i. \quad (\text{lấy giá trị bình phương nhân với xác suất rồi cộng lại})$$

b) **Phương sai** của biến ngẫu nhiên X là

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

c) **Độ lệch tiêu chuẩn** của biến ngẫu nhiên X là

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ KỲ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI

Với X, Y là các biến ngẫu nhiên và a, b là các hằng số. Khi đó

✓ $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$

✓ $Var(aX + b) = a^2 Var(X).$

VÍ DỤ 2.1 (Câu 3 - Đề 3 - GK NH 21-22). Để đánh giá tình hình học tập của sinh viên trong môn học của mình, một giáo viên Toán đã thống kê số buổi nghỉ học (X) của sinh viên và ghi nhận kết quả trong bảng sau

X	0	1	3	4	5
\mathbb{P}	0.34	0.07	0.38	?	?

a) Biết $\mathbb{E}(X) = 2.1$, hãy hoàn thành bảng phân phối xác suất của X .

b) Tính xác suất để một sinh viên vắng ít nhất một buổi học?

c) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp học này. Biết rằng sinh viên này vắng ít hơn 4 buổi học, tính xác suất để sinh viên này vắng đúng 1 buổi học.

🔗 LỜI GIẢI.

a) Gọi $\mathbb{P}(X = 4) = a$, $\mathbb{P}(X = 5) = b$.

$$\text{Ta có } \sum_x \mathbb{P}(X = x) = 1 \Leftrightarrow 0.34 + 0.07 + 0.38 + a + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 0.21. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.34 + 1 \cdot 0.07 + 3 \cdot 0.38 + 4 \cdot a + 5 \cdot b = 1.21 + 4a + 5b.$$

$$\text{Mà } \mathbb{E}(X) = 2.1 \Leftrightarrow 1.21 + 4a + 5b = 2.1 \Leftrightarrow 4a + 5b = 0.89. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 0.21 \\ 4a + 5b = 0.89 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.16 \\ b = 0.05. \end{cases}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1	3	4	5
\mathbb{P}	0.34	0.07	0.38	0.16	0.05

b) Xác suất để một sinh viên vắng ít nhất một buổi học là

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.34 = 0.66.$$

Cách 2:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = 0.07 + 0.38 + 0.16 + 0.05 = 0.66.$$

c) Xác suất để sinh viên vắng đúng 1 buổi học nếu biết rằng sinh viên này vắng ít hơn 4 buổi học là

$$\mathbb{P}(X = 1 | X \leq 4) = \frac{\mathbb{P}[(X = 1) \cap (X \leq 4)]}{\mathbb{P}(X \leq 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{1 - \mathbb{P}(X > 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{1 - \mathbb{P}(X = 5)} = \frac{0.07}{1 - 0.05} = \frac{7}{95}.$$

□

CHỦ ĐỀ 2.2. BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

3. ĐỊNH NGHĨA

a) **Hàm mật độ:** Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f thì

☑ $f(x) \geq 0, \forall x.$

☑ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

☑ $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

b) **Hàm phân phối xác suất tích lũy:** $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$

4. MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f .

a) **Trung bình (kỳ vọng)** của biến ngẫu nhiên X là

$$\mathbb{E}(X) \equiv \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

b) **Trung bình (kỳ vọng) của hàm của biến ngẫu nhiên**

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Trung bình của biến ngẫu nhiên X^2 là

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx.$$

c) **Phương sai** của biến ngẫu nhiên X là

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx.$$

d) **Độ lệch tiêu chuẩn** của biến ngẫu nhiên X là

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

5. MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ KỲ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI

Với X, Y là các biến ngẫu nhiên và a, b là các hằng số. Khi đó

☑ $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$

☑ $Var(aX + b) = a^2Var(X).$

VÍ DỤ 5.1 (Câu 2 - Đề 2 - NH 21-22). Một giảng viên nào đó không bao giờ kết thúc bài giảng trước 9:50 AM nhưng luôn luôn kết thúc bài giảng trong 7 phút sau 9:50 AM. Giả sử rằng thời gian mà giảng viên này giảng bài sau 9:50 AM là biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{chỗ khác.} \end{cases}$$

với k là một hằng số.

- Tìm hằng số k ?
- Tính xác suất để giảng viên này kết thúc bài giảng dưới 1.9 phút sau 9:50 AM.
Biết rằng tiết học đã diễn ra quá 9:53 AM, xác suất để giảng viên kết thúc bài giảng quá 9h05 AM.
- Tính kỳ vọng của X ?
- Tính $\mathbb{E}(X^2)$?
- Tính phương sai của X ?
- Cho biến ngẫu nhiên $Y = 0.1X + 3$. Tính trung bình và phương sai của Y .
- Giảng viên sẽ kết thúc trước thời điểm nào với xác suất 90%?

LỜI GIẢI.

