CHƯƠNG HAI

QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

TÍCH PHÂN ITÔ

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một không gian xác suất, đặt $\mathcal{X}$ là tập hợp tất cả các biến số ngẫu nhiên. Cho I là một khoảng trong tập các số thực, T là một ánh xạ từ I vào $\mathcal{X}$. Đặt $T(t) = X(t)$ với mọi $t \in I$. Ta nói $\{X(t)\}_{t \in I}$ là một tiến trình ngẫu nhiên.

Thí dụ. Để lập đề án xây dựng một đập thủy điện, chúng ta phải đo lưu lượng nước tại một vị trí nào đó của một dòng sông. Gọi $X(t)$ là lưu lượng tại vị trí đó tại ngày thứ t trong năm. Dĩ nhiên con số $X(t)$ này thay đổi hằng năm, nhưng nếu chúng ta lấy mẫu trong vài mươi năm (ký hiệu tập hợp các năm này là Ω), chúng ta có thể chấp nhận $X(t)(\Omega) = [a_t , b_t]$ với hàm phân phối $P_{X(t)}$ và hàm mật độ $p_{X(t)}$.

Lúc đó ta có một tiến trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}$ thay vì một hàm số thực $t \rightarrow X(t)$. Như vậy chúng ta phải mô hình nhiều bài toán với các phương trình ngẫu nhiên.

A machine is required to continuously produce ropes of length 10 m with a given nominal diameter of 5mm. Despite maintaining constant production conditions, minor variations of the rope diameter can technologically not be avoided.

Thus, when measuring the actual diameter x of a single rope at a distance d from the origin, one gets a function $x = x(d)$ with $0 \leq d \leq 10$.

This function will randomly vary from rope to rope. This suggests the introduction of the generalized random experiment 'continuous measurement of the rope diameter in dependence on the distance d from the origin'.

If $X(d)$ denotes the diameter of a randomly selected rope at a distance d from the origin, then it makes sense to introduce the corresponding generalized random experiment $\{X(d), 0 \le d \le 10\}$ with outcomes $x = x(d)$, $0 \le d \le 10$ (Figure 2.1).

