

Bài giảng

# PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

© Trịnh Anh Ngọc

30/8/2012

## ■ Mục đích

- ▷ Sinh viên nắm được nội dung của phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH).
- ▷ Sinh viên biết áp dụng phương pháp PTHH để giải số các bài toán xuất hiện trong khoa học và kỹ thuật, đặc biệt, trong cơ học và vật lý.
- ▷ Sinh viên có thể tự đọc các sách, bài báo về PTHH.

## ■ Nội dung

1. Nhập môn
2. Lý thuyết cơ bản
3. PTHH cho phương trình đạo hàm riêng
4. PTHH cho lý thuyết đàn hồi

## ■ Tài liệu đọc thêm

**T.A. Ngọc**, *Học Matlab bằng thí dụ*, 2009.

**Rao S.S.**, *The finite element method in engineering*, Pergamon Press, 1989.

**Strang G., Fix G.J.**, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.

*Toán học không phải là Bà hoàng,  
Toán học là Nàng hầu, Người phục vụ của các khoa học  
(Mathematics is a servant, but not a queen).*

Như tất cả chúng ta đều biết, hầu hết các lý thuyết toán đều có nguồn gốc từ cơ học và vật lý, động lực phát triển của nó (các lý thuyết toán) là áp dụng vào (phục vụ cho) các ngành khoa học có thể "rất xa" toán học. Việc học toán, làm toán, vì thế, không thể tách rời các ngành khoa học mà toán học hướng tới. Trong tài liệu này hầu hết các thí dụ được trình bày lấy từ nguồn các bài toán xuất hiện trong cơ học và vật lý. Điều này ban đầu có thể làm "nản lòng" các bạn sinh viên chọn các hướng giải tích, đại số, ...; tuy nhiên, với việc tìm hiểu thêm các lý thuyết cơ học, vật lý tương ứng, việc học toán sẽ trở nên thuận lợi hơn, và nhất là kiến thức toán của người học sẽ trở nên toàn diện hơn.

*Trịnh Anh Ngọc*

**Quy tắc chung về ký hiệu**

Ma trận thường được ký hiệu bằng chữ hoa in đậm ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ), vectơ thường được ký hiệu bằng chữ thường in đậm ( $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dots$ ). Khi đó, các thành phần của chúng được ký hiệu bằng chữ tương ứng in nghiêng ( $A_{12}, A_{ij}, \dots; p_1, p_k, \dots$ ).

Ngoài ra, trong tài liệu, ký hiệu  $\{\cdot\}$  chỉ vectơ để phân biệt với ký hiệu  $[\cdot]$  chỉ ma trận.

cuu duong than cong . com

# Chương 1

## Nhập môn

### 1.1 Dẫn nhập

**Phương pháp PTHH** là một phương pháp giải số tìm nghiệm xấp xỉ của các phương trình đạo hàm riêng xuất hiện trong khoa học và kỹ thuật. Khác với phương pháp sai phân hữu hạn, xấp xỉ trực tiếp phương trình đạo hàm riêng (xấp xỉ đạo hàm), phương pháp phần tử hữu hạn dùng công thức biến phân của bài toán biên (dạng tích phân của bài toán). Trong phương pháp PTHH miền tính toán (miền xác định của phương trình đạo hàm riêng) được phân hoạch thành các miền con gọi là phần tử hữu hạn, và nghiệm của phương trình đạo hàm riêng được xấp xỉ bằng các đa thức đơn giản trên mỗi phần tử.

**Kiến thức cần biết:** Toán học cao cấp (giải tích, đại số tuyến tính), phương trình vật lý toán, cơ học kết cấu<sup>1</sup>.

**Phương tiện tính toán:** Phần mềm Matlab<sup>2</sup>.

#### Lịch sử của PTHH

+ Công thức PTHH đầu tiên được phát triển như là phương pháp ma trận của cơ học kết cấu.

+ Courant (1943) đưa ra hệ gồm các phần tử tam giác (triangular elements) lắp ghép với nhau và cực tiểu thế năng (potential energy) để giải xấp xỉ bài toán xoắn (cf. R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bulletin of American Mathematical Society, 49, 1-23, (1943)).

+ Clough đề nghị tên gọi "phần tử hữu hạn" (cf. M.J. Turner, R.W.

---

<sup>1</sup>Hai môn học cuối không bắt buộc phải học trước, sinh viên có thể tham khảo thêm khi cần.

<sup>2</sup>Sinh viên không yêu cầu phải biết về Matlab, cách sử dụng Matlab sẽ được giới thiệu dần trong giáo trình.

Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures, Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-824 (1956)).

+ Phát triển ban đầu của phương pháp được thực hiện bởi các kỹ sư trong lĩnh vực cơ học kết cấu; về sau cơ sở toán học được thiết lập cho PTHH, từ đó mở rộng áp dụng PTHH cho các lĩnh vực khác.

## 1.2 Phép tính biến phân

Để đơn giản ta xét trường hợp hàm một biến.

Cho phiếm hàm (functional)  $F(x, u, u')$  với  $u = u(x)$  và  $u' = du/dx$ .

*Biến phân* (variation) của  $u$ , ký hiệu  $\delta u$ , là một hàm biểu diễn "biến thiên của  $u$ "

$$u + \delta u$$

tương tự như số gia  $\Delta x$  biểu diễn "biến thiên của  $x$ "

$$x + \Delta x.$$

Nếu  $u$  được cho trước tại một điểm (thường là điều kiện biên) thì biến phân của  $u$  phải bằng không tại đó, thí dụ

$$u(x_0) = u_0 \Rightarrow \delta u(x_0) = 0.$$

Vì biến phân  $\delta u$  triệt tiêu tại các điểm được cho trước, nhưng lấy giá trị tùy ý tại các điểm khác nên  $\delta u$  còn được gọi là *biến thiên ảo*.

Tương tự như phép tính vi phân của hàm nhiều biến, biến phân cấp một của phiếm hàm  $F$  tại  $u$  được định nghĩa là

$$\delta F = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x, u + \alpha \delta u, u' + \alpha \delta u') - F(x, u, u')}{\alpha}. \quad (1.1)$$

Dùng công thức vi phân toàn phần cho  $F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')$  tại  $(x, u, u')$  với  $x$  cố định,

$$F(x, u + \alpha \delta u, u' + \alpha \delta u') - F(x, u, u') \approx \frac{\partial F}{\partial u} \alpha \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \alpha \delta u',$$

ta có

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'. \quad (1.2)$$

Chú ý sự tương tự giữa biến phân cấp một với vi phân toàn phần của hàm  $F$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du'.$$

Với phép tính biến phân  $x$  không thay đổi khi  $u$  biến thiên thành  $u + \delta u$  nên  $dx = 0$  và sự tương tự giữa  $\delta F$  và  $dF$  trở nên rõ ràng. Nghĩa là, *toán tử biến phân  $\delta$  tác động như toán tử vi phân đối với các biến phụ thuộc*.

Ta có các công thức sau:

1.  $\delta(F \pm G) = \delta F \pm \delta G$ .
2.  $\delta(FG) = \delta F G + F \delta G$ .
3.  $\delta \left( \frac{F}{G} \right) = \frac{\delta F G - F \delta G}{G^2}$ .
4.  $\delta(F)^n = n F^{n-1} \delta F$ .
5.  $\frac{d}{dx}(\delta u) = \delta \left( \frac{du}{dx} \right)$ .
6.  $\delta \int_a^b u(x) dx = \int_a^b \delta u(x) dx$ .

**Thí dụ 1.1.** Phiếm hàm năng lượng của dầm chịu uốn:

$$I(w) = \int_0^l \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + w f \right] dx - \frac{dw}{dx}(l) M_0$$

Sử dụng các công thức trên ta có

$$\delta I(w) = \int_0^l \left( b \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \delta w f \right) dx - \frac{d \delta w}{dx}(l) M_0.$$

◇

**Nhận xét 1.1.** Trong cơ học môi trường liên tục, ta có hai khái niệm quan trọng: *chuyển dịch khả dĩ* và *chuyển dịch ảo*. Bởi định nghĩa, chuyển dịch khả dĩ là chuyển dịch bất kỳ thỏa điều kiện biên động học, chuyển dịch ảo là hiệu của hai chuyển dịch khả dĩ. Như vậy chuyển dịch ảo thỏa điều kiện biên động học thuần nhất. Nếu gọi  $w$  là một chuyển dịch khả dĩ,  $u$  là chuyển dịch thực (một trường hợp của chuyển dịch khả dĩ) thì chuyển dịch ảo là  $\delta u = w - u$ . Nói khác đi, chuyển dịch ảo chính là biến phân của chuyển dịch thực  $u$ , hay chuyển dịch khả dĩ là tổng của chuyển dịch thực với chuyển dịch ảo,  $w = u + \delta u$ .

•

**Nhận xét 1.2.** Sự tương tự giữa phép tính biến phân với phép tính vi phân:



Phép tính vi phân	Phép tính biến phân
Hàm số $f(x)$	Phiếm hàm $I(u)$
Đổi số - $x$ (số thực)	Đổi số - $u$ (hàm số)
Số gia vô cùng bé $dx$	Biến phân $\delta u$
Vi phân của hàm số, $df$	Biến phân của phiếm hàm, $\delta I$
Điều kiện đạt cực trị của hàm số $df = 0$ với mọi $dx$	Điều kiện đạt cực trị của phiếm hàm $\delta I = 0$ với mọi $\delta u$

•

## 1.3 Các phương pháp số

PTHH được xây dựng trên cơ sở phương pháp biến phân (variational method). Mục này giới thiệu một số thể hiện của nó.

### 1.3.1 Phương pháp Ritz

Giải bài toán cực tiểu hóa phiếm hàm  $I(v)$ ,  $v \in V$  (trong các bài toán cơ học thì  $V$  là tập hợp tất cả các "chuyển dịch" khả dĩ).

Phương pháp Ritz tìm nghiệm xấp xỉ dưới dạng tổng hữu hạn

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0, \quad (1.3)$$

trong đó  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , là các hàm chọn trước; các hệ số  $c_j$ , gọi là hệ số Ritz, được chọn sao cho

$$I_N(c_1, \dots, c_N) := I(u_N) \rightarrow \min \quad (1.4)$$

Điều kiện cần để  $I(c_1, c_2, \dots, c_N)$  đạt cực trị là các đạo hàm riêng của nó đối với mỗi hệ số Ritz triệt tiêu:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \frac{\partial I}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial I}{\partial c_N} = 0. \quad (1.5)$$

Trong các bài toán tuyến tính, hệ (1.5) gồm  $N$  phương trình đại số tuyến tính với  $N$  ẩn  $c_1, c_2, \dots, c_N$ .

■ **Tính chất của các hàm  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ )**

▷ Hàm  $\varphi_0$  được chọn thỏa *điều kiện biên cốt yếu* (điều kiện biên Dirichlet) của bài toán.

▷ Các hàm  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , thỏa điều kiện biên cốt yếu thuần nhất.

▷ Hơn nữa, các  $\varphi_i$  cần thỏa thêm các điều kiện sau:

- (i)  $I(u_N)$  được xác định tốt,
- (ii) Với  $N$  bất kỳ, tập hợp  $\{\varphi_i\}$  là độc lập tuyến tính,
- (iii)  $\{\varphi_i\}$  là đầy đủ.

Các yêu cầu (i) – (iii) bảo đảm, với các bài toán tuyến tính, sự hội tụ của nghiệm Ritz tới nghiệm chính xác khi  $N$  tăng. Sự hội tụ được hiểu theo nghĩa sau

$$I(u_N) \geq I(u_M) \quad \text{khi } N \leq M. \quad (1.6)$$

### 1.3.2 Phương pháp dư số có trọng

Phương pháp dư số có trọng (weighted residual method) là một tổng quát hóa của phương pháp Ritz.

Cho  $L$  là toán tử đạo hàm, xét phương trình toán tử

$$Lu = f \quad \text{trong } \Omega, \quad (1.7)$$

ngoài ra hàm  $u$  (nghiệm) còn thỏa các điều kiện biên.

Trong phương pháp dư số có trọng, nghiệm  $u$  được xấp xỉ theo cách giống như phương pháp Ritz (1.3). Thay xấp xỉ (1.3) vào phương trình toán tử (1.7) kết quả là dư số

$$E = Lu_N - f \neq 0. \quad (1.8)$$

Ngay khi  $\varphi_0$  và các  $\varphi_i$  đã được chọn,  $E$  là hàm của các biến độc lập và các tham số  $c_j$ . Trong phương pháp dư số có trọng, các tham số được xác định bằng cách đặt tích phân của tích dư số có trọng với các hàm trọng lượng (weighted function) bằng 0,

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) E(x, y, c_j) dx dy = 0, \quad (1.9)$$

trong đó  $\psi_i$  là các hàm trọng lượng. Hiển nhiên  $\{\psi_i\}$  phải là tập độc lập tuyến tính.

Nói chung, các hàm trọng lượng  $\psi_i$  không giống các hàm  $\varphi_i$ . Tùy theo cách chọn  $\psi_i$  ta có các phương pháp khác nhau:

■ **Phương pháp Galerkin**  $\varphi_i = \psi_i$ . PTHH thường được thiết lập trên cơ sở phương pháp này. Khi toán tử  $L$  là toán tử đạo hàm tuyến tính cấp chẵn, thì phương pháp Galerkin dẫn về phương pháp Ritz.

■ **Phương pháp Petrov - Galerkin**  $\varphi_i \neq \psi_i$ .

### 1.3.3 Phương pháp bình phương tối thiểu

Phương pháp bình phương tối thiểu (least-squares method) tìm nghiệm ở dạng (1.3) và xác định các tham số bằng cách cực tiểu hóa tích phân của bình phương dư số. Điều kiện cực tiểu:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} E^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

hay

$$\int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial c_i} E dx dy = 0. \quad (1.10)$$

### 1.3.4 Phương pháp đồng vị

Phương pháp đồng vị (collocation method) hay phương pháp chọn điểm tìm nghiệm xấp xỉ  $u_N$  của phương trình (1.7) ở dạng (1.3) bằng cách đòi hỏi dư số trong phương trình triệt tiêu tại  $N$  điểm chọn trước  $\mathbf{x}^i = (x^i, y^i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) trong miền  $\Omega$ :

$$E(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.11)$$

Sự chọn lựa các điểm  $\mathbf{x}^i$  là cốt yếu để nhận được một hệ phương trình chỉnh (well-conditional) và cho nghiệm xấp xỉ tốt. Phương pháp đồng vị là một trường hợp đặc biệt của (1.9) với  $\psi_i(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$ , trong đó  $\delta$  là hàm delta Dirac

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}).$$

### 1.3.5 Thí dụ minh họa

Cho bài toán biên: tìm hàm  $u(x)$ ,  $0 < x < 1$ , thỏa phương trình vi phân

$$u'' + f = 0, \quad (1.12)$$

và các điều kiện biên

$$u(1) = g, \quad (1.13)$$

$$-u'(0) = h, \quad (1.14)$$

trong đó  $f(x)$  là hàm và  $g, h$  là các hằng số cho trước. Điều kiện (1.13) là điều kiện biên cốt yếu, điều kiện (1.14) là điều kiện biên tự nhiên.

#### ■ Công thức biến phân (yếu)

Ký hiệu:

$S = \{s | s \in H^1(0, 1), s(1) = g\}$  là tập hợp các hàm thử (test function);

$V = \{v | v \in H^1(0, 1), v(1) = 0\}$  là tập hợp các hàm trọng lượng<sup>3</sup>.

Nhân hai vế phương trình (1.12) với hàm trọng lượng  $v \in V$  bất kỳ, lấy tích phân từ 0 đến 1,

$$\int_0^1 (u'' + f)v dx = 0.$$

Dùng công thức tích phân từng phần, sau một số biến đổi, ta được

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + hv(0). \quad (1.15)$$

Gọi  $\varphi_0$  là hàm thuộc  $S$ , đặt  $u = \varphi_0 + w$  thì  $w \in V$  và phương trình (1.15) thành

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + hv(0) - \int_0^1 \varphi_0'(x)v'(x)dx. \quad (1.16)$$

Trên  $V$  đưa vào ánh xạ  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$a(w, v) = \int_0^1 w'(x)v'(x)dx \quad (1.17)$$

và ánh xạ  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx + hv(0) - \int_0^1 \varphi_0'(x)v'(x)dx. \quad (1.18)$$

Từ (1.16)-(1.18), bài toán biên (1.12)-(1.14) dẫn về bài toán biến phân tuyến tính: tìm  $w \in V$  thỏa phương trình biến phân

$$a(w, v) = l(v) \quad (1.19)$$

với mọi  $v \in V$ .

**Nhận xét 1.3.** 1) Ký hiệu  $H^1(0, 1)$  chỉ không gian Sobolev các hàm cùng với đạo hàm cấp 1 bình phương khả tích (thuộc  $L^2(0, 1)$ ). Về không gian Sobolev xem Phụ lục A. •

2) Có thể chứng minh:  $a$  là dạng song tuyến tính đối xứng trên  $V$ ,  $l$  là dạng tuyến tính trên  $V$ .

3) Cách trình bày công thức biến phân trong thí dụ minh họa là theo lý thuyết biến phân trong giải tích hàm. Về bài toán biến phân tuyến tính trườ tượng xem Phụ lục B. •

<sup>3</sup>Trong trường hợp  $g \neq 0$ ,  $V$  là không gian vectơ còn  $S$  thì không.

Trong các phương pháp dưới đây ta tìm nghiệm xấp xỉ  $u_N(x)$  dưới dạng

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0,$$

trong đó hàm  $\varphi_0$  thỏa điều kiện (1.13), các hàm  $\varphi_i$  thỏa điều kiện thuần nhất,  $\varphi_i \in V$ .

### ■ Phương pháp dư số có trọng

Chọn các hàm trọng lượng  $\psi_i \in V$  ( $i = 1, \dots, N$ ), bài toán xấp xỉ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i \int_0^1 \varphi'_i(x) \psi'_j(x) dx &= \int_0^1 f(x) \psi_j(x) dx \\ &+ h \psi_j(0) - \int_0^1 \varphi'_0(x) \psi'_j(x) dx \end{aligned}$$

hay

$$\sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \psi_j) = l(\psi_j) \quad (1.20)$$

với  $j = 1, \dots, N$ .

Nếu  $\psi_i = \varphi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) thì bài toán xấp xỉ:

$$\sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j) \quad (1.21)$$

với  $j = 1, \dots, N$ .

