


Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT XÁC SUẤT



I. Khái niệm sự kiện

1. Phép thử : Có thể là một thí nghiệm nào đó hoặc một quan sát hiện tượng nào đó.

2. Sự kiện là kết quả của phép thử.

Thí dụ : Phép thử là tung một súc sắc. Các sự kiện có thể là

$$A_1 = \{\text{Xuất hiện mặt 1 nút}\} = 1$$

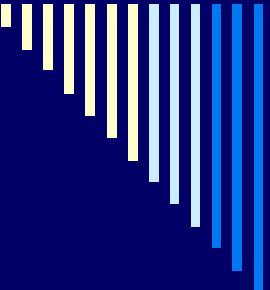
$$A_2 = \{\text{Xuất hiện mặt 2 nút}\} = 2$$

.....

$$A_6 = \{\text{Xuất hiện mặt 6 nút}\} = 6$$

$$A = \{\text{Xuất hiện mặt chẵn nút}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{\text{Xuất hiện mặt lẻ nút}\} = \{1, 3, 5\}$$



Sự kiện chắc chắn : nhất định xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu : Ω .

Trong thí dụ trên $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

Sự kiện không thể : nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu : \emptyset .

Trong thí dụ trên \emptyset là tập rỗng.

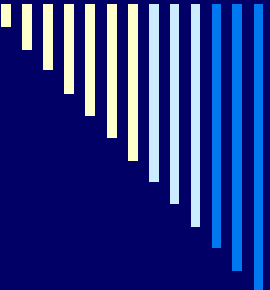
cuu duong than cong. com



3. Quan hệ giữa các sự kiện :

- 1) $A+B$ - Tổng của A và B là sự kiện xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất một trong chúng xảy ra.
- 2) AB - Tích của A và B là sự kiện xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra.
- 3) A và B được gọi là xung khắc nếu A và B không thể cùng xảy ra.

Như vậy : A và B được gọi là xung khắc nếu $AB = \emptyset$.



4) \overline{A} - Đổi lập của A là sự kiện xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Tính chất :

a) $A + \overline{A} = \Omega$

b) $A \overline{A} = \emptyset$

5) $A \subset B$ được gọi là A thuận lợi cho B khi A xảy ra thì B xảy ra.

6) $A = B$ được gọi là A bằng B khi $A \subset B$ và $B \subset A$.



7) Các sự kiện A_1, \dots, A_n được gọi là nhóm đầy đủ nếu

a) Chúng xung khắc từng đôi :

$$A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

b) Nhất định một trong chúng xảy ra :

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$$

Nhận xét : Hai sự kiện A và \overline{A} là nhóm đầy đủ.



II. Khái niệm xác suất

1. Tiên đề của xác suất. Xác suất của sự kiện A là số thực dùng để chỉ khả năng xảy ra của A trong phép thử, ký hiệu là $P(A)$. Xác suất thỏa mãn các tiên đề của Kolmogorov sau đây:

$$T1 : P(A) \geq 0$$

$$T2 : P(\Omega) = 1$$

$T3 : P(A+B) = P(A) + P(B)$ nếu A và B xung khắc.

$$T4 : P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

nếu các A_i ($i=1, 2, \dots$) xung khắc từng đôi.



Tính chất của xác suất :

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$2) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

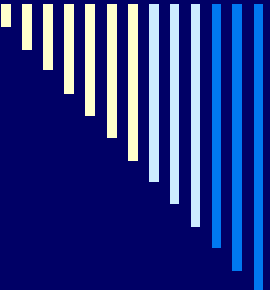
$$3) P(A) \leq P(B) \text{ nếu } A \subset B$$

$$4) 0 \leq P(A) \leq 1$$



2. Không gian các sự kiện sơ cấp :

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gian sự kiện sơ cấp (KGSKSC), ký hiệu là Ω . Phần tử của Ω được gọi là sự kiện sơ cấp (SKSC).
- Các sự kiện sơ cấp (SKSC) có các đặc điểm:
 - Xung khắc từng đôi.
 - Nhất định một trong chúng phải xảy ra.
 - Không thể là tổng của những sự kiện khác.

- 
- Sự kiện là tập con của Ω .
 - Các SKSC của A gọi là các SKSC thuận lợi cho A .
 - A gọi là xảy ra nếu có một SKSC của A xảy ra.
 - $[A]$ – số SKSC của A .

KGSKSC có thể có hữu hạn, vô hạn đếm được hoặc vô hạn không đếm được các SKSC.



3. Định nghĩa xác suất cổ điển :

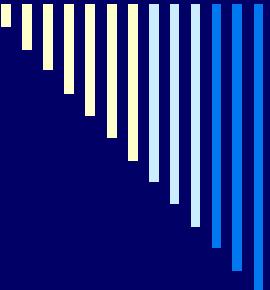
Xét KGSKSC $\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_n \}$:

- Có hữu hạn phần tử.
- Các SKSC đồng khả năng :

$$P(\omega_1) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

Định nghĩa :

$$P(A) = \frac{A}{\Omega}$$



Thí dụ : Hộp có 6 bi đỏ, 4 trắng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bi. Tính xác suất

- a) Được 3 bi đỏ.
- b) Được 2 bi đỏ.
- c) Được ít nhất 1 bi đỏ.

Giải : $\Omega = C_{10}^3$

a) $A = \{ \text{được 3 bi đỏ} \}, \quad P(A) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$

b) $B = \{ \text{được 2 bi đỏ} \}, \quad P(B) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3}$

c) $C = \{ \text{được ít nhất 1 bi đỏ} \}, \quad P(C) = \frac{C_6^1 C_4^2 + C_6^2 C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3}$



Bằng cách khác, ta có

$\bar{C} = \{ \text{Không có bi đỏ nào} \} = \{ \text{Được 3 bi trắng} \}$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3}$$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

4. Định nghĩa xác suất theo hình học :

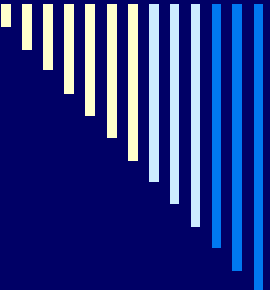
Xét KGSKSC Ω :

- Có vô hạn phần tử.
- Các SKSC đồng khả năng.

Giả sử Ω và sự kiện A có thể biểu diễn bằng các miền hình học. Ký hiệu $m(A)$ và $m(\Omega)$ là kích thước của chúng.

Định nghĩa :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

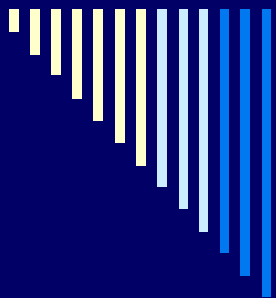


Chúng ta có thể thấy rằng xác suất trong định nghĩa trên chỉ phụ thuộc vào $m(A)$ mà không phụ thuộc vào hình dáng, vị trí của miền A trong miền Ω .

Thí dụ : Bẻ một thanh gỗ thành hai đoạn tại một điểm ngẫu nhiên trên thanh gỗ. Tính xác suất để đoạn nhỏ hơn có chiều dài không quá một phần ba chiều dài thanh gỗ (sự kiện A).

Giải : Ký hiệu a là chiều dài thanh gỗ và x là chiều dài từ điểm gãy đến một đầu cố định của thanh gỗ. Sự kiện A xảy ra khi và chỉ khi

$$0 < x < a/3 \quad \text{hoặc} \quad (2/3)a < x < a$$



Vậy



$$P(A) = \frac{(a/3) + (a/3)}{a} = 2/3$$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com