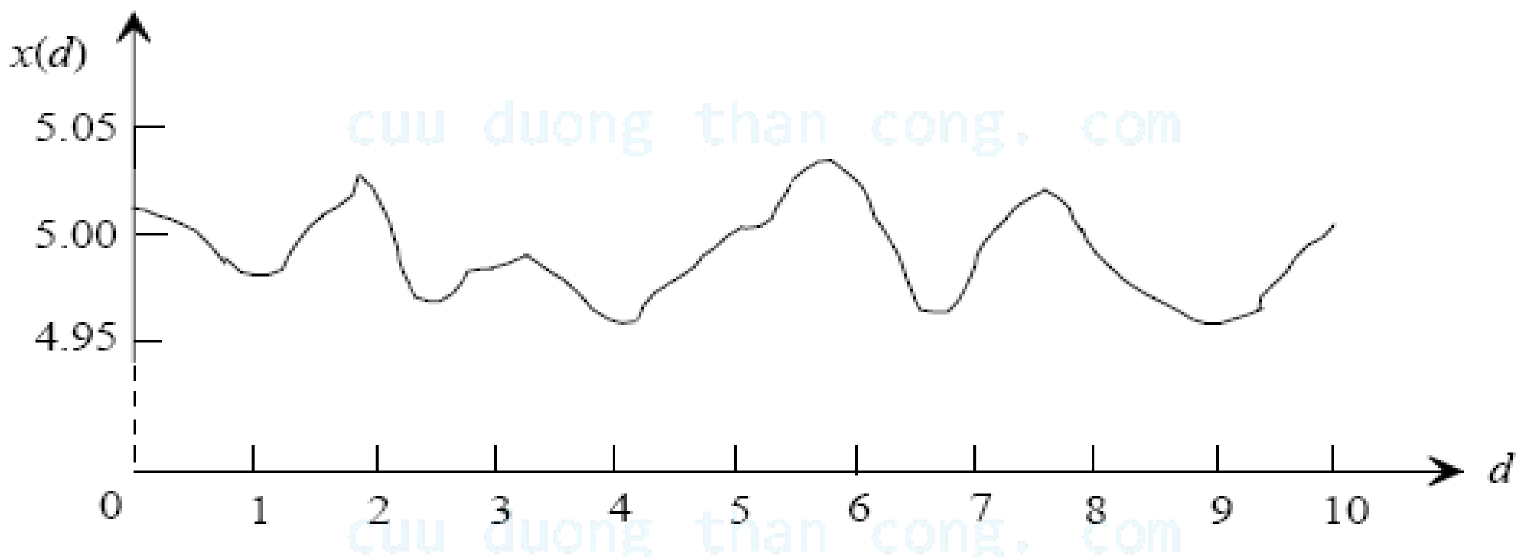

Figure 2.1 Random variation of the diameter of a nylon rope

Nếu Ω là tập hợp các mẫu dây được xét, thì $x(d) = X(w,t)$ với một w nào đó trong Ω.

In an electrical circuit it is not possible to keep the voltage strictly constant. Random fluctuations of the voltage are for instance caused by *thermal noise*.

If $v(t)$ denotes the voltage measured at time point t, then $v = v(t)$ is a sample path of a stochastic process $\{V(t), t \geq 0\}$ where $V(t)$ is the random voltage at time t

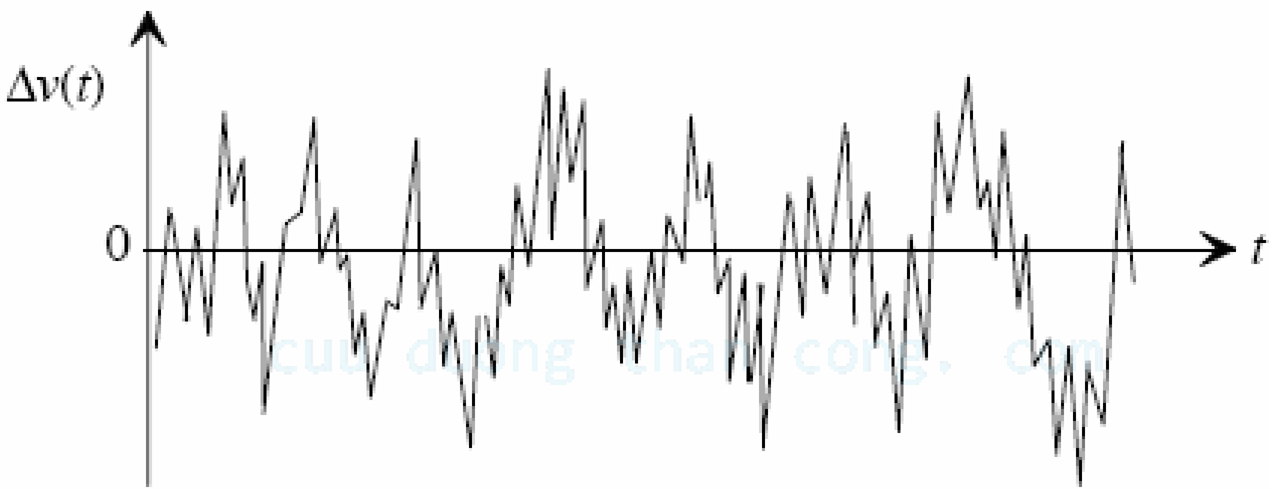

Figure 2.2 Voltage fluctuations caused by random noise

Producers of radar and satellite supported communication systems have to take into account a phenomenon called *fading*. This is characterized by random fluctuations in the energy of received signals caused by the dispersion of radio waves as a result of inhomogeneities in the atmosphere and by *meteorological* and *industrial noise*.

Both meteorological and industrial noise cause electrical discharges in the atmosphere which occur at random time points with randomly varying intensity.