Tính toán bằng Matlab. Các tính toán dưới đây được thực hiện cho trường hợp cụ thể:  $f(x) = \sin \pi x$ ,  $g = h = 0$ . Nghiệm chính xác:

$$y = \frac{1}{\pi} \left( 1 - x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right).$$

Do điều kiện biên Dirichlet tại  $x = 1$  là thuần nhất nên  $\varphi_0 \equiv 0$ . Chọn các hàm  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , lần lượt là

$$\varphi_1(x) = 1 - x, \quad \varphi_2(x) = (1 - x)^2, \quad \varphi_3(x) = (1 - x)^3, \quad \varphi_4(x) = (1 - x)^4.$$

Nghiệm xấp xỉ  $u_3(x)$  được tìm dưới dạng

$$u_4(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x) + c_4 \varphi_4(x).$$

Khi đó phương trình biến phân:

$$\int_0^1 u'_4(x) \varphi'_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx,$$

với  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Sai số được tính theo chuẩn  $L^2(0, 1)$ ,

$$err = \left( \int_0^1 |u(x) - u_N(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

trong đó  $u$  là nghiệm chính xác.

```
% matlab1
% Chương trình giải bài toán (1.12)-(1.14)
% bằng phương pháp Galerkin
clear all
syms x c1 c2 c3 c4 real
f=sin(pi*x);
% Nghiệm chính xác
u=1/pi*(1-x+sin(pi*x)/pi);
% Các hàm thử cơ sở
phi1=1-x; phi2=(1-x)^2; phi3=(1-x)^3; phi4=(1-x)^4;
% Dạng nghiệm xấp xỉ
uN=c1*phi1+c2*phi2+c3*phi3+c4*phi4;
% Phương trình biến phân
pt1=int(diff(uN)*diff(phi1)-f*phi1,0,1);
pt2=int(diff(uN)*diff(phi2)-f*phi2,0,1);
pt3=int(diff(uN)*diff(phi3)-f*phi3,0,1);
pt4=int(diff(uN)*diff(phi4)-f*phi4,0,1);
% Giải phương trình đại số
[a,b,c,d]=solve(pt1,pt2,pt3,pt4);
uN=eval(subs(uN,{c1,c2,c3,c4},{a,b,c,d}))
% Sai số
ss=sqrt(int((u-uN)^2,x,0,1))
Kết quả:
uN = (1495068416581*(x - 1)^2)/35184372088832
- (89191421139795*x)/140737488355328
+ (100747121811885*(x - 1)^3)/140737488355328
+ (201494243623771*(x - 1)^4)/562949953421312
+ 89191421139795/140737488355328
ss = 5.8016e-005
```

Với phương pháp Petrov-Galerkin ta dùng các hàm trọng lượng:

$$\psi_1(x) = 1 - x, \quad \psi_2(x) = 1 - x^2, \quad \psi_3(x) = 1 - x^3, \quad \psi_4(x) = 1 - x^4.$$

Khi đó phương trình biến phân:

$$\int_0^1 u'_4(x) \psi'_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \psi_j(x) dx,$$

với  $j = 1, 2, 3, 4$ .

```
% matlab2
% Chương trình giải bài toán (1.12)-(1.14)
% bằng phương pháp Petrov-Galerkin
clear all
syms x c1 c2 c3 c4 real
f=sin(pi*x);
% Nghiệm chính xác
u=1/pi*(1-x+sin(pi*x)/pi);
% Các hàm thử cơ sở
phi1=1-x; phi2=(1-x)^2; phi3=(1-x)^3; phi4=(1-x)^4;
% Dạng nghiệm xấp xỉ
uN=c1*phi1+c2*phi2+c3*phi3+c4*phi4;
% Các hàm trọng lượng cơ sở
psi1=1-x; psi2=1-x^2; psi3=1-x^3; psi4=1-x^4;
% Phương trình biến phân
pt1=int(diff(uN)*diff(psi1)-f*psi1,0,1);
pt2=int(diff(uN)*diff(psi2)-f*psi2,0,1);
pt3=int(diff(uN)*diff(psi3)-f*psi3,0,1);
pt4=int(diff(uN)*diff(psi4)-f*psi4,0,1);
% Giải phương trình đại số
[a,b,c,d]=solve(pt1,pt2,pt3,pt4);
uN=eval(subs(uN,{c1,c2,c3,c4},{a,b,c,d}))
% Sai số
ss=sqrt(int((u-uN)^2,x,0,1))
Kết quả:
uN = (23921094665323*(x - 1)^2)/562949953421312
- (2854125476473405*x)/4503599627370496
+ (201494243623779*(x - 1)^3)/281474976710656
+ (201494243623799*(x - 1)^4)/562949953421312
+ 2854125476473405/4503599627370496
ss = 5.8016e-005
```

### ■ Phương pháp Ritz

Để ý rằng, hàm  $v$  trong phương trình (1.15) là biến phân của  $u$ ,  $v = \delta u$ , nên

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)(\delta u)'(x)dx - \int_0^1 f(x)\delta u(x)dx - h\delta u(0) &= 0 \\ \delta \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx - hu(0) \right] &= 0 \\ \delta I(u) &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

trong đó

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx - hu(0) \quad (1.23)$$

là phiếm hàm năng lượng (energy functional) liên kết với bài toán.

Từ phương trình (1.22) ta có thể kết luận: nghiệm  $u$  của bài toán biên (1.12)-(1.14) là điểm cực trị của phiếm hàm  $I$ .

Phương pháp Ritz được áp dụng từ đây. Ta có

$$\begin{aligned} I_N(c_1, \dots, c_n) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i'(x) \right)^2 dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N c_i \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx - h \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(0). \end{aligned}$$

Điều kiện cần để hàm đạt cực trị là

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial I_N}{\partial c_j} &= \int_0^1 \left( \varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i'(x) \right) \varphi_j'(x) dx \\ &\quad - \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx - h \varphi_j(0) \end{aligned}$$

hay

$$\sum_{i=1}^N c_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j) \quad (1.24)$$

với  $j = 1, \dots, N$ .



Phương trình (1.24) cũng chính là phương trình (1.21) của phương pháp Galerkin.

### ■ Phương pháp bình phương tối thiểu

Xét tích phân

$$I(u) = \int_0^1 (u''(x) + f(x))^2 dx. \quad (1.25)$$

Khác với các phương pháp trước, trong phương pháp bình phương tối thiểu ta chọn  $\varphi_0$  thỏa các điều kiện biên không thuần nhất, nghĩa là

$$-\varphi'_0(0) = h, \quad \varphi(1) = g;$$

các hàm  $\varphi_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) thỏa các điều kiện biên thuần nhất.

Thay  $u$  trong (1.25) bằng xấp xỉ  $u_N$  của nó, ta được:

$$I_N(c_1, \dots, c_N) = I(u_N) = \int_0^1 \left( \varphi_0''(x) + \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j''(x) + f(x) \right)^2 dx$$

Điều kiện cần để  $I_N$  đạt cực trị là

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_N}{\partial c_i} &= 0 \\ 2 \int_0^1 \left( \varphi_0''(x) + \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j''(x) + f(x) \right) \varphi_i''(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

hay

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_0^1 \varphi_j''(x) \varphi_i''(x) dx = - \int_0^1 (\varphi_0''(x) + f(x)) \varphi_i''(x) dx \quad (1.26)$$

với  $j = 1, \dots, N$ .

Tính toán bằng Matlab

Ta dùng các hàm thử:

$$\varphi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_i(x) = \cos^i \frac{\pi x}{2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

```
% matlab3
```

```
% Chương trình giải bài toán (1.12)-(1.14)
```

```
% bằng phương pháp bình phương tối thiểu
```

```
clear all
```

```

syms x c1 c2 c3 c4 real
f=sin(pi*x);
% Nghiệm chính xác
u=1/pi*(1-x+sin(pi*x)/pi);
% Các hàm thử cơ sở
phi1=cos(pi*x/2); phi2=(cos(pi*x/2))^2; phi3=(cos(pi*x/2))^3;
phi4=(cos(pi*x/2))^4;
% Dạng nghiệm xấp xỉ
uN=c1*phi1+c2*phi2+c3*phi3+c4*phi4;
% Điều kiện cực trị
pt1=int(diff(uN,2)*diff(phi1,2)+f*diff(phi1,2),0,1);
pt2=int(diff(uN,2)*diff(phi2,2)+f*diff(phi2,2),0,1);
pt3=int(diff(uN,2)*diff(phi3,2)+f*diff(phi3,2),0,1);
pt4=int(diff(uN,2)*diff(phi4,2)+f*diff(phi4,2),0,1);
% Giải phương trình đại số
[a,b,c,d]=solve(pt1,pt2,pt3,pt4);
uN=eval(subs(uN,{c1,c2,c3,c4},{a,b,c,d}))
% Tính sai số dùng tích phân số (trapezoidal method)
X=0:0.1:1;
for i=1:length(X)
    Y(i)=subs((u-uN)^2,x,X(i));
end
ss=sqrt(trapz(X,Y))
Kết quả
uN = (488779120053*cos((pi*x)/2)^3)/255710199902656
- (1276933759907*cos((pi*x)/2)^4)/18265014278761
- (18474093048533*cos((pi*x)/2)^2)/1022840799610616
+ (103661858454009*cos((pi*x)/2))/255710199902654
ss = 4.1343e-004

```

### ■ Phương pháp đồng vị

Các hàm thử cũng được chọn như phương pháp bình phương tối thiểu. Dư số khi thay  $u$  bằng  $u_N$  là

$$E_N(x; c_1, \dots, c_N) = \varphi_0''(x) + \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j''(x) + f(x).$$

Chọn  $N$  điểm  $x_i \in [0, 1]$  và cho  $E_N(x_i; c_1, \dots, c_N) = 0$  ta được hệ

$$\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j''(x_i) = -f(x_i) - \varphi_0''(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.27)$$

Tính toán bằng Matlab

Ta dùng các hàm thử như chương trình trên cùng các điểm:

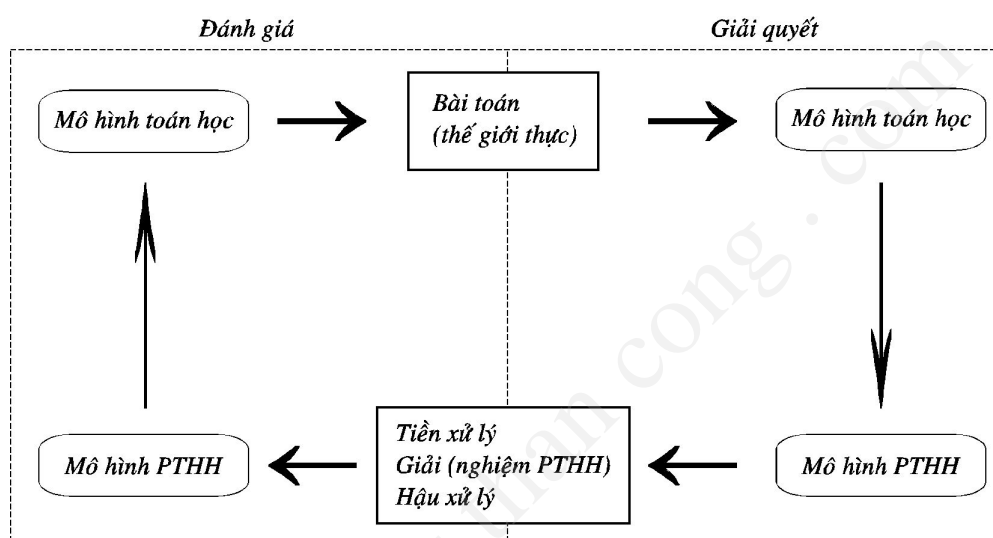
$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}.$$

```
% matlab4
% Chương trình giải bài toán (1.12)-(1.14)
% bằng phương pháp đồng vị
clear all
syms x c1 c2 c3 c4 real
f=sin(pi*x);
% Nghiệm chính xác
u=1/pi*(1-x+sin(pi*x)/pi);
% Các hàm thử cơ sở
phi1=cos(pi*x/2); phi2=(cos(pi*x/2))^2; phi3=(cos(pi*x/2))^3;
phi4=(cos(pi*x/2))^4;
% Dạng nghiệm xấp xỉ
uN=c1*phi1+c2*phi2+c3*phi3+c4*phi4;
% Các điểm chọn
x1=1/5; x2=2/5; x3=3/5; x4=4/5;
% Phương trình xác định
pt=diff(uN,2)+f;
pt1=subs(pt,x,x1);
pt2=subs(pt,x,x2);
pt3=subs(pt,x,x3);
pt4=subs(pt,x,x4);
% Giải phương trình đại số
[a,b,c,d]=solve(pt1,pt2,pt3,pt4);
uN=eval(subs(uN,{c1,c2,c3,c4},{a,b,c,d}))
% Tính sai số dùng tích phân số
X=0:0.1:1;
for i=1:length(X)
    Y(i)=subs((u-uN)^2,x,X(i));
end
ss=sqrt(trapz(X,Y))
Kết quả
uN = (6668211310297337*cos((pi*x)/2)^3)/144115188075855872
- (5450331490489545*cos((pi*x)/2)^4)/72057594037927936
- (2257630529011381*cos((pi*x)/2)^2)/36028797018963968
+ (7852094546758685*cos((pi*x)/2))/18014398509481984
ss = 0.0156
```

## 1.4 Ứng dụng của phương pháp PTHH

### 1.4.1 Tổng quan

Quá trình giải quyết một bài toán trong khoa học và kỹ thuật bằng phương pháp PTHH được thể hiện bằng sơ đồ mô tả trên hình 1.1 gồm hai giai đoạn.



Hình 1.1: Sơ đồ giải một bài toán khoa học và kỹ thuật.

★ Giai đoạn 1 – Giải quyết – Bài toán vật lý được toán học hóa bằng mô hình toán học. Mô hình toán học, sau đó, được rời rạc hóa và giải bằng phương pháp PTHH.

★ Giai đoạn 2 – Đánh giá – Kiểm tra độ tin cậy của kết quả PTHH. Các loại sai số: (1) sai số mô hình (mô hình toán học, mô hình PTHH); (2) sai số thuật toán; (3) sai số làm tròn (biểu diễn số trong máy tính). Hiệu chỉnh (nếu cần).

Đặc biệt, trong cơ học môi trường liên tục, phương pháp PTHH có thể được dùng cho nhiều loại phân tích:

- Phân tích tuyến tính, tĩnh.
- Phân tích tuyến tính, động.
- Phân tích trị riêng về cộng hưởng.
- Phân tích biến dạng lớn.
- Mô phỏng phục vụ thiết kế.

Đối tượng của môn học: Áp dụng phương pháp PTHH cho các bài toán biên (phương trình đạo hàm riêng), đặc biệt, các bài toán xuất hiện trong cơ học, tập trung vào giai đoạn 1 – mô hình PTHH và giải số.

### 1.4.2 Một số bài toán cơ học và vật lý

Một số bài toán cơ học và vật lý sẽ được dùng đến trong giáo trình.

#### 1. Truyền nhiệt (1-chiều)

Phương trình truyền nhiệt trong thanh chiều dài  $L$ , tiết diện  $A = A(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}A = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad (1.28)$$

trong đó  $T = T(x, t)$  là nhiệt độ (tuyệt đối),  $\dot{q}$  tốc độ phát sinh nhiệt trên đơn vị thể tích (do nguồn nhiệt),  $c$  là nhiệt dung,  $\rho$  là mật độ khối.

Các trường hợp đặc biệt:

a) Nếu  $\dot{q} = 0$  ta có phương trình Fourier

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.29)$$

b) Nếu quá trình dừng ta có phương trình Poisson

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}A = 0. \quad (1.30)$$

c) Nếu quá trình dừng và  $\dot{q} = 0$  ta có phương trình Laplace.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.31)$$

#### 2. Dòng chảy 1-chiều

$$\frac{d}{dx}(\rho Au) = 0, \quad (1.32)$$

trong đó  $\rho$  là mật độ khối,  $A$  là diện tích tiết diện ngang,  $u$  là vận tốc dòng chảy.

Nếu dòng chảy không nhớt thì tồn tại hàm  $\varphi(x)$ , gọi là thế vận tốc, sao cho

$$u = \frac{d\varphi}{dx} \quad (1.33)$$

và phương trình (1.32) thành

$$\frac{d}{dx} \left( \rho A \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0. \quad (1.34)$$

3. Thanh chiều dài  $L$  chịu tải dọc trục

$$AE \frac{\partial u}{\partial x} = \text{lực tác dụng}, \quad 0 < x < L, \quad (1.35)$$

trong đó  $E$  là môđun Young,  $A$  là diện tích tiết diện ngang,  $u$  là chuyển dịch dọc trục.

Nếu lực tác dụng là hằng thì phương trình thành

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Điều kiện biên của các bài toán trên thuộc một trong các loại: Dirichlet (cho giá trị hàm cần tìm), Neumann (cho giá trị đạo hàm của hàm cần tìm), và Robin (tổ hợp cả hai điều kiện Dirichlet và Neumann). Ngoài ra, với các bài toán phụ thuộc thời gian cần phải cho cả điều kiện đầu.

## Bài tập chương 1

1. Cho phiếm hàm  $I(u)$  định bởi

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 [-(u')^2 + u^2 + 2xu] dx.$$

Tính biến phân cấp một  $\delta I$  của phiếm hàm  $I$ .

ĐS:

$$\delta I = \int_0^1 [-u'(\delta u)' + (u + x)\delta u] dx.$$

2. Cho bài toán biên: tìm hàm  $u$  thỏa phương trình vi phân

$$u'' + u + x = 0, \quad 0 < x < 1,$$

với các điều kiện biên

$$u(0) = u(1) = 0$$

a) tìm phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán.

b) Giải bài toán bằng phương pháp Galerkin hoặc Ritz với

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = \sin(\pi x), \quad \varphi_2(x) = \sin(2\pi x), \quad \varphi_3(x) = \sin(3\pi x).$$

HD:  $S = V = \{v \in H^1(0, 1), v(0) = v(1) = 0\}$ . Bài toán biến phân:

$$\int_0^1 [-u'v' + uv + xv]dx = 0$$

với mọi  $v \in V$ .

a) Để tìm phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán, thay  $v$  bằng ký hiệu biến phân  $\delta u$  của  $u$ .

b) Nghiệm xấp xỉ dạng:

$$\begin{aligned} u_3 &= c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 \\ &= c_1 \sin(\pi x) + c_2 \sin(2\pi x) + c_3 \sin(3\pi x). \end{aligned}$$

Thay vào phương trình biến phân ta được hệ:

$$\begin{cases} -c_1(\pi^3 - \pi) - 2 &= 0 \\ -c_2(4\pi^3 - \pi) + 1 &= 0 \\ -c_3(27\pi^3 - 3\pi) - 2 &= 0 \end{cases}$$

Giải:

$$c_1 = \frac{2}{\pi(\pi^2 - 1)}, \quad c_2 = -\frac{1}{\pi(4\pi^2 - 1)}, \quad c_3 = \frac{2}{3\pi(9\pi^2 - 1)}.$$

Vậy,

$$u_3 = \frac{2 \sin(\pi x)}{\pi(\pi^2 - 1)} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi(4\pi^2 - 1)} + \frac{2 \sin(3\pi x)}{3\pi(9\pi^2 - 1)}.$$

So sánh kết quả với nghiệm chính xác  $u_{cx} = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$ , hình 1.2.