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{chỗ khác.} \end{cases}$$

- a) Tìm k :

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$.

$$\text{Mà } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^7 kx^2 dx = k \int_0^7 x^2 dx = k \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^7 = k \cdot \frac{343}{3}.$$

$$\text{Vì } f \text{ là hàm mật độ} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k \cdot \frac{343}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{343}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{343}x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{chỗ khác.} \end{cases}$$

- b) Xác suất để giảng viên này kết thúc bài giảng dưới 1.9 phút sau 9:50 AM là

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 1.9) &= \int_{-\infty}^{1.9} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{1.9} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{1.9} \frac{3}{343}x^2 dx \\ &= 0 + \int_0^{1.9} \frac{3}{343}x^2 dx \\ &\approx 0.019997. \end{aligned}$$

Biết rằng tiết học đã diễn ra quá 9:53 AM, xác suất để giảng viên kết thúc bài giảng quá 9h05 AM

là

$$\mathbb{P}(X > 5 | X > 3) = \frac{\mathbb{P}[(X > 5) \cap (X > 3)]}{\mathbb{P}(X > 3)} = \frac{\mathbb{P}(X > 5)}{\mathbb{P}(X > 3)} = \frac{\int_5^7 \frac{3}{343} x^2 dx}{\int_3^7 \frac{3}{343} x^2 dx} = \frac{109}{158} \approx 0.68987.$$

c) Kỳ vọng của X là

$$\mu_X \equiv \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^7 x \cdot \frac{3}{343} x^2 dx = \int_0^7 \frac{3}{343} x^3 dx = \frac{21}{4}.$$

d) Ta có

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^7 x^2 \cdot \frac{3}{343} x^2 dx = \int_0^7 \frac{3}{343} x^4 dx = \frac{147}{5}.$$

e) Phương sai của X là

$$\sigma_X^2 \equiv \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{147}{5} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 = \frac{147}{80}.$$

f) Ta có

$$\checkmark \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(0.1X + 3) = 0.1\mathbb{E}(X) + 3 = 0.1 \cdot \frac{21}{4} + 3 = \frac{141}{40}.$$

$$\checkmark \text{Var}(Y) = \text{Var}(0.1X + 3) = 0.1^2 \text{Var}(X) = 0.1^2 \cdot \frac{147}{80} = \frac{147}{8000}.$$

g) Giảng viên sẽ kết thúc trước thời điểm nào với xác suất 90%? \Rightarrow cần tìm x để $\mathbb{P}(X < x) = 90\%$.
Ta có

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{3}{343} t^2 dt = \frac{1}{343} t^3 \Big|_0^x = \frac{1}{343} x^3.$$

$$\text{Để } \mathbb{P}(X < x) = 90\% \Leftrightarrow \frac{1}{343} x^3 = 0.9 \Rightarrow x \approx 6.75842.$$

Vậy giảng viên sẽ kết thúc bài giảng trước 9h06'46" với xác suất 90%.

□

VÍ DỤ 5.2 (Câu 2 - Đề 1 - GKI 20-21). Gọi X là thời gian đến khi hỏng (tính theo năm) của máy ly tâm Beckman Coulter TJ-6. Giả sử hàm mật độ xác suất của X là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(3+x)^3}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác.} \end{cases}$$

a) Tìm giá trị của c .

b) Tính trung bình và trung vị thời gian đến khi hỏng của máy ly tâm.

📖 LỜI GIẢI.

a) Vì f là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X nên $f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow c \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{c}{(3+x)^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{c}{(x+3)^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a c(x+3)^{-3} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} c \cdot \frac{(x+3)^{-2}}{-2} \Big|_0^a \\ &= c \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{-2(x+3)^2} \Big|_0^a \\ &= c \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-2(a+3)^2} - \frac{1}{-18} \right] \\ &= c \cdot \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c \cdot \frac{1}{18} = 1 \Leftrightarrow c = 18.$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{18}{(3+x)^3}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác.} \end{cases}$$

b) Tính trung bình:

$$\text{Ta có } \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{18}{(3+x)^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{18x}{(x+3)^3} dx. \text{ Đặt } t = x+3 \Rightarrow dt = dx.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{18x}{(x+3)^3} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^{a+3} \frac{18(t-3)}{t^3} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^{a+3} \left(\frac{18}{t^2} - \frac{54}{t^3} \right) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{18}{t} + \frac{27}{t^2} \right) \Big|_3^{a+3} \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{18}{a+3} + \frac{27}{(a+3)^2} \right) - \left(-\frac{18}{3} + \frac{27}{3^2} \right) \right] \\ &= 3. \end{aligned}$$

Vậy $\mathbb{E}(X) = 3$. Tìm trung vị:

Gọi m là trung vị của biến ngẫu nhiên X . Khi đó m thỏa mãn $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X \geq m) = \frac{1}{2}$.

Với $m \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq m) &= \int_{-\infty}^m f(x)dx = \int_0^m \frac{18}{(x+3)^3} dx \\ &= \frac{18}{-2(x+3)^2} \Big|_0^m \\ &= \frac{18}{-2(m+3)^2} - \frac{18}{-2 \cdot 3^2} \\ &= -\frac{9}{(m+3)^2} + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Để } \mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{9}{(m+3)^2} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{(m+3)^2} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow (m+3)^2 = 18 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 = -3\sqrt{2} \\ m+3 = 3\sqrt{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3\sqrt{2} - 3 \text{ (loại)} \\ m = 3\sqrt{2} - 3 \text{ (nhận)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy trung vị của X là $m = 3\sqrt{2} - 3$.

□

Một số câu tương tự

- ☑ Câu 2 - Đề 1 - GK1 22-23.
- ☑ Câu 2 - Đề 2 - GK2 22-23.
- ☑ Câu 3 - Đề 1 - GKII 21-22.
- ☑ Câu 2 - Đề 2 - GKI 20-21.
- ☑ Câu 3 - Đề 1 - GKII 20-21.
- ☑ Câu 2 - Đề 2 - GKI 19-20.
- ☑ Câu 2 - Đề 1 - NH 17-18.
- ☑ Câu 2 - Đề 2 - NH 17-18.