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một không gian xác suất, cho X là một ánh xạ từ $[0,\infty)$ vào tập hợp các biến ngẫu nhiên trong $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ có các tính chất sau :

(i) $X(0) = 0$,

(ii) Có một số thực σ khác không và nếu $0 \le s < t$, thì $X(t) - X(s)$ có phân phối chuẩn $N(0; t\text{-}s)$,

(iii) Nếu $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ thì họ

$\{ X(t_k) - X(t_{k\text{-}1}) : 1 \le k \le n \}$ độc lập.

Lúc đó X được gọi là một tiến trình Wiener hay một chuyển động Brownian

(ii) Có nghĩa

$$E(X(t)-X(s))=\int_\Omega [X(t)-X(s)]dP=0\ ,$$

$$E([X(t)-X(s)]^2)=\int_\Omega [X(t)-X(s)]^2 dP=t-s.$$

(iii) Cho ta :

Đặt $\mathfrak{M}_k$ là σ- đại số nhỏ nhất chứa các tập có dạng $[X_k - X_{k-1}]^{-1}(U)$, với U là các tập mở trong $\mathbb{R}$. Lúc đó

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n)\qquad \forall A_1\in\mathfrak{M}_1,\cdots,A_n\in\mathfrak{M}_n.$$

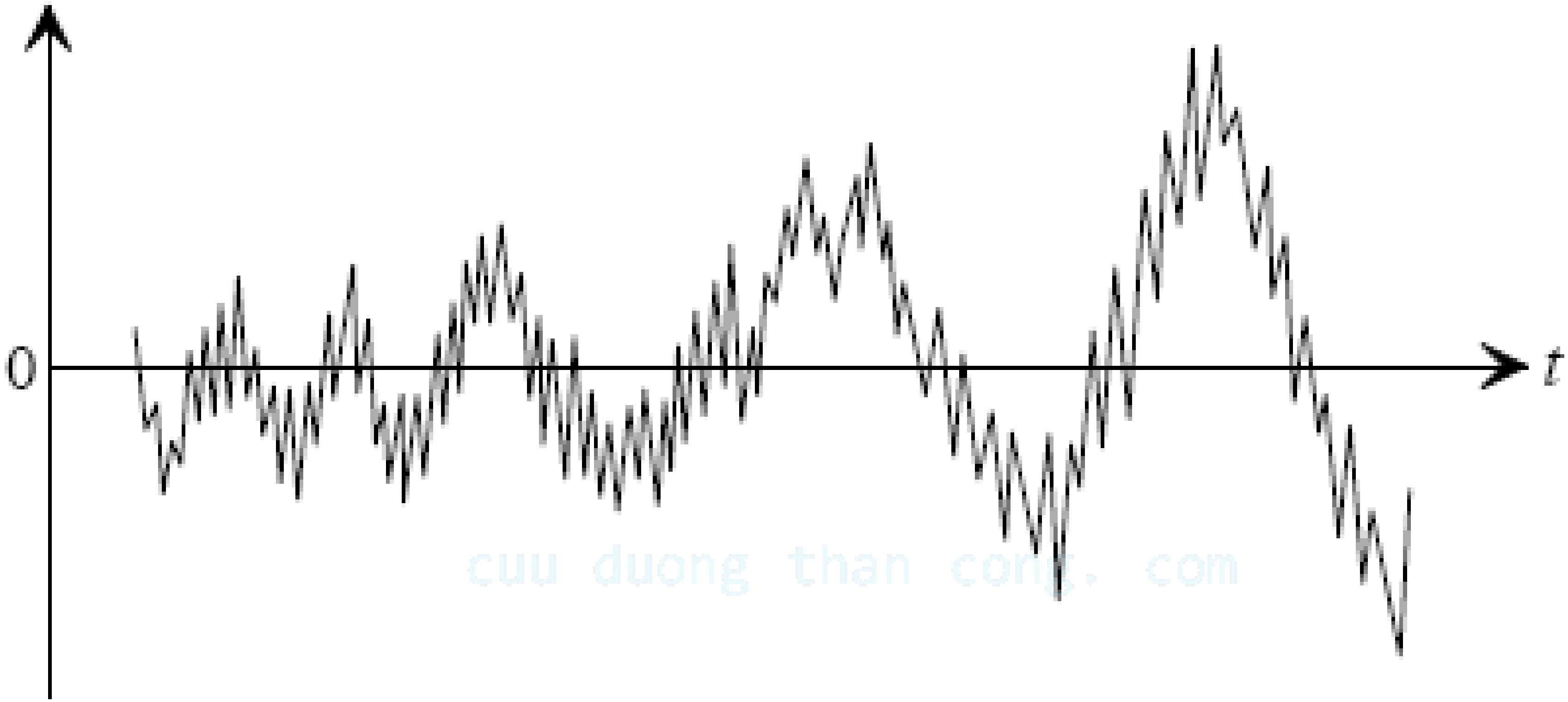

Figure 7.1 Sample path of the Brownian motion

$$E(X(t)-X(s))=\int_{\Omega}[X(t)-X(s)]dP=0\ ,$$

$$E([X(t)-X(s)]^2)=\int_{\Omega}[X(t)-X(s)]^2\,dP=t-s.$$

Bài toán 2.1. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ và $T > 0$. Với mọi số nguyên m lớn hơn 1 và k trong $\{0,1,\ldots,m\}$ ta đặt $t_k = m^{-1}kT$ và

$$G_m = \sum_{k=0}^{m-1} [W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2.$$

Chứng minh dãy $\{G_m\}$ hội tụ về biến số ngẫu nhiên

$G = T\chi_\Omega$ trong $L^2(\Omega)$.

H.D. Để ý

cuu duong than cong . com

$$G_m - G = \sum_{k=0}^{m-1} ([W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k))$$

và từ đó ta có $E([G_m - G]^2) = 2I_1 + I_2$, với