**3.** Cho phiếm hàm  $I(u)$  định bởi

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u_x, u_{xx})dx,$$

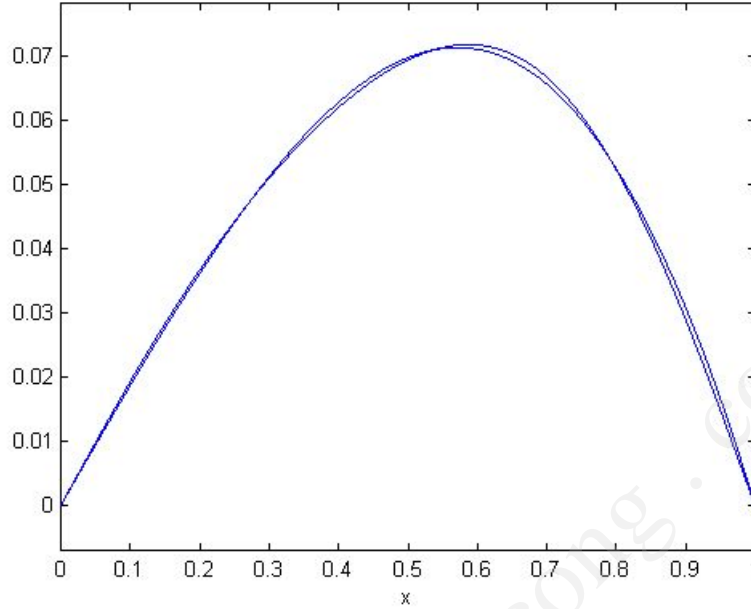
trong đó  $u = u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , các ký hiệu  $u_x$ ,  $u_{xx}$  để chỉ đạo hàm cấp một và hai của  $u$  theo biến  $x$ .

a) Tính  $\delta I$ .

b) tìm điều kiện cần để  $I$  đạt cực trị.

ĐS:

$$a) \delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \delta u_{xx} \right) dx.$$



Hình 1.2: Nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ.

b)  $\delta I = 0$ . Biến đổi  $\delta I$ ,

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \right] \delta u dx \\ &\quad + \left[ \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \delta u \right]_a^b + \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \delta u_x \right]_a^b. \end{aligned}$$

Do biến phân  $\delta u$  tùy ý, từ điều kiện  $\delta I = 0$  suy ra

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) = 0, \quad (1.37)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \delta u \right]_a^b = 0, \quad (1.38)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \delta u_x \right]_a^b = 0. \quad (1.39)$$

Phương trình (1.37) được gọi là phương trình Euler hay phương trình Euler-Lagrange; các phương trình (1.38), (1.39) cho điều kiện biên.



## 4. Xét bài toán biên

$$L[u] := -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.40)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.41)$$

a) Phát biểu biến phân.

b) Dùng phương pháp dư số có trọng tìm nghiệm xấp xỉ với

$$\varphi_j(x) = \psi(x) = \sin j\pi x, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

c) Chứng tỏ rằng: nếu dùng (1.9) với

$$\psi_j(x) = \delta(x - x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

trong đó  $\delta(x)$  là hàm delta Dirac thỏa

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

và

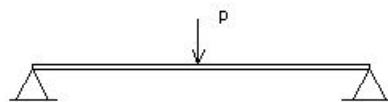
$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1.$$

thì ta được kết quả của phương pháp đồng vị; nghĩa là, nghiệm thỏa phương trình vi phân (1.40) tại các điểm  $x_j$ .

**5.** Độ võng của dầm chiều dài  $L$ , chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều  $p$ , thỏa phương trình

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - p = 0, \quad (1.42)$$

trong đó  $E$  là môđun Young,  $I$  là mômen quán tính của dầm.



Hình 1.3: Bài tập 5.

Bằng phương pháp Galerkin, tìm độ võng của dầm với các điều kiện biên (ngàm):

$$w(0) = w(L) = 0, \quad (1.43)$$

$$EI \frac{dw}{dx}(0) = EI \frac{dw}{dx}(L) = 0. \quad (1.44)$$

# Chương 2

## Lý thuyết cơ bản

*Luôn luôn có cách biểu diễn tốt hơn!  
Bắt chước rồi sáng tạo.*

Chương này trình bày: các ý tưởng cơ bản của phương pháp PTHH, cách áp dụng PTHH giải bài toán khoa học kỹ thuật, còn gọi là mô hình hóa PTHH. Với định hướng ứng dụng PTHH giải các bài toán khoa học kỹ thuật, ban đầu, cách thức mô hình hóa và cả lập trình tính toán PTHH được trình bày cho một bài toán cơ học kết cấu đơn giản - bài toán kéo thanh dọc trục. Sau đó, mở rộng ra cho phương trình đạo hàm riêng. Do cách trình bày vấn đề cô đọng, dùng ngôn ngữ ma trận, nên công việc của người đọc khá nặng nề. Hãy đọc kỹ cho thấu đáo và kiểm tra cẩn thận các bước bằng giấy bút.

### 2.1 PTHH như là phương pháp xấp xỉ hàm

Ý tưởng cơ bản của PTHH là xấp xỉ hàm. Đặc điểm của phép xấp xỉ này là giá trị xấp xỉ của hàm tại một điểm chỉ phụ thuộc vào giá trị (cho trước) của hàm tại vài điểm "khá gần" nó.

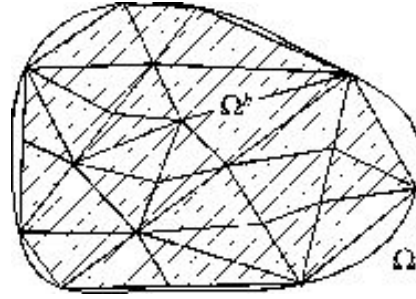
Cho hàm  $f(\mathbf{x})$  xác định trên miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ).

#### 2.1.1 Phép phân hoạch PTHH

Xấp xỉ hàm bắt đầu bằng sự phân hoạch  $\Omega$  thành các miền con  $\Omega^e$ , gọi là *phần tử hữu hạn* (finite element), có hình học đơn giản. Các phần tử hữu hạn được xác định nhờ các điểm, gọi là *nút* (node) *hình học*. Nói chung, phép phân hoạch phải thỏa hai điều kiện:

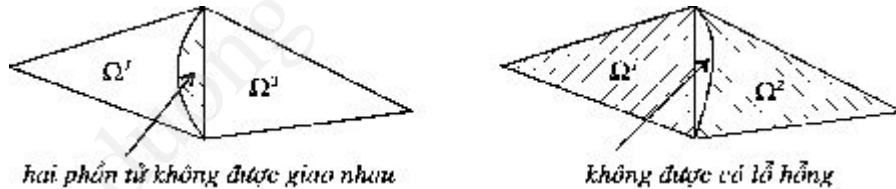
1) Hội các phần tử tạo thành miền  $\Omega_h$  xấp xỉ miền  $\Omega$ ,

$$\Omega \approx \Omega_h = \bigcup_e \Omega^e;$$



Hình 2.1: Xấp xỉ PTHH miền  $\Omega$ .

2) Các phần tử hữu hạn khác nhau không "dẫm lên" nhau. giữa hai phần tử có chung nhau hơn hai nút hình học, thì phần biên của chúng đi qua các điểm chung này phải trùng nhau. Nói khác đi, phép phân hoạch PTHH không làm xuất hiện các "lỗ hổng".

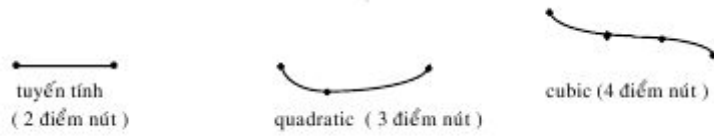


Hình 2.2: Tính chất của phép phân hoạch.

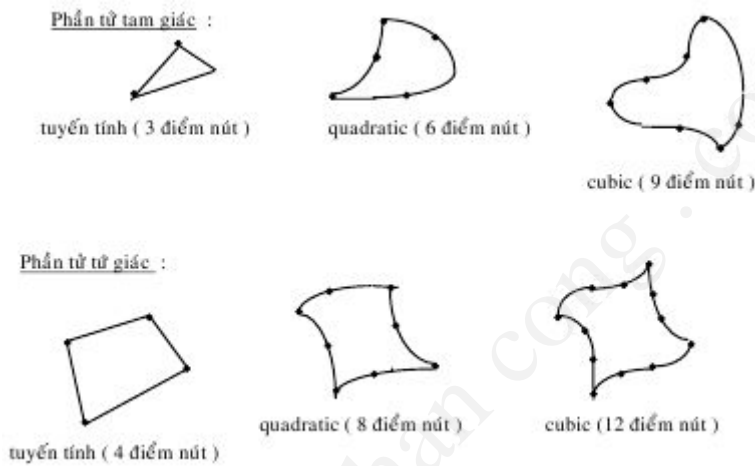
### 2.1.2 Các loại phần tử hữu hạn

Tùy theo thứ nguyên  $d$  của miền  $\Omega$  và số điểm nút (của phần tử) ta có các loại phần tử hữu hạn khác nhau. Việc chọn loại phần tử góp phần chỉ định cách xấp xỉ hàm trong phần tử ấy.

- 1) Phần tử 1-chiều là các đoạn thẳng hay cong (hình 2.3)
- 2) Phần tử 2-chiều là các tam giác hoặc tứ giác với các cạnh là đường cong bậc nhất, bậc hai hay bậc ba (hình 2.4).
- 3) Phần tử 3-chiều là các khối tứ diện, lục diện (hình 2.5).



Hình 2.3: Phần tử hữu hạn 1-chiều.



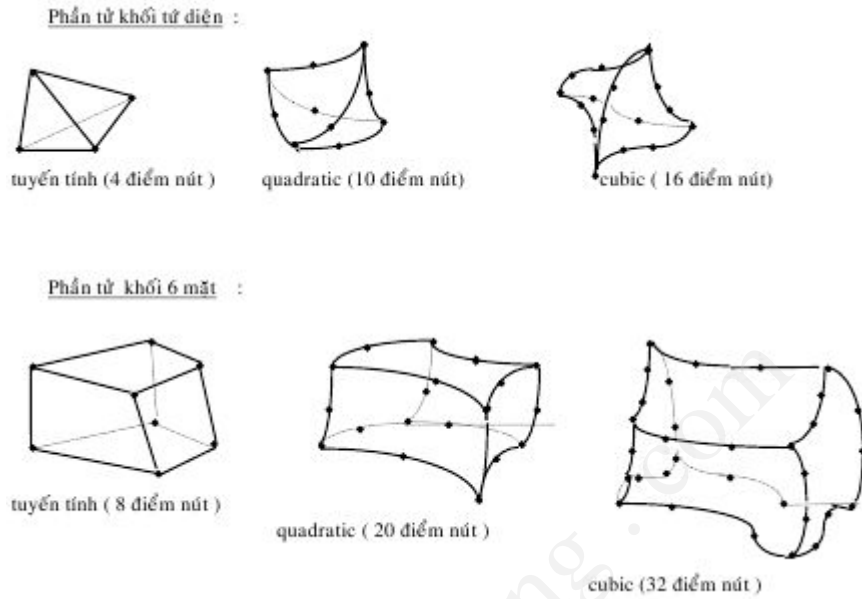
Hình 2.4: Phần tử hữu hạn 2-chiều.

### 2.1.3 Phần tử tham chiếu

Một đặc điểm quan trọng của xấp xỉ phần tử hữu hạn là tính địa phương của phép xấp xỉ. Xấp xỉ của hàm trên mỗi phần tử chỉ phụ thuộc vào các giá trị của hàm tại các nút, gọi là *nút nội suy*, nằm trong phần tử ấy. vì vậy ta có thể xây dựng phép xấp xỉ trên một phần tử đặc thù (cùng loại, đơn giản)  $\Omega^r$  gọi là *phần tử tham chiếu*. Xấp xỉ của hàm trên một phần tử thực  $\Omega^e$  bất kỳ có thể nhận được nhờ phép biến đổi (song ánh)  $\tau^e$  biến phần tử tham chiếu thành phần tử thực.

**Thí dụ 2.1. Phần tử tham chiếu 1-chiều** là đoạn  $\Omega^r = [0, 1]$  trên trục tọa độ  $\xi$  với các nút  $\xi_1 = 0$  và  $\xi_2 = 1$ . Với phần tử thực  $\Omega^e$  trên trục tọa độ  $x$  với các nút tương ứng  $x_i, x_j$ , phép biến đổi  $\tau^e : \xi \mapsto x$ , biến  $\Omega^r$  thành  $\Omega^e$ , là ánh xạ affine

$$\tau^e(\xi) = a\xi + b,$$



Hình 2.5: Phần tử hữu hạn 3-chiều.

trong đó các hằng số  $a, b$  được xác định bởi các tương ứng:

$$\begin{cases} \tau^e(\xi_1) = x_i, \\ \tau^e(\xi_2) = x_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_j - x_i, \\ b = x_i \end{cases}$$

Như vậy, phép tương ứng giữa điểm  $\xi \in \Omega^r$  với điểm  $x \in \Omega^e$ :

$$x = (1 - \xi)x_i + \xi x_j \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.1)$$

**Nhận xét 2.1.** Trong hình học affine, điểm  $x$  nằm trên đoạn thẳng nối hai điểm  $x_i, x_j$  được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của hai điểm này

$$x = \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_j \quad (2.2)$$

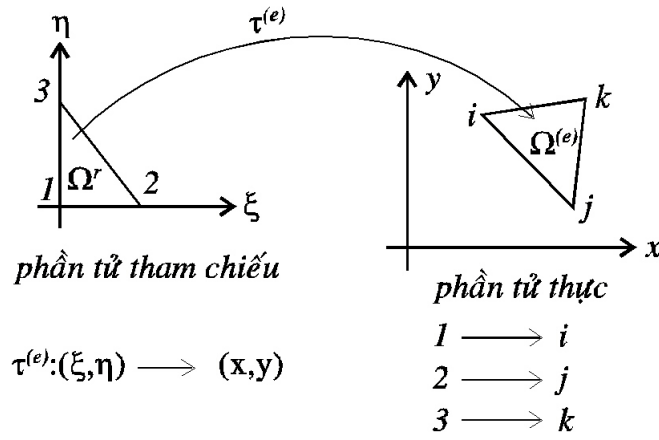
với  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  và  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Khi đó,  $(\lambda_1, \lambda_2)$  gọi là *tọa độ trọng tâm* (barycentric coordinates) của  $x$  đối với hai điểm  $x_i, x_j$ .

So sánh với công thức biến đổi (2.1), ta có:

$$\lambda_1 = 1 - \xi, \quad \lambda_2 = \xi.$$

Hai hàm này xác định phép biến đổi  $\tau^e : [0, 1] \rightarrow [x_i, x_j]$ .

•

Hình 2.6: Phép biến đổi  $\tau^e$ .

**Nhận xét 2.2.** Các hàm  $\lambda_1, \lambda_2$  là các đa thức bậc nhất theo  $\xi$ , trong đó các hệ số được xác định từ điều kiện Kronecker  $\lambda_i(\xi_k) = \delta_{ik}$ .

•

**Thí dụ 2.2.** Phần tử tham chiếu 2-chiều tam giác là tam giác  $\Omega^r$  với các đỉnh  $\xi_1 = (0, 0)$ ,  $\xi_2 = (1, 0)$ ,  $\xi_3 = (0, 1)$  trong mặt phẳng tọa độ  $\xi\eta$ . Phần tử tam giác bất kỳ  $\Omega^e$  với các nút  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ ,  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$  trong mặt phẳng tọa độ  $xy$  được biến đổi từ phần tử tham chiếu nhờ phép biến đổi

$$\mathbf{x} = A\xi + B, \quad (2.3)$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

là ma trận và vectơ hằng được xác định bởi các hệ thức:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i = A\xi_1 + B, \\ \mathbf{x}_j = A\xi_2 + B, \\ \mathbf{x}_k = A\xi_3 + B, \end{cases}$$

Giải ra, ta được

$$A = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Như vậy, sự tương ứng giữa điểm  $\xi$  và điểm  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1 - \xi - \eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

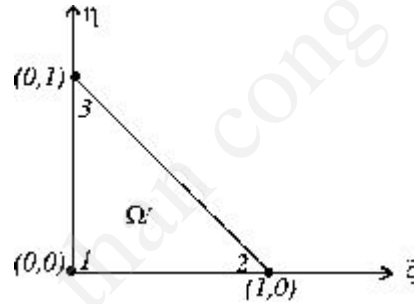
hay

$$\mathbf{x} = (1 - \xi - \eta)\mathbf{x}_i + \xi\mathbf{x}_j + \eta\mathbf{x}_k. \quad (2.7)$$

Các hàm

$$\lambda_1 = 1 - \xi - \eta, \quad \lambda_2 = \xi, \quad \lambda_3 = \eta. \quad (2.8)$$

là các tọa độ trọng tâm của  $\mathbf{x}$  đối với ba điểm  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$ .



Hình 2.7: Phần tử tham chiếu tam giác 3 nút.

Tổng quát, trong  $\mathbb{R}^d$  PTHH đơn giản nhất là  $d$ -*đơn hình* - bao lồi của  $d+1$  điểm  $\mathbf{x}_i$  ( $i=1,2,\dots,d+1$ ) độc lập tuyến tính trong  $\mathbb{R}^d$ .  $d$ -*đơn hình* tham chiếu có các đỉnh:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (0, 0, \dots, 0), \\ \xi_2 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \xi_3 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \xi_{d+1} &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Ký hiệu:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  là điểm thuộc phần tử thực;

$\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d]^T$  là điểm thuộc phần tử tham chiếu.

$\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,d}]^T$  là các đỉnh của phần tử thực.

Phép biến đổi Affine giữa phần tử tham chiếu và phần tử thực:

$$\mathbf{x} = A\boldsymbol{\xi} + B. \quad (2.9)$$

Từ điều kiện  $A\boldsymbol{\xi}_i + B = \mathbf{x}_i$  ta có ngay

$$B = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,d} \end{bmatrix}, \quad A(:, i) = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{i+1,1} - x_{1,1} \\ x_{i+1,2} - x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{i+1,d} - x_{1,d} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, d).$$

Phép biến đổi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(1 - \sum_{k=1}^d \xi_k\right) \mathbf{x}_1 + \xi_1 \mathbf{x}_2 + \xi_2 \mathbf{x}_3 + \dots + \xi_d \mathbf{x}_{d+1} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 + \dots + \lambda_{d+1} \mathbf{x}_d, \end{aligned}$$

trong đó  $\lambda_i$  là tọa độ trọng tâm của  $\mathbf{x}$ :

$$\lambda_1 = 1 - \sum_{k=1}^d \xi_k, \quad \lambda_2 = \xi_1, \quad \lambda_3 = \xi_2, \dots, \lambda_{d+1} = \xi_d.$$

**Nhận xét 2.3.** Khái niệm tọa độ trọng tâm là khái niệm quan trọng và tiện lợi. Các hàm xác định trên phần tử nếu biểu diễn được theo các tọa độ trọng tâm thì việc lấy tích phân trên phần tử sẽ rất đơn giản. Ta có công thức

$$\int_{\Omega} \lambda_1^a \lambda_2^b \lambda_3^c dx dy = 2|\Omega| \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}, \quad (2.10)$$

trong đó  $|\Omega|$  là diện tích của  $\Omega$ . •

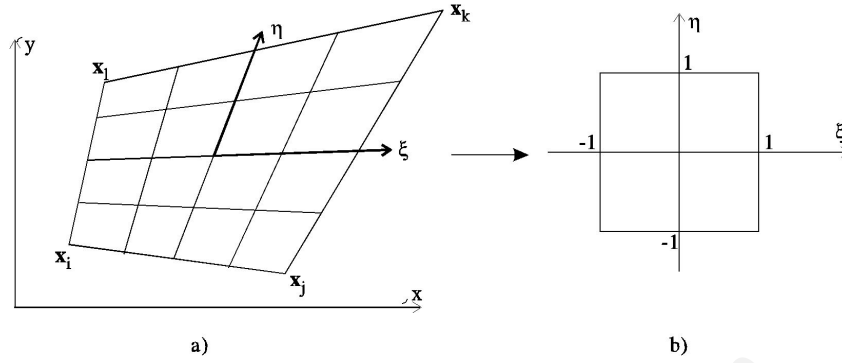
**Thí dụ 2.3. Phần tử tham chiếu 2-chiều tứ giác.** Xét phần tử tứ giác bất kỳ  $\Omega^e$  với các nút  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ ,  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$ ,  $\mathbf{x}_l = (x_l, y_l)$  trong mặt phẳng tọa độ  $xy$ , đưa vào hệ tọa địa phương có các đường tọa độ  $\xi, \eta$  là hai họ đường thẳng phân đều bốn cạnh của tứ giác (hình 2.8a)). Lấy điểm trung tâm của hai họ này làm gốc bằng cách đặt  $\xi = \eta = 0$ , vẽ các trục  $\xi, \eta$  theo hướng tăng của  $\xi, \eta$ , đồng thời lấy giá trị trên bốn cạnh là  $\pm 1$ , thì ta thu được hình vuông  $\Omega^r$  với các đỉnh:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, -1), \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1), \quad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1), \quad \boldsymbol{\xi}_4 = (-1, 1)$$

trong hệ tọa độ  $\xi\eta$  (hình 2.8b)). Hình vuông  $\Omega^e$  là phần tử tham chiếu 2-chiều tứ giác.