$$I_1 = E(\sum_{0\le j<k}^{m-1}([W(t_{k+1})-W(t_k)]^2-(t_{k+1}-t_k))[W(t_{j+1})-W(t_j)]^2-(t_{j+1}-t_j))$$

$$= E(\sum_{0\le j<k}^{m-1} E([W(t_{k+1})-W(t_k)]^2-(t_{k+1}-t_k))E([W(t_{j+1})-W(t_j)]^2-(t_{j+1}-t_j))$$

$$= 0\ ,$$

$$I_2 = E(\sum_{k=0}^{m-1}([W(t_{k+1})-W(t_k)]^2-(t_{k+1}-t_k))^2 \le I_3+I_4+I_5\ ,$$

$$I_3 = E(\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^4) \le mC(t_{k+1}-t_k)^4 = m^{-3}C,$$

$$I_4 = E(2\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2(t_{k+1}-t_k)^2) \le 2mC(t_{k+1}-t_k)^4 = 2m^{-3}C,$$

$$I_5 = E(\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)^4) \le mC(t_{k+1}-t_k)^4 = m^{-3}C,$$ BT

Định nghĩa. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cho một số thực không âm r , ta đặt

(i) $\mathcal{V}(r)$ là σ-đại số nhỏ nhất chứa các tập $W(s)^{-1}(U)$, với mọi $s \in [0,r]$ và mọi tập mở U trong $\mathbb{R}$. Ta gọi $\mathcal{V}(r)$ là lịch sử của tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ cho đến thời điểm r.

(i) $\mathcal{V}^{+}(r)$ là σ-đại số nhỏ nhất chứa các tập $W(s)^{-1}(U)$, với mọi $s \in [r,\infty)$ và mọi tập mở U trong $\mathbb{R}$. Ta gọi $\mathcal{V}^{+}(r)$ là tương lai của tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ kể từ thời điểm r.

Định nghĩa. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Cho một họ σ- đại số $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ trên Ω sao cho $\mathcal{F}(t) \subset \mathfrak{A}$ với mọi t. Ta nói họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với $\{W(t)\}$ nếu

(i) $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ nếu $0 \leq s \leq t$,

(ii) $\mathcal{V}(t) \subset \mathcal{F}(t)$ với mọi $t \geq 0$,

(iii) $\mathcal{F}(t)$ độc lập $\mathcal{V}^{+}(t)$ với mọi $t \geq 0$.