Để xây dựng phép biến đổi từ phần tử tham chiếu  $\Omega^r$  sang phần tử thực  $\Omega^e$  ta cần đến một số khái niệm của lý thuyết nội suy siêu hạn.





Hình 2.8: Phần tử hữu hạn tứ giác.

**Định nghĩa 2.1.** Cho  $\mathcal{L}$  là không gian vectơ và  $\tilde{\mathcal{L}}$  là không gian con đóng của nó. Một ánh xạ tuyến tính  $\mathbf{P} : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$  có tính chất lũy đẳng (idempotent), nghĩa là

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P},$$

được gọi là phép chiếu từ  $\mathcal{L}$  lên  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Cho  $\mathcal{L}$  là không gian các hàm (hai biến) liên tục xác định trên  $\Omega^r$ , và  $\tilde{\mathcal{L}}$  là không gian các hàm liên tục trên  $\Omega^r$ , sao cho đạo hàm theo  $\xi$  tồn tại và là hằng số. Xét phép chiếu  $\mathbf{P} : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$  xác định bởi

$$\mathbf{P}_\xi(f) = \frac{1-\xi}{2}f(-1, \eta) + \frac{\xi+1}{2}f(1, \eta). \quad (2.11)$$

Ta thấy,  $\mathbf{P}(f)$  giữ nguyên giá trị của hàm  $f$  dọc theo các cạnh thẳng đứng  $\xi = \pm 1$  của phần tử tham chiếu, và nội suy tuyến tính giá trị của nó giữa  $\xi = -1$  và  $\xi = 1$  dọc theo các cạnh nằm ngang  $\eta = \text{const}$ .

Tương tự cho các đường nằm ngang  $\eta = \pm 1$

$$\mathbf{P}_\eta(f) = \frac{1-\eta}{2}f(\xi, -1) + \frac{\eta+1}{2}f(\xi, 1). \quad (2.12)$$

Tích của hai phép chiếu  $\mathbf{P}_\xi$  và  $\mathbf{P}_\eta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\xi \circ \mathbf{P}_\eta(f) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}f(-1, -1) + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}f(1, -1) \\ &\quad + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}f(1, 1) + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}f(-1, 1) \\ &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}f(\xi_1) + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}f(\xi_2) \\ &\quad + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}f(\xi_3) + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}f(\xi_4), \end{aligned} \quad (2.13)$$

cũng là một phép chiếu. Bằng cách kiểm trực tiếp, dùng (2.11) - (2.13), có thể chỉ ra rằng

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_\xi(f) + \mathbf{P}_\eta(f) &= \mathbf{P}_\xi \circ \mathbf{P}_\eta(f) = \\
 &= \frac{1-\xi}{2}f(-1, \eta) + \frac{\xi+1}{2}f(1, \eta) \\
 &\quad + \frac{1-\eta}{2}f(\xi, -1) + \frac{\eta+1}{2}f(\xi, 1) \\
 &\quad - \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}f(\xi_1) - \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}f(\xi_2) \\
 &\quad - \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}f(\xi_3) - \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}f(\xi_4) \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

nội suy hàm  $f$  chính xác trên cả bốn cạnh của hình vuông  $\Omega^r$ .

Bây giờ, ta xây dựng phép biến đổi phần tử tham chiếu  $\Omega^r$  thành phần tử thực  $\Omega^e$ ,

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

Để ý rằng các điểm  $(1, \eta)$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  (trên cạnh  $\xi_2\xi_3$ ), tương ứng với các điểm  $(x, y)$  trên cạnh  $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ ; do đó,

$$x(1, \eta) = \frac{x_2 + x_3}{2} + \eta \frac{x_3 - x_2}{2}. \quad (2.15)$$

Tương tự với các cạnh còn lại, ta có:

$$x(-1, \eta) = \frac{x_1 + x_4}{2} + \eta \frac{x_4 - x_1}{2}, \quad (2.16)$$

$$x(\xi, 1) = \frac{x_4 + x_3}{2} + \xi \frac{x_3 - x_4}{2}, \quad (2.17)$$

$$x(\xi, -1) = \frac{x_2 + x_1}{2} + \xi \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (2.18)$$

Dùng công thức (2.14) với  $f$  thay bằng  $x$ , sau một số biến đổi, ta thu được:

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} + x_2 \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\
 &\quad + x_3 \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} + x_4 \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Do tính đối xứng, bằng cách thay  $x, x_1, x_2, x_3, x_4$ , tương ứng, bằng  $y, y_1, y_2, y_3, y_4$  trong công thức trên ta thu được công thức biến đổi cho thành phần tung

độ. Đặt:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}, \quad (2.20)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}, \quad (2.21)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}, \quad (2.22)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}. \quad (2.23)$$

Khi đó công thức biến đổi có thể viết dưới dạng vectơ:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i N_i(\underline{\xi}). \quad (2.24)$$

**Nhận xét 2.4.** Phép chiếu (2.11) có thể dễ dàng được tổng quát hóa thành nội suy hàm  $f$  chính xác dọc theo  $m + 1$  đường thẳng đứng  $\xi = \xi_i$ ,

$$-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = 1,$$

$$\mathbf{P}_v(f) = \sum_{i=0}^m f(\xi_i, \eta) \theta_i^v(\xi), \quad (2.25)$$

trong đó

$$\theta_i^v(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j},$$

$i = 0, 1, \dots, m$  là những hàm nội suy Lagrange cơ sở. Trong khuôn khổ lý thuyết nội suy siêu hạn (transfinite interpolation), các hàm  $\theta_i^v$  được gọi là các hàm uốn (blending function). Vì cả hai hàm số  $\mathbf{P}(f)$  và  $\mathbf{P}_v(f)$  trùng với  $f$  tại một số không đếm được các điểm nên chúng có tên gọi là *nội suy siêu hạn*, toán tử tương ứng được gọi là toán tử nội suy siêu hạn.

Công thức tương tự (2.25) cho các đường nằm ngang  $\eta = \eta_j$ ,

$$-1 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_n = 1,$$

$$\mathbf{P}_h(f) = \sum_{j=0}^n f(\xi, \eta_j) \theta_j^h(\eta), \quad (2.26)$$

trong đó

$$\theta_j^h(\eta) = \prod_{j \neq i} \frac{\eta - \eta_i}{\eta_j - \eta_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Tích của hai phép chiếu  $\mathbf{P}_v$  và  $\mathbf{P}_h$ :

$$\mathbf{P}_h \circ \mathbf{P}_v(f) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(\xi_i, \eta_j) \theta_i^v(\xi) \theta_j^h(\eta). \quad (2.27)$$

Toán tử tích  $\mathbf{P}_h \circ \mathbf{P}_v$  cũng là một phép chiếu, và  $\mathbf{P}_h \circ \mathbf{P}_v(f)$  nội suy hàm  $f$  chính xác tại  $(m+1)(n+1)$  điểm  $(\xi_i, \eta_j)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Hàm  $\mathbf{P}_h \circ \mathbf{P}_v(f)$  được gọi là *nội suy Lagrange lưỡng đa thức* của hàm  $f$  tại các điểm  $(\xi_i, \eta_j)$ .

Phép chiếu  $\mathbf{P}_h \circ \mathbf{P}_v$  không là nội suy siêu hạn. Ta có một cách tổ hợp hai toán tử  $\mathbf{P}_v$  và  $\mathbf{P}_h$  để có được một toán tử nội suy siêu hạn mà tập chính xác chứa toàn bộ các đường  $\xi = \xi_i$ ,  $\eta = \eta_j$ . Đó là tổng Boolean

$$\mathbf{P}_v \oplus \mathbf{P}_h = \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_h - \mathbf{P}_v \circ \mathbf{P}_h. \quad (2.28)$$

**Định lý 2.1.** Cho các toán tử  $\mathbf{P}_v$  và  $\mathbf{P}_h$ . thì  $(\mathbf{P}_v \oplus \mathbf{P}_h)(f)$  nội suy hàm  $f$  chính xác dọc theo các đường  $\xi = \xi_i$ ,  $\eta = \eta_j$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Hàm  $(\mathbf{P}_v \oplus \mathbf{P}_h)(f)$  được gọi là *nội suy Lagrange hai chiều siêu hạn*.

•

**Nhận xét 2.5.** Ta có thể tìm công thức biến đổi dưới dạng một đa thức bậc nhất theo từng biến:

$$x = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta.$$

Với cách chọn này thì khi  $\xi = \text{const}$  (hay  $\eta = \text{const}$ ) đa thức trở thành bậc nhất theo  $y$  (hay  $x$ ), tương ứng với đường thẳng.

•

#### 2.1.4 Xấp xỉ hàm trên phần tử hữu hạn

Phép xấp xỉ hàm bằng phần tử hữu hạn sử dụng các hàm nội suy Lagrange. Bậc tối đa của đa thức xấp xỉ qui định loại phần tử hữu hạn và số *nút nội suy*<sup>1</sup> cần thiết.

<sup>1</sup>Phân biệt với nút hình học.

**Thí dụ 2.4. Trường hợp 1-chiều, đa thức bậc nhất.** Các đa thức  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  lập thành cơ sở của không gian các đa thức bậc  $\leq 1$ . Hàm xấp xỉ của  $u = u(x)$  có thể biểu diễn dưới dạng

$$u_h(x) = [p_1(x) \ p_2(x)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{a}. \quad (2.29)$$

Ở đây ta sử dụng các ký hiệu thu gọn:

$$\mathbf{P}(x) = [p_1(x) \ p_2(x)], \quad \mathbf{a} = \{a_1 \ a_2\}^T.$$

Từ yêu cầu hàm xấp xỉ và hàm chính xác có giá trị bằng nhau tại các nút nội suy  $x_i, x_j$ , ta có:

$$\mathbf{P}(x_i)\mathbf{a} = u_i, \quad \mathbf{P}(x_j)\mathbf{a} = u_j$$

hay dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} p_1(x_i) & p_2(x_i) \\ p_1(x_j) & p_2(x_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}.$$

Giải ra ta được

$$a_1 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{x_j - x_i},$$

$$a_2 = \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i}.$$

Suy ra

$$u_h(x) = u_i \frac{x_j - x}{x_j - x_i} + u_j \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Đưa vào các ký hiệu:

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad \mathbf{N} = [N_i \ N_j]$$

ta có thể viết lại

$$u_h(x) = u_i N_i(x) + u_j N_j(x) \quad (2.30)$$

$$= \mathbf{N}(x)\mathbf{u}. \quad (2.31)$$

Các hàm  $N_i(x)$ ,  $N_j(x)$  được gọi là các *hàm dạng* (shape function),  $\mathbf{N}$  là *ma trận hàm dạng*.

**Nhận xét 2.6.** 1) Các kết quả trên có thể tìm được khởi đi từ phần tử tham chiếu. Hàm xấp xỉ:

$$\bar{u}_h(\xi) = [1 \ \xi] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}.$$

Chú ý, dấu gạch trên đầu hàm xấp xỉ để chỉ nó là hàm xác định trên phần tử tham chiếu. Các hàm  $\bar{u}(\xi)$ ,  $\bar{u}_h(\xi)$  liên hệ với  $u(x)$ ,  $u_h(x)$  qua phép đổi biến (thí dụ 2.1),

$$u(x(\xi)) = \bar{u}(\xi), \quad u_h(x(\xi)) = \bar{u}_h(\xi).$$

Thực hiện các bước tính toán tương tự, ta được:

$$\bar{u}_h(\xi) = \bar{u}_1 \bar{N}_1(\xi) + \bar{u}_2 \bar{N}_2(\xi) = \bar{\mathbf{N}}(\xi) \bar{\mathbf{u}},$$

trong đó

$$\bar{N}_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \bar{N}_2(\xi) = \xi.$$

Các hàm dạng trùng với các hàm tọa độ trọng tâm của  $x$ . Như vậy, từ (2.2) và (2.30) ta thấy

$$u_h = u_i N_i + u_j N_j \quad x = x_i N_i + x_j N_j,$$

nghĩa là, biểu diễn hàm xấp xỉ và biểu diễn điểm (hình học) trùng nhau. Khi đó, nút nội suy trùng với nút hình học. Những phần tử hữu hạn với phép xấp xỉ có tính chất này được gọi là phần tử hữu hạn *đẳng tham số* (isoparametric).

2) Hàm xấp xỉ do được xác định theo các giá trị tại nút nội suy, nên trong trường hợp nút nội suy trùng với nút hình học (biên của phần tử) hàm xấp xỉ là liên tục khi qua biên. Xấp xỉ PTHH có tính chất này được gọi là thuộc lớp  $C^0$ . Tổng quát, nếu hàm xấp xỉ (nội suy) có đạo hàm liên tục đến cấp  $r > 0$  thì ta nói xấp xỉ PTHH thuộc lớp  $C^r$ .

3) Số lượng các nút nội suy của phần tử được gọi là *bậc tự do* của phần tử. ●

**Tổng quát – xấp xỉ bằng đa thức bậc  $N$ .** Các đa thức cơ sở của không gian các đa thức bậc  $\leq N$ :  $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, \dots, p_{N+1}(x) = x^N$ . Để xây dựng xấp xỉ ta cần  $N + 1$  nút nội suy. Trong trường hợp này ngoài hai nút ở biên (nút hình học) ta cần đưa vào  $N - 1$  nút nằm bên trong phần tử. Để đơn giản, ta ký hiệu  $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$  là các nút nội suy của phần tử,  $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$  là giá trị của hàm  $u(x)$  tại các nút tương ứng. Dựa vào thí dụ 2.4 ta thiết lập các hàm dạng như sau.

Hàm xấp xỉ

$$u_h(x) = [p_1(x) \ p_2(x) \ \dots \ p_{N+1}(x)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{a}, \quad (2.32)$$

trong đó

$$\mathbf{P}(x) = [p_1(x) \ p_2(x) \ \dots \ p_{N+1}(x)], \quad \mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N+1}\}^T. \quad (2.33)$$

Từ điều kiện hàm xấp xỉ và hàm chính xác có giá trị bằng nhau tại các nút nội suy, ta có hệ phương trình đại số tuyến tính xác định  $a_1, \dots, a_{N+1}$

$$\begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_{N+1}(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_{N+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1(x_{N+1}) & p_2(x_{N+1}) & \dots & p_{N+1}(x_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (2.34)$$

trong đó<sup>2</sup>

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Giải phương trình (2.34) ta được

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u},$$

rồi thay vào (2.32) ta thu được các hàm dạng

$$u_h = (\mathbf{P}(x)\mathbf{V}^{-1})\mathbf{u} = \mathbf{N}(x)\mathbf{u} \quad (2.36)$$

với

$$\mathbf{N}(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_{N+1}(x)] = \mathbf{P}(x)\mathbf{V}^{-1} \quad (2.37)$$

là ma trận các hàm dạng.

---

<sup>2</sup>Ma trận  $\mathbf{V}$  được gọi là ma trận Vandermonde, theo tên của nhà toán học Pháp Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 - 1796). Ông còn là nhạc sĩ và nhà hóa học.

**Nhận xét 2.7.** Do các đa thức  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{N+1}(x)$  độc lập tuyến tính nên các hàm dạng  $N_1(x), N_2(x), \dots, N_{N+1}(x)$  cũng độc lập tuyến tính. Theo ngôn ngữ đại số tuyến tính, các giá trị nút  $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$  có thể xem là tọa độ của vectơ  $u_h(x)$  trong cơ sở gồm các hàm dạng; còn các tham số  $a_1, a_2, \dots, a_{N+1}$  là tọa độ của  $u_h(x)$  trong cơ sở gồm các đa thức  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{N+1}$ . Theo đó, ta gọi  $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$  là các *tham số nút*, còn  $a_1, a_2, \dots, a_{N+1}$  là các *tham số suy rộng*, xấp xỉ theo công thức (2.32) gọi là *xấp xỉ phi nút*.