Lúc đó một tiến trình ngẫu nhiên $\{X(t): t \geq 0\}$ trên $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, được gọi là nonanticipating đối với $\{\mathcal{A}(t)\}$ nếu $X(t)$ đo được trên $(\Omega, \mathcal{A}(t))$ với mọi $t \geq 0$.

Định nghĩa. Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ta đặt $\mathbb{H}^2(0,T, \{\mathcal{F}(t)\})$ là tập hợp các tiến trình ngẫu nhiên $\{X(t) : 0 \le t \le T\}$ có các tính chất sau :

(i) Ánh xạ $(t,\omega) \to X(t)(\omega)$ đo được trên $[0,T]\times\Omega$,

(ii) $\{X(t)\}$ nonanticipating đối với $\{\mathcal{A}(t)\}$,

(iii) $$\int_\Omega \int_{[0,T]} X^2(t,\omega)dtdP \ < \ \infty$$

Tương tự ta đặt $\mathbb{H}^q(0,T) ,\{\mathcal{F}(t)\})$ với $q > 1$, với (iii) thay bằng

(iii') $$\int_\Omega \int_{[0,T]} | X(t,\omega) |^q \ dtdP \ < \ \infty \ .$$

Nếu không có gì để gây ra các nhầm lẫn, ta ký hiệu $\mathbb{H}^2(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ và $\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T},\{\mathcal{F}(t)\})$ lần lượt là $\mathbb{H}^2(0,\mathrm{T})$ và $\mathbb{H}^1(0,\mathrm{T})$.

$\mathbb{H}^2(0,\mathrm{T})$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng và chuẩn sau :

$$< X, Y > = \int_{[0,T]\times\Omega} X(t,\omega)Y(t,\omega)\,dtdP \quad \forall\ X, Y \in \mathbb{H}^2(0,T),$$

$$\| X \| = \left(\int_{[0,T]\times\Omega} X^2(t,\omega)\,dtdP\right)^{1/2} \quad \forall\ X \in \mathbb{H}^2(0,T).$$

Định nghĩa. Cho $G = \{G(t)\}$ trong $\mathbb{H}^2(0,T)$, ta nói G là một tiến trình đơn nếu có các số thực $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, và có m biến ngẫu nhiên $G_0, G_1, \ldots, G_{m-1}$ trong $L^2(\Omega)$ sao cho $G(t) = G_k$ khi $t_k \le t < t_{k+1}$ với mọi k trong tập $\{0, \ldots, m-1\}$.

Lúc đó tích phân ngẫu nhiên Itô của G trên $[0,T]$ là biến số ngẫu nhiên sau

$$I(G) = \sum_{k=0}^{m-1} G(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] .$$

Ta sẽ ký hiệu Itô của G trên $[0,T]$ là $\int_0^T G dW$.

Tập hợp các tiến trình đơn trù mật trong $\mathbb{H}^2(0,T)$.

Bài toán 2.2. Cho G và H là hai tiến trình đơn trong $\mathbb{H}^2(0,T)$, và một số thực c. Chứng minh

(i) $I(G + cH) = I(G) + cI(H)$,

(ii) $E(I(G)) = \int_{\Omega} I(G)dP = 0$,

(iii) $\int_{\Omega} I(G)^2 dP = \int_{[0,T]\times\Omega} G^2(t,\omega)dtdP$.

H.D. (ii) Cho các số thực $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, và có m biến ngẫu nhiên $G_0, G_1, \ldots, G_{m\text{-}1}$ trong $L^2(\Omega)$ sao cho $G(t) = G_k$ khi $t_k \le t < t_{k+1}$ với mọi k trong tập $\{0, \ldots, m - 1\}$.

H.D. (ii) Cho các số thực $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, và có m biến ngẫu nhiên $G_0, G_1, \ldots, G_{m-1}$ trong $L^2(\Omega)$ sao cho $G(t) = G_k$ khi $t_k \le t < t_{k+1}$ với mọi k trong tập $\{0, \ldots, m-1\}$. Lúc đó G_k là hàm $\mathcal{F}(t_k)$-đo được, $(W(t_{k+1}) - W(t_k))$ là hàm $\mathcal{V}^+(t_k)$-đo được, $\mathcal{F}(t_k)$ và $\mathcal{V}^+(t_k)$ độc lập với nhau. Từ đó ta có

$$E(G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = E(G_k).E(W(t_k+1) - W(t_k))$$

Để ý $E(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = 0$.

(iii) Để ý

$$E(I(G)^2) = \sum_{k,j=0}^{m-1} E([G_k G_j (W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))]$$

Khi $j < k$ ta thấy $(W(t_{k+1}) - W(t_k))$ độc lập đối với $G_k G_j\,(W(t_{j+1}) - W(t_j))$. Do đó

$$E([G_k G_j\,(W(t_{j+1}) - W(t_j))(W(t_{k+1}) - W(t_k))]) =$$

$$= \quad E([G_k G_j\,(W(t_{j+1}) - W(t_j))])E((W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

Để ý $E((W(t_{k+1}) - W(t_k)) = 0$. Suy ra

$$E(I(G)^2) = \sum_{k=0}^{m-1} E([G_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2])$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2) E((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2)(t_{k+1} - t_k) = E(G^2)$$

Ta thấy I là một ánh xạ tuyến tính bị chặn từ một không gian vectơ con trù mật trong $\mathbb{H}^2(0,T)$ vào $L^2(\Omega)$. Vậy ta có thể mở rộng ánh xạ I ra cả $\mathbb{H}^2(0,T)$. Lúc đó $I(G)$ là một biến số ngẫu nhiên trên $(\Omega,\mathcal{A},P)$ với mọi G trong $\mathbb{H}^2(0,T)$ và ta cũng có

Bài toán 2.3. Cho G và H trong $\mathbb{H}^2(0,T)$, và số thực c.

Chứng minh

(i) $I(G + cH) = I(G) + cI(H)$,

(ii) $E(I(G)) = \int_{\Omega} I(G)dP = 0$,

(iii) $\int_{\Omega} I(G)^2 dP = \int_{[0,T]\times\Omega} G^2(t,\omega)dtdP$.

Ta gọi $I(G)$ là tích phân Ito của G tương ứng với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ và ký hiệu là

$$\int_0^T G dW$$

Bài toán 2.4. Chứng minh

$$\int_0^T W dW = \tfrac{1}{2} W^2 - \tfrac{1}{2} T.$$

H.D. Với mọi số nguyên m lớn hơn 1 và k trong $\{0,1,. . .,m\}$ ta đặt $t_k = m^{-1}k$ và $G(t) = W(t_k)$ khi $t_k \le t < t_{k+1}$ với mọi k trong tập $\{0, . . . , m -1\}$. Để ý

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1} [W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 + \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 + \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})[W(t_{k+1})-W(t_k)]$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 + W(T)^2 + \sum_{k=0}^{m-2} W(t_{k+1})W(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})W(t_k)$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 + W(T)^2 + \sum_{k=1}^{m-1} W(t_k)W(t_k) - \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})W(t_k)$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 + W(T)^2 + \sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)W(t_k) - \sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)W(t_{k+1})$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2 + W(T)^2 - \sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)[W(t_{k+1})-W(t_k)] = \tfrac{1}{2}W(T)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2$$

Theo bài toán

$$\lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 = \tfrac{1}{2}T$$

Bài toán 2.5. Chứng minh $d(tW) = Wdt + tdW$.

H.D. Cho một số thực thực dương r , với mọi số nguyên dương m ta đặt $t_k = m^{-1}kr$, $k \in \{0, . . ., m\}$. Để ý

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k) + \sum_{k=0}^{m-1} t_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = rW(r).$$

Hay $$rW(r,\omega) = \int_0^r W(t,\omega)dt + \int_0^r tdW.$$

Bài toán 2.6. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Cho X là một tiến trình ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, sao cho $X(t,\omega) = f(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. Chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên $dX = f\,'(t)dt$.