•

**Thí dụ 2.5. Trường hợp 2-chiều, đa thức bậc nhất.** Xấp xỉ hàm  $u(x, y)$  bằng đa thức bậc nhất thì phần tử thích hợp là tam giác 3 nút. Các đa thức  $p_1(x, y) = 1, p_2(x, y) = x, p_3(x, y) = y$  lập thành cơ sở của không gian các đa thức hai biến có bậc  $\leq 1$ . Ký hiệu:

$$\mathbf{P}(x, y) = [p_1(x, y) \ p_2(x, y) \ p_3(x, y)], \quad \mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T.$$

Hàm xấp xỉ  $u_h(x, y)$  được biểu diễn dưới dạng:

$$u_h(x, y) = \mathbf{P}(x, y)\mathbf{a}. \quad (2.38)$$

Hệ phương trình xác định  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (2.39)$$

trong đó

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Suy ra:  $\mathbf{a} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}$  và để có  $u_h(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{u}$  thì  $\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{P}(x, y)\mathbf{Q}^{-1}$ . Cụ thể,

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{x_2y_3 - y_2x_3 + x(-y_3 + y_2) - y(-x_3 + x_2)}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2}, \\ N_2(x, y) &= \frac{-x_1y_3 + y_1x_3 + x(-y_3 + y_1) + y(-x_3 + x_1)}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2}, \\ N_3(x, y) &= \frac{x_1y_2 - y_1x_2 + x(-y_2 + y_1) - y(-x_2 + x_1)}{x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2}. \end{aligned}$$

**Nhận xét 2.8.** Việc tìm các hàm dạng tuy đơn giản nhưng rất dễ sai sót khi tính toán bằng tay. Ta có thể dùng Matlab để thực hiện các tính toán này. Script file `hd2D3N.m` dưới đây cho phép tìm các hàm dạng trong thí dụ trên



```
% hd2D3N
% xây dựng hàm dạng cho PTHH 2-D, 3 nút
clear all
syms x y x1 y1 x2 y2 x3 y3 a1 a2 a3
% đa thức cơ sở
P=[1 x y];
% ma trận giá trị đa thức cơ sở tại các nút
Q(1,:)=subs(P,x,y,x1,y1);
Q(2,:)=subs(P,x,y,x2,y2);
Q(3,:)=subs(P,x,y,x3,y3);
% ma trận hàm dạng
N=P*inv(Q);
```

•

**Nhận xét 2.9.** Phương pháp xây dựng hàm dạng trong các thí dụ trên có thể tổng quát hóa cho trường hợp hàm cần xấp xỉ xác định trong  $\mathbb{R}^d$ . Gọi  $M$  là số chiều của không gian các đa thức trên  $\mathbb{R}^d$  có bậc  $\leq N$ ,  $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^d)$ . Để xây dựng các hàm dạng "đầy đủ" ta cần  $M$  nút nội suy. Ký hiệu:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  là điểm trong  $\mathbb{R}^d$ ;  
 $\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_M(\mathbf{x})\}$  là một cơ sở của  $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^d)$ ;  
 $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) là các nút nội suy.

**Sơ đồ thiết lập các hàm dạng**

1.  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \dots \ p_M(\mathbf{x})];$
2.  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_M(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_M(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_M) & p_2(\mathbf{x}_M) & \dots & p_M(\mathbf{x}_M) \end{bmatrix};$
3.  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}) \ N_2(\mathbf{x}) \ \dots \ N_M(\mathbf{x})] = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}.$

•

### 2.1.5 Sai số của xấp xỉ PTHH trên một phần tử

Sai số xấp xỉ tại điểm  $\mathbf{x}$  trên phần tử thực  $\Omega^e$  và tại điểm  $\boldsymbol{\xi}$  trên phần tử tham chiếu được định nghĩa là

$$e(\mathbf{x}) = u_h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

$$e(\boldsymbol{\xi}) = \bar{u}_h(\boldsymbol{\xi}) - \bar{u}(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.41)$$

Nếu  $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x}$  qua ánh xạ  $\tau^e$  thì  $e(\mathbf{x}) = e(\boldsymbol{\xi})$ .

Sai số trên toàn phần tử được định nghĩa là

$$|e| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega^e} |e(\mathbf{x})|. \quad (2.42)$$

Xét trường hợp 1-chiều. Giả sử phần tử có  $n$  nút nội suy  $x_1, \dots, x_n$ . Để đánh giá sai số  $e(x)$  dùng khai triển Taylor cho hàm  $u$  tại  $x$  đến cấp  $n-1$ ,

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} R(x)$$

Thay  $x+h$  bằng các  $x_i$ , ta được:

$$u_i = u(x_i) = u(x) + (x_i - x)u'(x) + \dots + \frac{(x_i - x)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n-1)}(x) + \frac{(x_i - x)^n}{n!} R_i$$

Nhân với hàm dạng tương ứng  $N_i$  rồi lấy tổng theo  $i$ ,

$$\begin{aligned} u_h(x) &= u(x) \sum_{i=1}^n N_i + u'(x) \sum_{i=1}^n (x_i - x) N_i + \dots \\ &\quad + \frac{u^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^{n-1} N_i + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^n N_i R_i. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ các đồng nhất thức

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n N_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - x) N_i &= 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n (x_i - x)^{n-1} N_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

suy ra

$$e(x) = u_h(x) - u(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^n N_i R_i.$$

Với giả thiết  $u(x)$  có đạo hàm liên tục đến cấp  $n$ , với  $h$  (chiều dài phần tử) đủ nhỏ, tồn tại hằng số  $C > 0$  sao cho

$$|e| \leq Ch^n.$$

Sai số cấp cao (nội suy Hermite) được định nghĩa và chứng minh trong [17].

### 2.1.6 Đạo hàm và tích phân theo tọa độ tham chiếu

Trong các bài toán cơ học, vật lý, thường các hàm cần tìm và các đạo hàm của nó có mặt trong phương trình xác định. Nếu dùng hàm xấp xỉ trên các phần tử thực  $\Omega^e$  sẽ rất phức tạp (không thuận tiện). Bằng cách đưa vào khái niệm phần tử tham chiếu  $\Omega^r$  và ánh xạ  $\tau^e$ , hàm và các đạo hàm của nó được tính toán trên phần tử tham chiếu. Dưới đây ta xét trường hợp 2-chiều.

Gọi  $\bar{u}_h$  là hàm xấp xỉ của  $\bar{u}$  trên phần tử tham chiếu, ta có

$$\bar{u}_h(\xi, \eta) = \bar{\mathbf{N}}(\xi, \eta) \bar{\mathbf{u}}.$$

Từ công thức biến đổi:

$$\mathbf{x} = \tau^e(\boldsymbol{\xi}) \Rightarrow x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (2.44)$$

và công thức đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \text{ hay } \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right\} = \mathbf{J}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\}, \quad (2.45)$$

trong đó  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobi của phép biến đổi  $\tau^e$ ,

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right].$$

Từ công thức (2.45) ta suy ra

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \text{ hay } \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\} = \mathbf{J}^{-T} \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right\}. \quad (2.46)$$

và ta có công thức tính đạo hàm của hàm  $u$  trong hệ tọa độ thực bằng các đạo hàm của  $\bar{u}$  trong hệ tọa độ tham chiếu:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-T} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \end{array} \right\}. \quad (2.47)$$

Công thức đổi biến (2.44) cho phép ta chuyển tích phân của một hàm  $u$  trên phần tử thực  $\Omega^e$  thành tích phân trên phần tử tham chiếu  $\Omega^r$  đơn giản hơn:

$$\int_{\Omega^e} u(x, y) dx dy = \int_{\Omega^r} \bar{u}(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (2.48)$$

trong đó  $|\mathbf{J}|$  ký hiệu trị tuyệt đối định thức của ma trận Jacobi.

**Thí dụ 2.6.** Cho phần tử tam giác  $\Omega$  với các đỉnh  $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (3, 2)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (2, 3)$  (trong tọa độ  $xy$ ). Cho  $u = x + y$ ,  $v = xy$  là hai hàm xác định trên  $\Omega$ .

1) Thiết lập công thức đổi tọa độ, biến phần tử tham chiếu  $\Omega^r$ , tam giác với các đỉnh  $\xi_1 = (0, 0)$ ,  $\xi_2 = (1, 0)$ ,  $\xi_3 = (0, 1)$  (tọa độ  $\xi\eta$ ), thành tam giác  $\Omega$ . Xác định  $\mathbf{J}$  và  $\mathbf{J}^{-1}$ .

2) Dùng  $u$  và  $v$  kiểm tra lại công thức (2.47).

3) Tính  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$ .

**Giải.** 1) Như trong thí dụ 2.2,  $\Omega$  được biến đổi từ  $\Omega^r$  nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x = 1 + 2\xi + \eta, \\ y = 1 + \xi + 2\eta \end{cases}$$

Ma trận Jacobi và định thức của nó:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = 3.$$

Từ đây suy ra

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) Biểu diễn  $u$  và  $v$  theo tọa độ  $\xi\eta$ :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 2 + 3(\xi + \eta), \\ \bar{v} &= v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 1 + 3(\xi + \eta) + 5\xi\eta + 2(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}$$

Đạo hàm  $u$  và  $v$  trong tọa độ  $xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Đạo hàm  $\bar{u}$  và  $\bar{v}$  trong tọa độ  $\xi\eta$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 3, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = 3 + 5\eta + 4\xi, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 3 + 5\xi + 4\eta.$$

Kiểm công thức (2.47) trường hợp hàm  $u$ :

Vế trái:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Vế phải:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Kiểm công thức (2.47) trường hợp hàm  $v$ :

Vế trái:

$$\begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \xi + 2\eta \\ 1 + 2\xi + \eta \end{Bmatrix}.$$

Vế phải:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 + 5\eta + 4\xi \\ 3 + 5\xi + 4\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \xi + 2\eta \\ 1 + 2\xi + \eta \end{Bmatrix}.$$

3) Từ kết quả trên ta có

$$\nabla u \cdot \nabla v = (1, 1)(1 + \xi + 2\eta, 1 + 2\xi + \eta)^T = 2 + 3(\xi + \eta).$$

Áp dụng công thức đổi biến số trong tích phân (2.48)

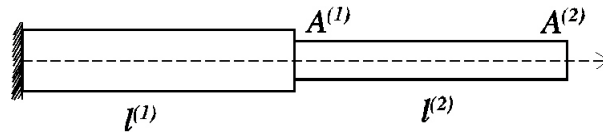
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega &= \int_{\Omega^r} (2 + 3(\xi + \eta)) |3| d\xi d\eta \\ &= 3 \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} (2 + 3(\xi + \eta)) d\eta \\ &= 3 \int_0^1 \left( (2 + 3\xi)\eta + \frac{3}{2}\eta^2 \Big|_0^{1-\xi} \right) d\xi \\ &= 3 \int_0^1 \left( \frac{7}{2} - 2\xi - \frac{3}{2}\xi^2 \right) d\xi = \frac{21}{2}\xi - 3\xi^2 - \frac{3}{2}\xi^3 \Big|_0^1 = 6. \end{aligned}$$

## 2.2 Các bước thiết lập mô hình PTHH

Mục này trình bày cách thiết lập mô hình PTHH cho các bài toán khoa học kỹ thuật. Ta sẽ tìm hiểu chi tiết các bước thiết lập, bao gồm cơ sở lý thuyết và cách thức thực hiện. Vấn đề được trình bày thông qua một bài toán đơn giản của cơ học kết cấu nhằm làm rõ lý do và ý nghĩa của các bước thực hiện. Như sẽ thấy sau này, cách áp dụng PTHH cho các bài toán biên cũng tương tự.

### 2.2.1 Phân tích ứng suất của thanh nhiều nấc

**Thí dụ 2.7.** Tìm ứng suất phân bố trong thanh nhiều nấc đối xứng trục, bị ngàm chặt một đầu, đầu còn lại bị kéo bởi lực dọc trục  $p$ . Thanh có các diện tích tiết diện ngang  $A^1 = 2\text{cm}^2$ ,  $A^2 = 1\text{cm}^2$  trên các đoạn dài  $l^1 = l^2 = 10\text{cm}$ <sup>3</sup>. Cho môđun Young  $E^1 = E^2 = E = 2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $p = 1\text{kg}$ .



Hình 2.9: Thanh nhiều nấc.

#### ■ Công thức biến phân<sup>4</sup>

Theo lý thuyết thanh chịu kéo nén dọc trục, biến dạng của thanh được xác định bởi chuyển dịch  $q = q(x)$  tại các điểm thuộc nó. Ta có các hệ thức sau:

Biến dạng (độ giãn tương đối)

$$\epsilon = \frac{dq}{dx}. \quad (2.49)$$

Ứng suất

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{dq}{dx}, \quad (2.50)$$

trong đó  $E$  là môđun Young (định luật Hooke).

Thế năng toàn phần của thanh

$$\begin{aligned} I &= \text{Năng lượng biến dạng} - \text{Công của lực ngoài} \\ &= \Pi - W_p, \end{aligned} \quad (2.51)$$

trong đó

$$\Pi = \int_0^L \int_{A(x)} \frac{1}{2} \sigma(x) \epsilon(x) dA dx, \quad (2.52)$$

$$W_p = pq(L). \quad (2.53)$$

<sup>3</sup>Chỉ số trên của  $A, l, E$  không phải là số mũ. Điều này cũng đúng cho các ký hiệu về sau.

<sup>4</sup>Người đọc không quen với cơ học kết cấu có thể chấp nhận các công thức được giới thiệu ở đây.

Bài toán được giải dựa trên nguyên lý công ảo: *chuyển dịch thực là chuyển dịch làm cực tiểu hóa thế năng toàn phần của thanh.*

Ký hiệu:

$L = l^{(1)} + l^{(2)}$  là chiều dài thanh;

$S = \{q | q \in H^1(0, L), q(0) = 0\}$  là tập hợp các chuyển dịch khả dĩ (hàm thử);

$V = \{s | s \in H^1(0, L), s(0) = 0\}$  là không gian các chuyển dịch ảo (hàm trọng lượng). Do điều kiện biên cốt yếu là thuần nhất nên  $V = S$ .

Dùng các công thức (2.49), (2.50) cho biểu thức thế năng (2.51)-(2.53) ứng với chuyển dịch khả dĩ  $q$ , ta được

$$I(q) = \int_0^L \int_{A(x)} \frac{E}{2} \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 dA dx - pq(L). \quad (2.54)$$

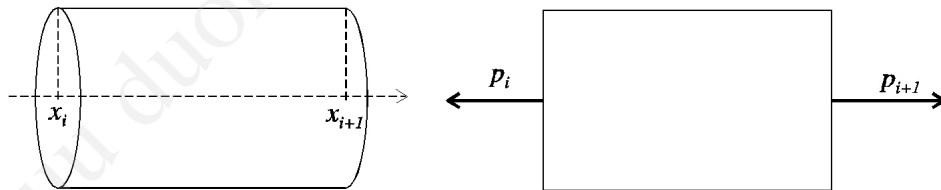
**Nhận xét 2.10.** Về phương diện toán học, bài toán phân tích ứng suất của thanh nhiều nấc ở đây là bài toán tối ưu: Tìm hàm  $q(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , làm cực tiểu phiếm hàm  $I(q)$  xác định bởi (2.54).

•

### ■ Áp dụng PTHH

#### Bước 1 - Phân hoạch

Thanh được xem như một kết cấu gồm 2 phần tử: phần tử thứ nhất là phần thanh giới hạn bởi các tiết diện  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 10$ , phần tử thứ hai là phần thanh giới hạn bởi các tiết diện  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 20$  (về phương diện toán học, đoạn  $[0, L]$  được phân hoạch thành các đoạn con  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ).



Hình 2.10: Phần tử thanh  $[x_i, x_{i+1}]$ , lực tác dụng lên phần tử.

#### Bước 2 - Xấp xỉ hàm trên từng phần tử

Chuyển dịch (hàm  $q(x)$ ) trên mỗi phần tử được xấp xỉ bởi đa thức bậc nhất (phần tử  $e$ )

$$q^e = q_1^e N_1^e(x) + q_2^e N_2^e(x) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{q}^e. \quad (2.55)$$

trong đó  $\mathbf{N}^e(x) = [N_1^e(x) \ N_2^e(x)]$  là ma trận hàm dạng,  $\mathbf{q}^e = \{q_1^e \ q_2^e\}^T$  gọi là chuyển dịch nút phần tử<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Ký hiệu  $u^e$  chỉ nhằm mục đích "nhấn mạnh" nó là thu hẹp của hàm  $u$  trên phần tử  $e$ .

**Nhận xét 2.11.** Do điều kiện ngàm của chuyển dịch (điều kiện biên của bài toán),  $q_1^1 = 0$ , nên hàm  $N_1^1(x)$  không có mặt trong biểu thức xấp xỉ của  $q$ . Tuy nhiên, để thuận tiện, trong thực hành ta vẫn tính đến  $q_1^1$  trong quá trình thiết lập phương trình xấp xỉ. Việc khử  $q_1^1$  khỏi phương trình sẽ được thực hiện sau.

•

Biến dạng và ứng suất trên mỗi phần tử được xấp xỉ bởi

$$\epsilon^e = \frac{d}{dx} \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e, \quad (2.56)$$

$$\sigma^e = E^e \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e, \quad (2.57)$$

trong đó  $\mathbf{B}^e = (d/dx) \mathbf{N}^e$  (đạo hàm của một ma trận là ma trận với các phần tử là đạo hàm của phần tử tương ứng trong ma trận đầu).

*Bước 3 - Thiết lập phương trình PTHH*

Nếu xét riêng từng phần tử thì thế năng của phần tử được tính theo công thức (tương tự như thế năng toàn phần)

$$I^e(q_1^e, q_2^e) = \frac{E^e A^e}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{dq^e}{dx} \right)^2 dx - p_2^e q_2^e + p_1^e q_1^e, \quad (2.58)$$

trong đó  $p_1^e, p_2^e$  là lực tác dụng lên các đầu mút của phần tử. Ở đây ta quy ước hướng dương của lực tác dụng lên phần tử hướng ra ngoài phần tử (hình 2.10)

Do tính chất cộng tính của năng lượng, công thức thế năng toàn phần có thể viết:

$$I = \sum_{e=1}^2 I^e = \sum_{e=1}^2 \left[ \frac{E^e A^e}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{dq^e}{dx} \right)^2 dx - p_2^e q_2^e + p_1^e q_1^e \right].$$

Đưa vào ký hiệu  $\mathbf{p}^e = \{-p_1^e \ p_2^e\}^T$ , gọi là *vector tải phần tử*, và dùng công thức (2.55) ta có

$$I = \sum_{e=1}^2 \left[ \frac{E^e A^e}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \mathbf{q}^e \right)^2 dx - \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{p}^e \right]. \quad (2.59)$$

Để ý rằng,

$$\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

là vô hướng nên ta có thể viết

$$\left( \frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \mathbf{q}^e \right)^2 = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e.$$



Nếu lấy biến phân ta sẽ được:

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \mathbf{q}^e \right)^2 &= \delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \delta \mathbf{q}^e \\ &= 2\delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e.\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối nhận được từ nhận xét:  $\delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$ ,  $\mathbf{q}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \delta \mathbf{q}^e$  là chuyển vị của nhau.

Điều kiện cực trị cho phiếm hàm  $I$ :

$$\begin{aligned}\delta I &= 0 \\ \sum_{e=1}^2 \delta \mathbf{q}^{eT} \left[ \left( E^e A^e \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right) \mathbf{q}^e - \mathbf{p}^e \right] &= 0 \\ \sum_{e=1}^2 \delta \mathbf{q}^{eT} (\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{p}^e) &= 0,\end{aligned}\quad (2.60)$$

trong đó ma trận

$$\mathbf{k}^e = E^e A^e \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx, \quad (2.61)$$

được gọi là *ma trận độ cứng phần tử*.