H.D. Để ý $X(r) = X(s) + \int_s^r f\,' dt \quad \forall\ 0 \le s < r \le T$

Bài toán 2.7. Cho f là một hàm thực khả vi trên $\mathbb{R}$. Cho X là một tiến trình ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, sao cho $X(t,\omega) = f(t)F(\omega)$ với mọi $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, và F là một biến ngẫu nhiên khả tích và độc lập với $\mathcal{V}^+(0)$. Chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên $dX = f\,'(t)Fdt$.

H.D. Để ý $X(r) = X(s) + \int_s^r f\,' F dt \quad \forall\ 0 \le s < r \le T$

Bài toán 2.8. Cho X là một tiến trình ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, sao cho $X(t,\omega) = G(\omega)W(t, \omega)$ với mọi $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, và $G \in L^2(\Omega)$ và độc lập với $\mathcal{V}^+(0)$.

Chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên $dX = GdW$.

H.D. Để ý $\int_r^s GdW = GW(s) - GW(r) \quad \forall\ 0 \le r < t.$

Bài toán 2.9. Cho $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một không gian xác suất với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, F trong $L^1(\Omega)$ và G trong $L^2(\Omega)$ và độc lập với $\mathcal{U}^+(0)$. Đặt

$$X(t,\omega) = tF(\omega) + G(\omega)W(t,\omega) \quad \forall\, t \in [0,T],\ \omega \in \Omega,$$

Chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên

$dX = Fdt + GdW.$

H.D. Dùng các bài tập trên.

Bài toán 2.10. Cho $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ là một không gian xác suất với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, F_1 và F_2 trong $L^2(\Omega)$, G_1 và G_2 trong $L^4(\Omega)$ và độc lập với $\mathcal{U}^+(0)$.

Đặt với mọi $i = 1,2$

$X_i(t,\omega) = tF_i(\omega) + G_i(\omega)W(t,\omega) \quad \forall\, t \in [0,T],\ \omega \in \Omega,$

Chứng minh $X = X_1X_2$ có vi phân ngẫu nhiên

$$d(X) = X_2(F_1dt + G_1dW) + X_1(F_2dt + G_2dW) + G_1G_2dt$$

hay $\quad d(X) = X_2dX_1 + X_1dX_2 + G_1G_2dt$

H.D. Ta phải chứng minh

$$d(X) = (2tF_1F_2 + F_1G_2W + F_2G_1W + G_1G_2)dt$$

$$+ (tF_1G_2 + tF_2G_1 + 2G_1G_2\mathrm{W})dW$$

hay

$$X_1(r)X_2(r)=\int_0^r(2tF_1F_2+F_1G_2W+F_2G_1W+G_1G_2)dt$$

$$+\int_0^r(tF_1G_2+tF_2G_1+2G_1G_2W)dW.$$

Để ý

$$\int_0^r(2tF_1F_2+G_1G_2)dt=r^2F_1F_2+rG_1G_2 \quad ,$$

$$\int_0^r(F_1G_2W+F_2G_1W)dt=(F_1G_2+F_2G_1)\int_0^r Wdt \quad ,$$

$$\int_0^r(tF_1G_2+tF_2G_1)dW=(F_1G_2+F_2G_1)\int_0^r tdW \quad ,$$

$$\int_0^r(2G_1G_2W)dW=2G_2G_1\int_0^r WdW=G_2G_1(W^2-r) \quad .$$

Ta có

$$\int_0^r W dt + \int_0^r t dW = rW \quad .$$

Vậy tổng các tích phân ngẫu nhiên trên là

$r^2 F_1 F_2 + (F_1 G_2 + F_2 G_2) rW \; + G_1 G_2 W^2$, chính là $X(r)$.

Nhận xét. Kết quả trên vẫn đúng trường hợp F_i và G_i là các tiến trình ngẫu nhiên đơn.

cuu duong than cong. com