Đưa vào *vectơ chuyển dịch toàn cục*, biến phân của nó và *vectơ tải toàn cục* có thành phần là chuyển dịch, biến phân của chuyển dịch và nội lực tại các nút của toàn bộ thanh

$$\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ q_3\}^T, \quad \delta \mathbf{q} = \{\delta q_1 \ \delta q_2 \ \delta q_3\}^T, \quad \mathbf{p} = \{p_1 \ p_2 \ p_3\}^T,$$

ta có thể viết

$$\sum_{e=1}^2 \delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad \sum_{e=1}^2 \delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{p}^e = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p},$$

và phương trình (2.60) thành

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{p}) = 0, \quad (2.62)$$

trong đó  $\mathbf{K}$  có dạng

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix},$$

gọi là *ma trận độ cứng toàn cục*. Trừ nút thứ nhất do điều kiện ràng buộc  $\delta q_1 = 0$ , các biến phân còn lại  $\delta q_2, \delta q_3$  là tùy ý, bằng cách lấy các biến phân này lần lượt bằng 1, ta suy ra:

$$\begin{aligned} 0 \times K_{11}q_1 + K_{12}q_2 + K_{13}q_3 &= 0 \times p_1 \\ K_{21}q_1 + K_{22}q_2 + K_{23}q_3 &= p_2 \\ K_{31}q_1 + K_{32}q_2 + K_{33}q_3 &= p_3 \end{aligned}$$

Phương trình thứ nhất tương đương với  $0 = 0$ . Hệ phương trình suy biến, cần phải loại phương trình này khỏi hệ. Ta sẽ trở lại vấn đề này sau.

Như vậy, nói chung, vì biến phân là tùy ý, phương trình (2.62) thành

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}. \quad (2.63)$$

Phương trình (2.63) được gọi là *phương trình PTHH*. Do hai phần tử kề nhau có chung nhau một điểm nút nên phép lấy tổng trong các phương trình (2.62) phải được hiện theo một cách đặc biệt, gọi là *phép lắp ghép*.

Trước khi tiến hành các bước tiếp theo ta cụ thể hóa các bước 1-3 qua đó giới thiệu sơ đồ tính toán PTHH.

Trước hết, trong thực hành, việc phân hoạch ở bước 1 được thực hiện bằng cách đưa vào hai ma trận:

\* Ma trận tọa độ các nút COORD

$$\text{COORD} = [x_1, x_2, x_3] = [0, 10, 20].$$

\* Ma trận lắp ghép LA mô tả sự liên kết giữa các phần tử. Ma trận này gồm 2 dòng (= số phần tử) và 2 cột (= số nút hình học của phần tử). mỗi dòng của LA ứng với một phần tử,  $\text{LA}(e, 1)$  và  $\text{LA}(e, 2)$  là thứ tự của nút 1 và 2 trong cách đánh số toàn cục.

$$\text{LA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bước thứ 2 và 3 được thực hiện như nhau cho mỗi phần tử (đây là đặc điểm quan trọng của PTHH). Thanh gồm 3 nút nên chuyển dịch xấp xỉ được xác định bởi vectơ chuyển dịch toàn cục (tổng bộ thanh),

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}.$$

Trong khi đó mỗi phần tử chỉ có hai nút, nên vectơ chuyển dịch phần tử, thí dụ phần tử  $e$ , có dạng

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix}.$$

Nhận xét tương tự với vectơ tải toàn cục và vectơ tải phần tử,

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^e = \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{Bmatrix}.$$

Ma trận độ cứng phần tử, được tính như sau.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e &= \begin{bmatrix} \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e}, & \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^e &= \frac{1}{x_{e+1} - x_e} [-1, 1] \Rightarrow \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e = \frac{1}{(x_{e+1} - x_e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{k}^e &= \frac{E^e A^e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Như đã nói ở trên, để thiết lập phương trình PTHH ta phải lấy "tổng" hay lắp ghép các phần tử cá biệt lại với nhau. Phép lắp ghép ma trận độ cứng và vectơ tải phần tử được thực hiện như sau. Trước hết khởi tạo ma trận độ cứng và vectơ tải toàn cục

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Phần tử thứ nhất được ghép vào dựa trên liên hệ giữa thứ tự địa phương và thứ tự toàn cục theo ma trận lắp ghép,

$$\begin{array}{c|cc} \text{thứ tự địa phương} & 1 & 2 \\ \hline \text{thứ tự toàn cục} & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} k_{11}^1 \mapsto K_{11} & k_{12}^1 \mapsto K_{12} & -p_1^1 \mapsto p_1 \\ k_{21}^1 \mapsto K_{21} & k_{22}^1 \mapsto K_{22} & p_2^1 \mapsto p_2 \end{array}$$

(mũi tên  $\mapsto$  ám chỉ sự cộng vào). Do đó

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -p_1^1 \\ p_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Tương tự với phần tử thứ hai

$$\begin{array}{c|cc} \text{thứ tự địa phương} & 1 & 2 \\ \hline \text{thứ tự toàn cục} & 2 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} k_{11}^2 \mapsto K_{22} & k_{12}^2 \mapsto K_{23} & -p_1^2 \mapsto p_2 \\ k_{21}^2 \mapsto K_{32} & k_{22}^2 \mapsto K_{33} & p_2^2 \mapsto p_3 \end{array}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{12}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -p_1^1 \\ p_2^1 - p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix}.$$

Cho đến bây giờ giá trị của tải đặt tại các nút vẫn chưa được bàn tới. Thật ra, theo dữ liệu của bài toán, ta chỉ biết giá trị của tải đặt tại nút thứ ba,  $p_2^2 = p$ . Tuy nhiên, dựa vào nguyên lý tác dụng tương hỗ ta có ngay  $p_2^1 = p_1^2$ , nghĩa là

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -p_1^1 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

với  $p_1^1$  là tải (chưa biết) tác dụng tại nút bị ngàm (nút cho điều kiện biên cốt yếu). Như sẽ thấy trong bước kế tiếp phương trình có chứa  $p_1$  sẽ được khử mất, còn  $p_1$  sẽ được gán giá trị lực cho trước. vì vậy, trong tính toán thực hành, ta có thể đặt

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

nghĩa là không cần lắp ghép vectơ tải phần tử (xem sơ đồ khối, hình 2.11).

*Bước 4 - Khử điều kiện biên (điều kiện chuyển dịch và lực)*

Điều kiện chuyển dịch: do nút 1 được cho trước chuyển dịch,  $q_1 = 0$ , phương trình thứ nhất tương đương với  $0 = 0$  nên để hệ phương trình không suy biến ta phải khử ẩn  $q_1$  và loại phương trình tương ứng khỏi hệ phương trình.

Cách khử ẩn đã biết và loại phương trình tương ứng mà không làm thay đổi kích thước của các ma trận tham gia trong hệ phương trình (2.63). Để làm rõ phương pháp ta trình bày cho trường hợp tổng quát, phương trình PTHH có dạng

$$\begin{aligned} K_{11}q_1 + K_{12}q_2 + \dots + K_{1d}q_d + \dots + K_{1n}q_n &= p_1 \\ K_{21}q_1 + K_{22}q_2 + \dots + K_{2d}q_d + \dots + K_{2n}q_n &= p_2 \\ &\vdots \\ K_{d1}q_1 + K_{d2}q_2 + \dots + K_{dd}q_d + \dots + K_{dn}q_n &= p_d \\ &\vdots \\ K_{n1}q_1 + K_{n2}q_2 + \dots + K_{nd}q_d + \dots + K_{nn}q_n &= p_n \end{aligned}$$

trong đó  $q_d = g$  được cho trước. Thay  $q_d$  bằng  $g$  vào các phương trình trừ phương trình thứ  $d$ , rồi chuyển số hạng đã biết sang vế hai thì vế hai trở thành

$$p_j - K_{jd}g \quad (j \neq d);$$

riêng phương trình  $d$  được thay bằng phương trình  $1q_d = g$ ; cuối cùng ta có:

$$\begin{aligned} K_{11}q_1 + K_{12}q_2 + \dots + 0q_d + \dots + K_{1n}q_n &= p_1 - K_{1d}g \\ K_{21}q_1 + K_{22}q_2 + \dots + 0q_d + \dots + K_{2n}q_n &= p_2 - K_{2d}g \\ &\vdots \\ 0q_1 + 0q_2 + \dots + 1q_d + \dots + 0q_n &= g \\ &\vdots \\ K_{n1}q_1 + K_{n2}q_2 + \dots + 0q_d + \dots + K_{nn}q_n &= p_n - K_{nd}g \end{aligned}$$

Với cách làm này thì ma trận độ cứng  $\mathbf{K}$  chuyển thành ma trận nhận được từ nó bằng cách cho các phần tử dòng  $d$  và cột  $d$  bằng không, riêng phần tử ở dòng  $d$ , cột  $d$  cho bằng 1

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & \dots & K_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Các thành phần của vectơ tải được hiệu chỉnh theo công thức trên, riêng phần tử ở dòng  $d$  được lấy bằng  $g$ .

Điều kiện lực: do nút 3 cho trước lực kéo  $p$ , ta "cộng thêm"  $p(3) = p(3) + p$ .

*Bước 5 - Giải hệ phương trình DSTT.*

*Bước 6 - Hậu xử lý*

Tính ứng suất trong các phần tử nhờ công thức (2.57).

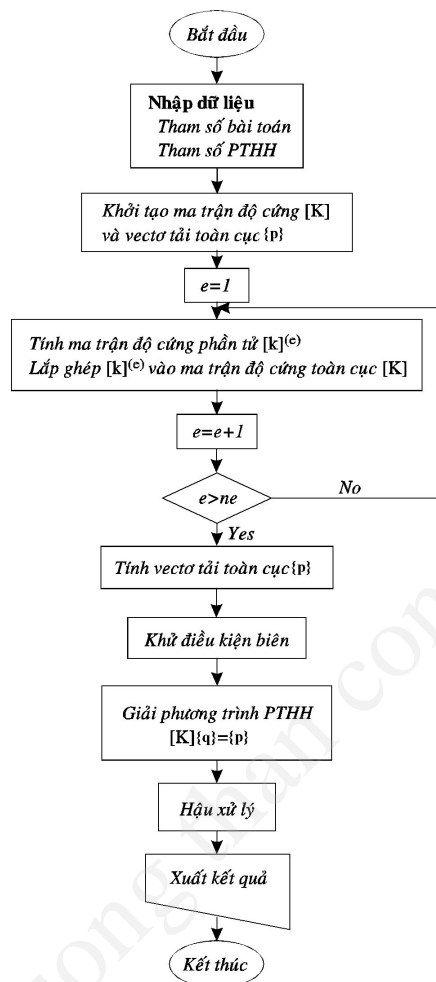
Các bước tính toán PTHH có thể tóm lược bằng sơ đồ trên hình 2.11.

### 2.2.2 Lập trình tính toán PTHH

Như một thí dụ về cách lập trình tính toán PTHH, dưới đây là chương trình `thanhnn.m` được viết bằng ngôn ngữ Matlab. Tất nhiên, như câu châm ngôn ở đầu chương, đây không phải là chương trình tốt nhất để thực hiện mục đích - phân tích ứng suất thanh nhiều nấc; chương trình được viết theo sát các bước chung của việc mô hình hóa PTHH để người mới bắt đầu dễ theo dõi, "bắt chước rồi sáng tạo" các chương trình tính khác.

#### Sưu liệu chương trình `thanhnn.m`<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Sưu liệu chương trình là phần không thể thiếu khi lập trình, nó cung cấp những thông tin cần thiết để chuyển giao chương trình cho người sử dụng. Thường bốn mục đầu được đưa vào trong phần đầu của chương trình.



Hình 2.11: Sơ đồ khối mô hình hóa PTHH.

Mục đích: phân tích ứng suất thanh nhiều nấc.

Tên: .....

Ngày cập nhật: .....

<i>Biến</i>	<i>Mô tả biến</i>
<b>nn</b>	tổng số nút
<b>ne</b>	tổng số phần tử
<b>coord</b>	vectơ tọa độ các nút
<b>la</b>	ma trận lắp ghép
<b>para</b>	ma trận các tham số hình học và vật liệu
<b>dcond</b>	điều kiện chuyển dịch
<b>fcond</b>	điều kiện lực
<b>ke</b>	ma trận độ cứng phần tử
<b>gk</b>	ma trận độ cứng toàn cục
<b>gp</b>	vectơ tải toàn cục
<b>q</b>	vectơ chuyển dịch nút toàn cục
<b>sigma</b>	vectơ ứng suất các phần tử

*Cấu trúc dữ liệu của vectơ, ma trận*

1) Vectơ tọa độ các nút **coord**, kích thước  $1 \times nn$ ,

$$\text{coord}(i) = \text{tọa độ nút toàn cục thứ } i.$$

2) Ma trận lắp ghép **la**, kích thước  $ne \times 2$

$$\begin{aligned} \text{la}(e, 1) &= \text{thứ tự toàn cục của nút thứ nhất của phần tử } e, \\ \text{la}(e, 2) &= \text{thứ tự toàn cục của nút thứ hai của phần tử } e. \end{aligned}$$

3) Ma trận các tham số hình học và vật liệu **para**, kích thước  $ne \times 3$

$$\begin{aligned} \text{para}(e, 1) &= \text{chiều dài của phần tử } e, \\ \text{para}(e, 2) &= \text{diện tích tiết diện của phần tử } e, \\ \text{para}(e, 3) &= \text{môđun Young của phần tử } e. \end{aligned}$$

4) Điều kiện chuyển dịch **dcond**, kích thước  $1 \times 2$

$$\begin{aligned} \text{dcond}(1) &= \text{thứ tự toàn cục của nút cho trước chuyển dịch}, \\ \text{dcond}(2) &= \text{giá trị của chuyển dịch}. \end{aligned}$$

5) Điều kiện lực **fcond**, kích thước  $1 \times 2$

$$\begin{aligned} \text{fcond}(1) &= \text{thứ tự toàn cục của nút cho lực ngoài}, \\ \text{fcond}(2) &= \text{giá trị của lực}. \end{aligned}$$

**Chương trình thanhnn.m**

```

% thanhnn.m
% chương trình phân tích ứng suất của thanh nhiều nấc
% T.A. Ngọc
% update: 25/9/2009
% bien - mô tả
% nn ..... tổng số nút
% ne ..... tổng số phần tử
% coord .... vectơ tọa độ các nút
% la ..... ma trận lap ghép
% para ..... ma trận các tham số hình học và vật liệu
% dcond .... điều kiện chuyển dịch
% fcond .... điều kiện lực
% ke ..... ma trận độ cứng phần tử
% pe ..... vectơ tải phần tử
% gk ..... ma trận độ cứng toàn cục
% gp ..... vectơ tải toàn cục
% q ..... vectơ chuyển dịch nút toàn cục
% sigma .... vectơ ứng suất phần tử
clear all
% TIEN XU LY
nn=3;
ne=2;
coord=[0 10 20];
la=[1 2; 2 3];
para=[10 2 2*10^6; 10 1 2*10^6];
fcond=[3 1000];
dcond=[1 0];
% XU LY
gk=zeros(nn,nn);
gp=zeros(nn,1);
% tính ma trận độ cứng và vectơ tải toàn cục
for e=1:ne
    i=la(e,1);
    j=la(e,2);
    x1=coord(i);
    x2=coord(j);
    le=para(e,1);
    ae=para(e,2);
    ee=para(e,3);
    % ma trận độ cứng phần tử
    ke=ae*ee/le*[1 -1; -1 1];

```



```

    % lap ghep
    gk(i,i)=gk(i,i)+ke(1,1);
    gk(i,j)=gk(i,j)+ke(1,2);
    gk(j,i)=gk(j,i)+ke(2,1);
    gk(j,j)=gk(j,j)+ke(2,2);
    % vecto tai phan tu
    pe=[0; 0];
    % lap ghep
    gp(i)=gp(i)+pe(1);
    gp(j)=gp(j)+pe(2);
end;
% dua vao dieu kien nut
for i=1:size(fcond,1)
    gp(fcond(i,1))=gp(fcond(i,1))+fcond(i,2);
end
for i=1:size(dcond,1)
    for j=1:nn
        gp(j)=gp(j)-gk(j,dcond(i))*dcond(i,2);
    end
    for j=1:nn
        gk(dcond(i,1),j)=0.0;
        gk(j,dcond(i,1))=0.0;
    end
    gk(dcond(i,1),dcond(i,1))=1.0;
    gp(dcond(i,1))=dcond(i,2);
end
q=inv(gk)*gp;
% HAU XU LY
disp(sprintf('\n %s','KET QUA'))
% xuat chuyen dich
disp(sprintf('\n %s','CHUYEN DICH CUA CAC NUT'))
disp(sprintf('%s','nut'))
for i=1:nn
    disp(sprintf('%d\t\t %f',i,q(i)))
end
% xuat ung suat cua cac phan tu
disp('ung suat trong cac phan tu (kg/cm^2)');
for e=1:ne
    sigma(e)=para(e,3)*(q(la(e,2))-q(la(e,1)))/para(e,1);
end
disp(sprintf('\n %s','UNG SUAT CUA CAC PHAN TU'))

```

```

disp(sprintf('%s','phan tu'))
for e=1:ne
    disp(sprintf('%d\t\t%f',e,sigma(e)))
end

```

Kết quả chạy chương trình:

```

KET QUA
CHUYEN DICH CUA CAC NUT
nut
1   0.000000
2   0.002500
3   0.007500
ung suat trong cac phan tu (kg/cm^2)
UNG SUAT CUA CAC PHAN TU
phan tu
1   500.000000
2   1000.000000

```

### 2.2.3 Một cách tiếp cận khác

Khi thiết lập mô hình PTHH của bài toán phân tích ứng suất của thanh nhiều nấc ta đã dùng cách đặt bài toán theo nguyên lý năng lượng (nguyên lý công ảo) của cơ học kết cấu phát biểu cho thanh chịu kéo nén. Các phần tử hữu hạn theo cách đặt này là các đoạn thanh cấu thành thanh nhiều nấc, chúng có ý nghĩa vật lý cụ thể. Bây giờ ta xét bài toán theo cách đặt mới của lý thuyết các bài toán biên.

Áp dụng phương trình vi phân mô tả biến dạng của thanh chịu tải dọc trục, bỏ qua lực khối tác dụng lên thanh, phương trình (1.36), ta được các phương trình vi phân xác định chuyển dịch của thanh nhiều nấc

$$\frac{d}{dx} \left( A^1 E \frac{dq}{dx} \right) = 0, \quad 0 < x < l^1, \quad (2.64)$$

$$\frac{d}{dx} \left( A^2 E \frac{dq}{dx} \right) = 0, \quad l^1 < x < L. \quad (2.65)$$

Theo giả thiết của bài toán điều kiện biên cho nghiệm:

$$q(0) = 0, \quad (2.66)$$

$$E \frac{dq}{dx}(L) = \frac{p}{A^2}. \quad (2.67)$$

Ngoài ra, chuyển dịch  $q$  còn phải thỏa điều kiện liên tục và tương tác tại điểm phân cách  $x = l^1$

$$q(l^{1-}) = q(l^{1+}), \quad (2.68)$$

$$A^1 E \frac{dq}{dx}(l^{1-}) = A^2 E \frac{dq}{dx}(l^{1+}). \quad (2.69)$$

Đưa vào không gian hàm  $V = \{s | s \in H^1(0, L), s(0) = 0\}$ . Lấy  $s \in V$  tùy ý, nhân hai vế phương trình (2.64) (hay phương trình (2.65)) với  $s$ , lấy tích phân từ 0 đến  $L$

$$A^{(1)} E \int_0^{l^{(1)}} \frac{d^2 q}{dx^2} s dx + A^{(2)} E \int_{l^{(1)}}^L \frac{d^2 q}{dx^2} s dx = 0.$$

Tích phân từng phần, dùng các điều kiện (2.67)-(2.69), ta được

$$A^1 E \int_0^{l^1} \frac{dq}{dx} \frac{ds}{dx} dx + A^2 E \int_{l^1}^L \frac{dq}{dx} \frac{ds}{dx} dx - ps(L) = 0. \quad (2.70)$$

Bài toán biến phân: Tìm  $q \in V$  thỏa (2.70) với mọi  $s \in V$ . Dùng phương pháp Galerkin, lưu ý đến nhận xét 2.11, với các hàm cơ sở (hình 2.12)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \begin{cases} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \text{nếu } 0 = x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{nếu } x_2 < x \leq x_3 = L \end{cases} \\ \varphi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} & \text{nếu } x_2 < x \leq x_3 \end{cases} \\ \varphi_3(x) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} & \text{nếu } x_2 < x \leq x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay

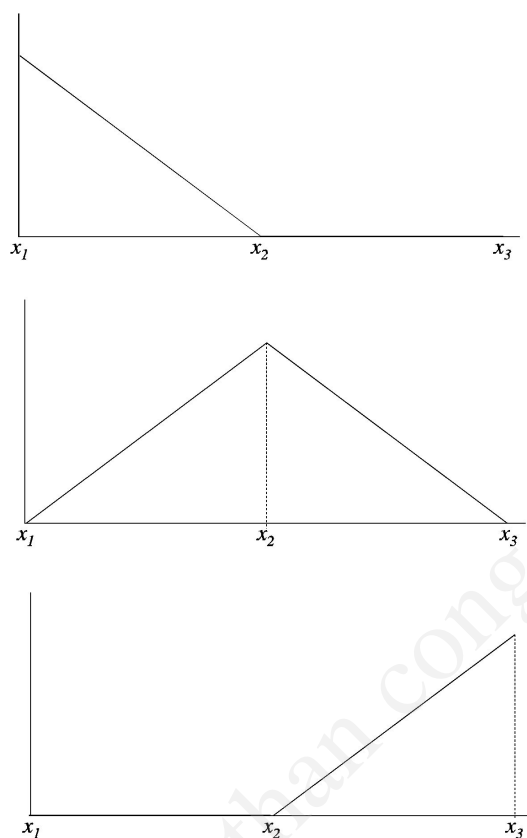
$$q \approx \sum_{i=1}^3 q_i \varphi_i = \sum_{e=1}^2 \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e$$

vào (2.70) với  $s$  lấy lần lượt là  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) ta được

$$\sum_{e=1}^2 \left( E^e A^e \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right) \mathbf{q}^e - \mathbf{p} = 0$$

$$\sum_{e=1}^2 \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{p} = 0$$

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p},$$



Hình 2.12: Các hàm cơ sở.

trong đó  $\mathbf{p} = \{0 \ 0 \ p\}^T$ .

Sau khi khử điều kiện biên cốt yếu ta nhận lại được phương trình PTHH trong thí dụ 2.7.

## Bài tập chương 2

1. Trong hệ tọa độ  $\xi\eta\zeta$ , khối tứ diện với các đỉnh  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  được chọn làm phần tử tham chiếu. Hãy thiết lập phép biến đổi affine  $\tau$  biến phần tử tham chiếu này thành khối tứ diện bất kỳ trong hệ tọa độ  $xyz$ .

2. Xây dựng và vẽ đồ thị các hàm dạng cho PTHH 1-chiều với các trường hợp:

a) ba nút (quadratic);

b) bốn nút (cubic).

H.D. a) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nút nội suy ở biên,  $x_3$  là nút nội suy bên trong. Để xác định hàm dạng ta dùng script file:

```
% hd1D3N
% xây dựng hàm dạng cho PTHH 1-D, 3 nút
clear all
syms x x1 x2 x3 a1 a2 a3
% đa thức cơ sở
P=[1 x x^2];
% ma trận giá trị đa thức cơ sở tại các nút
Q(1,:) = subs(P,x,x1);
Q(2,:) = subs(P,x,x2);
Q(3,:) = subs(P,x,x3);
% ma trận hàm dạng
N=P*inv(Q);
```

Kết quả:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_3)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(-x_3+x_1)}, \\ N_2 &= \frac{-(x-x_3)(-x_1+x)}{(x_1-x_2)(-x_3+x_2)}, \\ N_3 &= \frac{(x-x_2)(-x_1+x)}{(-x_3+x_2)(-x_3+x_1)}. \end{aligned}$$

3. Xây dựng các hàm dạng cho PTHH tam giác 2-chiều với các trường hợp:

- a) sáu nút;
- b) chín nút.

4. Xây dựng các hàm dạng cho PTHH tứ giác 9 nút.

5. Xây dựng các hàm dạng cho PTHH tứ diện 3-chiều bốn nút.

6. Chứng minh các đồng nhất thức (2.43).

H.D. Dùng công thức cho phần tử tham chiếu.

7. a) Cho  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , cho  $\tau : \Omega^r \rightarrow \Omega$ ,  $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$  là phép biến đổi khả vi liên tục biến  $\Omega^r$  thành  $\Omega$ . Ký hiệu:  $\tilde{\phi} = \phi \circ \tau$ ,  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobi. Từ công thức (2.47) chứng minh

$$\nabla \phi = \nabla^r \tilde{\phi} \mathbf{J}^{-1}.$$

Chỉ số  $r$  bên trên toán tử đạo hàm để chỉ toán tử thực hiện trong hệ tọa độ  $\xi\eta$ .

- b) Tìm công thức liên hệ giữa  $\Delta \phi$  với  $\Delta^r \tilde{\phi}$ .

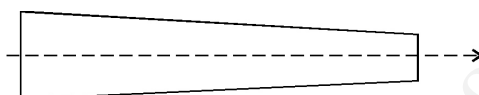
8. Trong tam giác  $\Delta$ , gọi  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  là tọa độ trọng tâm của  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Chứng minh

$$\int_{\Delta} \lambda_1^a \lambda_2^b \lambda_3^c d\Delta = 2|\Delta| \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!},$$

trong đó  $|\Delta|$  là diện tích tam giác  $\Delta$ .

9. Chứng minh các đồng nhất thức (2.43).

10. Tìm ứng suất phân bố trong thanh trụ đối xứng trục có tiết diện thay đổi như hình vẽ, bị ngàm chặt một đầu, đầu còn lại bị kéo bởi lực dọc trục  $p$ . Thanh dài  $20\text{cm}$ . Tiết diện bị ngàm có bán kính  $r_1 = 2.5\text{cm}$ , tiết diện ở đầu còn lại có bán kính  $r_2 = 1\text{cm}$ . Cho  $E = 2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $p = 1\text{kg}$ .



Hình 2.13: Thanh có tiết diện thay đổi (bài tập 10).

H.D. Chia (xấp xỉ) thanh trụ thành các PTHH có tiết diện không đổi.

cuu duong than cong . com

## Chương 3

# Phần tử hữu hạn cho phương trình đạo hàm riêng

Như đã trình bày ở những chương trước, phương pháp phần tử hữu hạn có thể áp dụng cho các bài toán biên. Các bước chính của phương pháp PTHH cho nghiệm của bài toán biên:

- i. Phát biểu biến phân hay phát biểu yếu bài toán; và
- ii. Giải xấp xỉ phương trình biến phân nhờ PTHH.

Chương này trình bày cách tìm nghiệm xấp xỉ PTHH của bài toán biên thông qua một số thí dụ, đồng thời giới thiệu cách nhìn vấn đề theo quan điểm giải tích hàm.

### 3.1 Phương trình elliptic

#### 3.1.1 Bài toán 1-chiều

**Thí dụ 3.1.** Ký hiệu  $\Omega = (0, 1)$ . Tìm  $u$  thỏa phương trình vi phân

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

cùng với các điều kiện biên:

$$u(1) = g, \quad (3.2)$$

$$-\frac{du}{dx}(0) = h. \quad (3.3)$$

Ở đây  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm cho trước, còn  $g, h$  là các số thực cho trước.



Bài toán này có nghiệm giải tích:

$$u(x) = g + (1-x)h + \int_x^1 \left[ \int_0^y f(z)dz \right] dy. \quad (3.4)$$

Ký hiệu:

$S = \{s | s \in H^1(\Omega), s(1) = g\}$  là tập hợp các hàm thử ;

$V = \{v | v \in H^1(\Omega), v(1) = 0\}$  là tập hợp các hàm trọng lượng.

Bài toán biến phân:

Cho  $f, g, h$  như trước. Tìm  $u \in S$  sao cho với mọi  $w \in V$

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h. \quad (3.5)$$

Dưới đây, để đơn giản ta gọi bài toán biên (3.1) - (3.3) là bài toán (S), còn bài toán biến phân (3.5) là bài toán (W)<sup>1</sup>. Về phương diện toán học ta cần chứng minh:

**Định lý 3.1.** *Dưới các giả thiết thích hợp ta có:*

(a) *Nếu  $u$  là nghiệm của (S) thì  $u$  cũng là nghiệm của (W).*

(b) *Nếu  $u$  là nghiệm của (W) thì  $u$  cũng là nghiệm của (S).*

*Chứng minh*

(a) Vì  $u$  là nghiệm của (S) nên

$$0 = - \int_0^1 w \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) dx$$

với mọi  $w \in V$ . Tích phân từng phần về phải,

$$0 = \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^1 w f dx - w \frac{du}{dx} \Big|_0^1.$$

Dùng điều kiện biên (3.3) và  $w(1) = 0$ , ta được:

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h. \quad (3.6)$$

Hơn nữa, vì  $u$  là nghiệm của (S) nên nó thỏa  $u(1) = g$  và vì vậy  $u \in S$ . Cuối cùng, vì  $u$  thỏa (3.6) với mọi  $w \in V$  nên  $u$  thỏa định nghĩa nghiệm yếu cho bởi (W).

<sup>1</sup>S là chữ đầu của Strong, ám chỉ phát biểu (hay dạng) mạnh của bài toán. W là chữ đầu của Weak, ám chỉ phát biểu (hay dạng) yếu của bài toán.

(b) Bây giờ giả sử  $u$  là nghiệm yếu. Vậy  $u \in S$ , suy ra  $u(1) = g$ , và

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h$$

với mọi  $w \in V$ . Tích phân từ phần vế trái và dùng  $w(1) = 0$ , ta được

$$0 = \int_0^1 w \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) dx + w(0) \left[ \frac{du}{dx}(0) + h \right]. \quad (3.7)$$

Để chứng minh  $u$  là nghiệm của (S) chỉ cần chứng minh rằng (3.7) dẫn đến:

- (i)  $\frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0$  trên  $\Omega$ ; và
- (ii)  $\frac{du}{dx}(0) + h = 0$ .

Đầu tiên ta chứng minh (i). Định nghĩa  $w$  trong (3.7) bởi

$$w = \phi \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right),$$

trong đó  $\phi$  trơn;  $\phi > 0$  với mọi  $x \in \Omega$ ; và  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ . Chẳng hạn, ta có thể lấy  $\phi(x) = x(1-x)$ . Do  $w(1) = 0$  nên  $w \in V$ . Thay  $w$  vào (3.7) thì được

$$0 = \int_0^1 \underbrace{\phi \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right)^2}_{\geq 0} dx + 0.$$

Suy ra (i) phải được thỏa.

Dùng (i) trong (3.7) để chứng minh (ii), cụ thể là

$$0 = w \left[ \frac{du}{dx}(0) + h \right].$$

Ta có thể chọn  $w \in V$  sao cho  $w(0) \neq 0$ . Vậy (ii) cũng được chứng minh ■  
Đặt:

$$a(w, u) = \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx, \quad (3.8)$$

$$(w, f) = \int_0^1 w f dx \quad (3.9)$$

lần lượt là dạng song tuyến tính đối xứng liên tục, dạng tuyến tính liên tục trên  $V$ . Phương trình biến phân (W) có thể viết lại:

$$a(w, u) = (w, f) + w(0)h. \quad (3.10)$$

Áp dụng PTHH cho bài toán biên phân là xây dựng các xấp xỉ *hữu hạn chiều* của  $S$  và  $V$ , ký hiệu  $S^h$  và  $V^h$  tương ứng. Chỉ số trên  $h$  liên hệ với lưới hay phép phân hoạch miền xác định của bài toán  $\Omega$  thành các phần tử hữu hạn. Thông thường ta muốn  $S^h \subset S$  và  $V^h \subset V$ , xấp xỉ như vậy gọi là *xấp xỉ trong*. Từ điều kiện biên ta thấy nếu  $u^h \in S^h$ ,  $w^h \in V^h$  thì  $u^h(1) = g$ ,  $w^h(1) = 0$ . Cho trước hàm  $g^h \in S^h$ . Mọi hàm  $u \in S^h$  có thể biểu diễn dưới dạng  $u^h = v^h + g^h$ , trong đó  $v^h \in V^h$ . Từ phương trình (3.10), ta có phương trình

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)h \quad (3.11)$$

xác định nghiệm yếu xấp xỉ  $u^h$  thỏa (3.11) với mọi  $w^h \in V^h$ ; hay xác định  $v^h \in V^h$  ( $u^h = v^h + g^h$ ) thỏa

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h) \quad (3.12)$$

Tóm lại, ta có dạng Galerkin của bài toán (xấp xỉ), ký hiệu (G), được phát biểu như sau: Cho trước  $f, g, h$  như trên, tìm  $u^h = v^h + g^h$ ,  $v^h \in V^h$ , sao cho với mọi  $w^h \in V^h$

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h).$$

Cho đến đây, ta có bài toán xấp xỉ của bài toán biên ban đầu. Áp dụng PTHH cho bài toán, thực chất, là xây dựng không gian xấp xỉ  $V^h$  bằng PTHH (xấp xỉ hàm).

### Xây dựng không gian xấp xỉ $V^h$ bằng PTHH

Miền  $\Omega$  được chia thành  $ne$  phần tử hữu hạn (đoạn con) bởi  $nn = ne + 1$  điểm nút:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n n,$$

phần tử thứ  $e$  là đoạn  $[x_e, x_{e+1}]$ , chiều dài  $h_e = x_{e+1} - x_e$ .

Hàm  $w^h \in V^h$  (không gian xấp xỉ) là đa thức bậc nhất trên từng phần tử

$$w^h = c_1^e N_1^e(x) + c_2^e N_2^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e \quad x_e < x < x_{e+1}. \quad (3.13)$$

Với cách xấp xỉ này ta có họ hàm tuyến tính từ mảnh:  $N_1, N_2, \dots, N_{nn}$ , gọi là hàm dạng toàn cục, xác định như sau:

★  $N_1$  liên kết với nút 1:

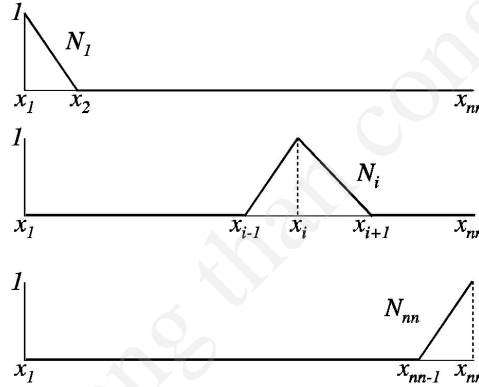
$$N_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_1} & \text{nếu } 0 = x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{nếu } x > x_2 \end{cases}$$

★  $N_i$  ( $2 \leq i \leq nn-1$ ) liên kết với nút  $i$  (nút trong):

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{nếu } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i} & \text{nếu } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{nếu } x < x_{i-1} \text{ hay } x > x_{i+1} \end{cases}$$

★  $N_{nn}$  liên kết với nút  $nn$ :

$$N_{nn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < x_{nn-1} \\ \frac{x - x_{nn-1}}{h_{nn-1}} & \text{nếu } x_{nn-1} \leq x \leq x_{nn} \end{cases}$$



Hình 3.1: Các hàm dạng toàn cục.

Các hàm dạng  $N_i$  là sự "lắp ghép" hàm dạng của các phần tử có chung nút  $i$ . Dễ thấy các hàm  $N_i$  thỏa điều kiện kronecker

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

và vì vậy họ hàm này độc lập tuyến tính. Do  $w^h(1) = 0$ , ta định nghĩa:  $V^h = \langle N_1, N_2, \dots, N_{nn-1} \rangle$ . Điều này có nghĩa là nếu  $w^h \in V^h$  thì tồn tại các hằng số thực  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, nn-1$  sao cho

$$w^h = c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_{nn-1} N_{nn-1} = \sum_{i=1}^{nn-1} c_i N_i = \mathbf{N} \mathbf{c}, \quad (3.14)$$

trong đó  $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{nn-1}]$ ,  $\mathbf{c} = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{nn-1}\}^T$ .

Để xác định các hàm  $u^h \in S^h$  ta đưa vào hàm  $g^h$  định nghĩa như sau  $g^h = gN_{nn}$ , khi đó nếu  $u^h \in S^h$  thì tồn tại các số thực  $q_i, i = 1, 2, \dots, nn-1$ , sao cho

$$u^h = \sum_{i=1}^{nn-1} q_i N_i + gN_{nn} = \mathbf{N}\mathbf{q} + gN_{nn}, \quad (3.15)$$

trong đó  $\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{nn-1}\}^T$ .

Bây giờ thay (3.14) và (3.15) vào phương trình Galerkin (3.12), rồi dùng tính song tuyến tính của  $a$ , và tính tuyến tính của các biểu thức còn lại, ta được:

$$\sum_{i,j=1}^{nn-1} c_i a(N_i, N_j) q_j = \sum_{i=1}^{nn-1} c_i (N_i, f) + h \sum_{i=1}^{nn-1} c_i N_i(0) - g \sum_{i=1}^{nn-1} c_i a(N_i, N_{nn}).$$

Vì phương trình trên thỏa với mọi  $w^h \in V^h$  nên nó thỏa với các  $c_i$  tùy ý, suy ra:

$$\sum_{j=1}^{nn-1} a(N_i, N_j) q_j = (N_i, f) + hN_i(0) - ga(N_i, N_{nn}) \quad (3.16)$$

với mọi  $i = 1, 2, \dots, nn$ .

Ký hiệu:  $K_{ij} = a(N_i, N_j)$ ,  $p_i = (N_i, f) + hN_i(0) - ga(N_i, N_{nn})$  thì (3.16) trở thành:

$$\sum_{j=1}^{nn-1} K_{ij} q_j = p_i. \quad (3.17)$$

hay dưới dạng ma trận

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p},$$

trong đó  $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ ,  $\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{nn}\}^T$ ,  $\mathbf{p} = \{p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{nn}\}^T$ , đối chiếu với mục trước, lần lượt là ma trận độ cứng toàn cục, vectơ chuyển dịch, vectơ tải toàn cục (sau khi khử điều kiện biên).

**Nhận xét 3.1.** Lối trình bày ở đây, theo quan điểm toàn cục, nêu bật ý tưởng cơ bản của PTHH là xấp xỉ không gian hàm  $V$  bằng không gian hữu hạn chiều  $V^h$ . Tuy nhiên, trong thực hành giải các bài toán biên người ta tiến hành theo quan điểm địa phương. •

**Thiết lập phương trình PTHH (Galerkin) theo quan điểm địa phương**

Sau khi đã phân hoạch miền  $\Omega$  (bước 1), chọn đa thức nội suy cho từng phần tử (bước 2). Bước 3, thiết lập phương trình PTHH được thực hiện bằng cách xét phương trình (3.1) trên phần tử hữu hạn  $\Omega^{(e)} = (x_e, x_{e+1})$ . Thực hiện tính toán tương tự như khi thiết lập công thức biến phân,

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) w dx.$$

Tích phân từng phần:

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} w f dx + \underbrace{\frac{du}{dx}(x_{e+1})w(x_{e+1}) - \frac{du}{dx}(x_e)w(x_e)}_{\text{số hạng liên quan đến biên phần tử}}.$$

Dùng các ký hiệu

$$a^e(w, u) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx, \quad (w, f)^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} w f dx,$$

công thức trên có thể viết lại:

$$a^e(w, u) = (w, f)^e + \frac{du}{dx}(x_{e+1})w(x_{e+1}) - \frac{du}{dx}(x_e)w(x_e).$$

Theo cách xấp xỉ hàm trên  $\Omega^e$ ,  $w^h = \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e$  và  $u^h = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e$ , thì

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 c_{\alpha}^e a^e(N_{\alpha}^e, N_{\beta}^e) q_{\beta}^e &= \\ \sum_{\alpha=1}^2 c_{\alpha}^e (N_{\alpha}^e, f)^e + \sum_{\alpha=1}^2 c_{\alpha}^e \left[ \frac{du^e}{dx}(x_{e+1}) N_{\alpha}^e(x_{e+1}) - \frac{du^e}{dx}(x_e) N_{\alpha}^e(x_e) \right]. \end{aligned}$$

Do các  $c_{\alpha}^e$  là tùy ý nên

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^2 a^e(N_{\alpha}^e, N_{\beta}^e) q_{\beta}^e &= \\ (N_{\alpha}^e, f)^e + \left[ \frac{du^e}{dx}(x_{e+1}) N_{\alpha}^e(x_{e+1}) - \frac{du^e}{dx}(x_e) N_{\alpha}^e(x_e) \right]. \end{aligned}$$

Ký hiệu:

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}^e &= a^e(N_{\alpha}^e, N_{\beta}^e), \\ p_{\alpha}^e &= (N_{\alpha}^e, f)^e + \underbrace{\left[ \frac{du^e}{dx}(x_{e+1}) N_{\alpha}^e(x_{e+1}) - \frac{du^e}{dx}(x_e) N_{\alpha}^e(x_e) \right]}_{\text{số hạng liên quan đến biên phần tử}}, \end{aligned}$$

phương trình thành:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{p}^e,$$

trong đó  $\mathbf{k}^e = [k_{\alpha\beta}^e]$  và  $\mathbf{p}^e = \{p_\beta^e\}$  lần lượt là ma trận độ cứng và vectơ tải phần tử. Cụ thể, trong tính toán thực hành, ma trận độ cứng phần tử được tính bởi công thức:

$$\mathbf{k}^e = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

còn vectơ tải phần tử, xấp xỉ PTHH hàm  $f$  cùng kiểu, được tính như sau.

$$p_\alpha^e = (N_\alpha^e, f^e) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_\alpha^e f dx = \sum_{\beta=1}^2 \left( \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_\alpha^e N_\beta^e dx \right) f(x_\beta^e),$$

suy ra

$$\mathbf{p}^e = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2f(x_e) + f(x_{e+1}) \\ f(x_e) + 2f(x_{e+1}) \end{bmatrix}.$$

Chú ý, ở đây ta không đưa vào số hạng liên quan đến biên của phần tử, vì nó sẽ bị triệt tiêu (khử lẫn nhau) khi lắp ghép nếu biên nằm bên trong, hoặc sẽ được xác định từ điều kiện biên bài toán nếu biên nằm trên biên của miền. Trong bài toán đang xét, tại nút đầu (phần tử thứ nhất),

$$\begin{bmatrix} -\frac{du}{dx}(x_1)N_1^1(x_1) \\ -\frac{du}{dx}(x_1)N_2^1(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, ta chỉ cần "cộng thêm"  $h$  vào thành phần thứ nhất (ứng với nút 1) của vectơ tải toàn cục (xem chương trình `pthh3_1.m`).

Phần còn lại được thực hiện tương tự như đã trình bày trong mục trước.

**Nhận xét 3.2.** Ta có thể tính "gộp" ma trận độ cứng phần tử, vectơ tải phần tử (dạng ma trận). Trong  $\Omega^e$  ta có:

$$w = \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e, \quad u = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e, \quad f = \mathbf{N}^e \mathbf{f}^e.$$

Thay vào biểu thức của  $a^e(w, u)$ ,

$$\begin{aligned} a^e(w, u) &= a^e(\mathbf{N}^e \mathbf{c}^e, \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e) \\ &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{c}^{eT} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^{eT} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e dx \\ &= \mathbf{c}^{eT} \left( \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^{eT} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{q}^e \\ &= \mathbf{c}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e, \end{aligned}$$

trong đó

$$\mathbf{k}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^{eT} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^e dx. \quad (3.18)$$

Tương tự, thay vào biểu thức của  $(w, f)^e$ ,

$$\begin{aligned} (w, f)^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e dx \\ &= \mathbf{c}^{eT} \left( \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{q}^e \\ &= \mathbf{c}^{eT} \mathbf{p}^e, \end{aligned}$$

trong đó

$$\mathbf{p}^e = \left( \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{q}^e, \quad (3.19)$$

Các công thức (3.18), (3.19) rất thuận tiện cho việc tính ma trận độ cứng và vectơ tải phần tử bằng Matlab (symbolic). •

### Chương trình pthh3\_1.m

Chương trình được viết cho thí dụ 3.1 với các số liệu cụ thể:  $f(x) = -6x$ ,  $g = -1$ ,  $h = -2$ . Nghiệm chính xác:  $u = x^3 + 2x - 4$ . Người đọc nên đối chiếu với chương trình thanhnn.m để thấy các thành phần chung của các chương trình PTHH.

```
% pthh3_1.m
% chương trình thí dụ 3.1, f=-6x, g=-1, h=-2
% T.A. Ngoc
% update: 25/9/2009
% bien - mo ta
% nn ..... tong so nut
% ne ..... tong so phan tu
% coord .... vecto toa do cac nut
% la ..... ma tran lap ghép
% dcond .... dieu kien Dirichlet
% fcond .... dieu kien Neumann
% ke ..... ma tran do cung phan tu
% pe ..... vecto tai phan tu
% gk ..... ma tran do cung toan cuc
% gp ..... vecto tai toan cuc
```



```

% q ..... vecto chuyen dich nut toan cuc
% chuong trinh goi function ffunc3_1 - ham f

clear all
% TIEN XU LY
ne=10;
nn=ne+1;
coord=0:1/ne:1;
for e=1:ne
    la(e,1)=e;
    la(e,2)=e+1;
end
fcond=[1 -2];
dcond=[nn -1];
% XU LY
gk=zeros(nn,nn);
gp=zeros(nn,1);
% tinh ma tran do cung va vecto tai toan cuc
for e=1:ne
    i=la(e,1);
    j=la(e,2);
    x1=coord(i);
    x2=coord(j);
    % ma tran do cung phan tu
    ke=1/abs(x2-x1)*[1 -1; -1 1];
    % lap ghep
    gk(i,i)=gk(i,i)+ke(1,1);
    gk(i,j)=gk(i,j)+ke(1,2);
    gk(j,i)=gk(j,i)+ke(2,1);
    gk(j,j)=gk(j,j)+ke(2,2);
    % vecto tai phan tu
    pe=abs(x2-x1)/6*[2*ffunc3_1(x1)+ffunc3_1(x2); ffunc3_1(x1) ...
        +2*ffunc3_1(x2)];
    % lap ghep
    gp(i)=gp(i)+pe(1);
    gp(j)=gp(j)+pe(2);
end;
% dua vao dieu kien nut
for i=1:size(fcond,1)
    gp(fcond(i,1))=gp(fcond(i,1))+fcond(i,2);
end

```

```

for i=1:size(dcond,1)
    for j=1:nn
        gp(j)=gp(j)-gk(j,dcond(i,1))*dcond(i,2);
    end
    for j=1:nn
        gk(dcond(i,1),j)=0.0;
        gk(j,dcond(i,1))=0.0;
    end
    gk(dcond(i,1),dcond(i,1))=1.0;
    gp(dcond(i,1))=dcond(i,2);
end
q=inv(gk)*gp;
% HAU XU LY
disp(sprintf('\n %s', 'KET QUA SO VOI NGHIEM CX'))
% nghiem chinh xac  $u=x^3+2*x-4$ 
ucx=coord.^3+2*coord-4;
% xuất chuyển dịch
disp(sprintf('%s', 'nut      uxx      ucx'))
for i=1:nn
    disp(sprintf('%d\t\t %f\t\t %f',i,q(i),ucx(i)))
end
disp(sprintf('%s%e', 'sai so cuc dai: ', max(abs(q-transpose(ucx)))))

```

Hàm được gọi trong thí dụ 3.1:

```

% ffunc3_1.m
function v = ffunc3_1(x)
% ham duoc goi trong thi du 3.1
v = -6*x;
end

```

Kết quả chạy chương trình:

```

KET QUA SO VOI NGHIEM CX
nut      uxx      ucx
1  -4.000000  -4.000000
2  -3.799000  -3.799000
3  -3.592000  -3.592000
4  -3.373000  -3.373000
5  -3.136000  -3.136000
6  -2.875000  -2.875000
7  -2.584000  -2.584000

```

8 -2.257000 -2.257000  
 9 -1.888000 -1.888000  
 10 -1.471000 -1.471000  
 11 -1.000000 -1.000000  
 sai so cuc dai: 5.773160e-015

### 3.1.2 Bài toán 2-chiều

**Thí dụ 3.2.** Cho  $\Omega$  là tập mở bị chặn trong  $\subset \mathbb{R}^2$  với biên  $\Gamma$ , giải bài toán biên elliptic:

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.20)$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \Gamma, \quad (3.21)$$

trong đó  $f = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ , là hàm cho trước thuộc lớp  $L^2(\Omega)$ .

Phương trình đạo hàm riêng trong bài toán trên gọi là phương trình Poisson. Nó là mô hình toán học của nhiều bài toán gặp trong vật lý. Thí dụ, gọi  $u$  là nhiệt độ phân bố trong vật thể chiếm miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nếu quá trình dẫn nhiệt là dừng ta có các hệ thức sau:

$$q_i = -k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{định luật Fourier}), \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{định luật bảo toàn năng lượng}), \quad (3.23)$$

ở đây  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $q_i$  ký hiệu dòng nhiệt theo hướng  $x_i$ ,  $k_i(\mathbf{x})$  là độ dẫn nhiệt tại  $\mathbf{x}$  theo hướng  $x_i$ ,  $f(\mathbf{x})$  là mật độ nguồn nhiệt tại  $\mathbf{x}$ . Nếu  $k_i(\mathbf{x}) \equiv 1$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $i = 1, 2, 3$ , khử  $q_i$  trong (3.22) - (3.23) ta được  $-\Delta u = f$  trong  $\Omega$ .

▷ Phát biểu yếu

Đưa vào không gian hàm  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ trên } \Gamma\}$ . Lấy  $w \in H_0^1(\Omega)$  tùy ý, tích vô hướng  $w$  với hai vế phương trình (3.20),

$$-\int_{\Omega} w \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w f d\mathbf{x}. \quad (3.24)$$

Vì

$$\begin{aligned} w \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Trong biến đổi cuối ta đã dùng công thức Gauss với  $\mathbf{n}$  là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài nên (3.24) trở thành

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma. \quad (3.25)$$

Dùng điều kiện  $w = 0$  trên  $\Gamma$ , cuối cùng, ta được công thức biến phân của bài toán biên:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w f d\mathbf{x}. \quad (3.26)$$

Đưa vào dạng song tuyến tính (đối xứng)  $a(\cdot, \cdot)$  và dạng tuyến tính  $\ell(\cdot)$  trên  $H_0^1(\Omega)$  định bởi:

$$a(w, u) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x}, \quad (3.27)$$

$$\ell(w) = \int_{\Omega} w f d\mathbf{x}; \quad (3.28)$$

bài toán biến phân tương ứng: tìm  $u \in H_0^1(\Omega)$  sao cho

$$a(w, u) = \ell(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (3.29)$$

▷ Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu

Trong chương 1 ta đã "thông báo": sự tồn tại và duy nhất nghiệm (yếu) của bài toán biến phân được chứng minh nhờ định lý Lax - Milgram, và trong trường hợp dạng song tuyến tính  $a(\cdot, \cdot)$  đối xứng thì bài toán biến phân tương đương với bài toán tối ưu. Bây giờ, trước khi áp dụng PTHH cho bài toán đang xét, ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm, sự tương đương với bài toán tối ưu của bài toán này.

**Bổ đề 3.1** (Poincaré - Fredrichs). *Giả sử  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  là tập mở bị chặn với biên  $\Gamma$  đủ trơn và cho  $u \in H_0^1(\Omega)$ ; thì tồn tại một hằng số  $c(\Omega)$ , độc lập đối với  $u$  sao cho*

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq c(\Omega) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.30)$$

*Chứng minh.* Vì mọi hàm  $u \in H_0^1(\Omega)$  là giới hạn trong  $H^1(\Omega)$  của một dãy  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ , nên chỉ cần chứng minh bất đẳng thức này với  $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ .

Để đơn giản, ta trình bày chứng minh cho trường hợp  $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ . Chứng minh cho  $\Omega$  tổng quát là tương tự.

Hiển nhiên,

$$u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi = \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi, \quad c < y < d.$$

Rồi, bởi bất đẳng thức Cauchy - Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy &= \int_a^b \int_c^d \left| \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \right|^2 dx dy \\ &\leq \int_a^b \int_c^d (x - a) \left( \int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi \right) dx dy \\ &\leq \int_a^b (x - a) dx \times \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \\ &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq \frac{1}{2}(d - c)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dx dy.$$

Cộng hai bất đẳng thức vừa tìm, ta được

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq c(\Omega) \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 \right) dx dy,$$

trong đó  $c(\Omega) = \left( \frac{2}{(b-a)^2} + \frac{2}{(d-c)^2} \right)^{-1}$ . ■

Dùng Bổ đề 3.1 để kiểm tra bài toán biên phân (3.29) thỏa các điều kiện của định lý Lax - Milgram nên có nghiệm (yếu) duy nhất.

▷ Bài toán cực tiểu hóa (tối ưu)

Do tính đối xứng của dạng song tuyến tính  $a(\cdot, \cdot)$  nên bài toán biên phân (3.29) có thể phát biểu lại như là bài toán cực tiểu hóa. Để chính xác hơn, ta định nghĩa phiếm hàm toàn phương (quadratic functional)  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  bởi

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v), \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.31)$$

**Bổ đề 3.2.** Cho  $u$  là nghiệm yếu (duy nhất) của (3.29) trong  $H_0^1(\Omega)$  và giả sử rằng  $a(\cdot, \cdot)$  là dạng song tuyến tính đối xứng trên  $H_0^1(\Omega)$ ; thì  $u$  là cái cực tiểu hóa duy nhất của  $J(\cdot)$  trên  $H_0^1(\Omega)$ .

*Chứng minh.* Cho  $u$  là nghiệm yếu duy nhất của (3.29) trong  $H_0^1(\Omega)$  và với  $v \in H_0^1(\Omega)$ , xét  $J(v) - J(u)$ :

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v, v) - \frac{1}{2}a(u, u) + \ell(v - u) \\ &= \frac{1}{2}a(v, v) - \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v - u) \\ &= \frac{1}{2}[a(v, v) - 2a(u, v) + a(u, u)] \\ &= \frac{1}{2}[a(v, v) - a(v, u) - a(u, v) + a(u, u)] \quad (\text{do tính đối xứng}) \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u). \end{aligned}$$

Vì (3.30) nên tồn tại hằng số dương  $c_0$  sao cho  $a(v - u, v - u) \geq c_0\|v - u\|_{H^1(\Omega)}^2$ .  
Vậy,

$$J(v) - J(u) \geq c_0\|v - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq 0 \Rightarrow J(v) \geq J(u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

nghĩa là  $u$  cực tiểu hóa  $J(\cdot)$  trên  $H_0^1(\Omega)$ .

Hơn nữa, dễ thấy  $u$  là cái cực tiểu hóa duy nhất. ■

Dễ dàng chứng minh  $J(\cdot)$  lồi, nghĩa là

$$J((1 - \theta)v + \theta w) \leq (1 - \theta)J(v) + \theta J(w) \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

[Dùng đồng nhất thức

$$(1 - \theta)J(v) + \theta J(w) = J((1 - \theta)v + \theta w) + \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)a(v - w, v - w)$$

và bất đẳng thức  $a(v - w, v - w) \geq 0$ .]

Hơn nữa, nếu  $u$  cực tiểu hóa  $J(\cdot)$  thì  $J(\cdot)$  có một điểm dừng (stationary point) tại  $u$ ; cụ thể,

$$J'(u)v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = 0$$

với mọi  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Vì

$$\frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = a(u, v) - \ell(v) + \frac{\lambda}{2}a(v, v),$$

ta kết luận rằng nếu  $u$  cực tiểu hóa  $J(\cdot)$  thì

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [a(u, v) - \ell(v) + \frac{\lambda}{2} a(v, v)] = a(u, v) - \ell(v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

điều này chứng minh bổ đề dưới đây.

**Bổ đề 3.3.** *Giả sử  $u \in H_0^1(\Omega)$  cực tiểu hóa  $J(\cdot)$  trên  $H_0^1(\Omega)$ ; thì  $u$  là nghiệm (duy nhất) của bài toán (3.29). Bài toán (3.29) được gọi là phương trình Euler - lagrange cho bài toán cực tiểu hóa này.*

Bổ đề này là đảo của bổ đề trước. Cả hai bổ đề biểu diễn sự tương đương của bài toán (3.29) với bài toán cực tiểu hóa: tìm  $u \in H_0^1(\Omega)$  sao cho

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.32)$$

▷ *Xấp xỉ PTHH*

Bây giờ ta áp dụng PTHH để xấp xỉ bài toán biến phân (3.29), dùng phần tử tam giác với nội suy tuyến tính.

*Bước 1:* phân hoạch miền  $\Omega$  bởi lưới các tam giác  $\Omega^e$ .

*Bước 2:* xấp xỉ hàm bằng đa thức bậc nhất trên từng phần tử (phần tử tam giác 3 nút), với phần tử  $\Omega^e$  là tam giác với các nút được đánh số thứ tự địa phương ngược chiều kim đồng hồ<sup>2</sup>  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$u^e = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e$$

trong đó  $\mathbf{N}^e = [N_1^e(x, y) \ N_2^e(x, y) \ N_3^e(x, y)]$ ,

$$\begin{aligned} N_1^e(x, y) &= \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3 + x(-y_3 + y_2) - y(-x_3 + x_2)}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}, \\ N_2^e(x, y) &= \frac{-x_1 y_3 + y_1 x_3 + x(-y_3 + y_1) + y(-x_3 + x_1)}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}, \\ N_3^e(x, y) &= \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2 + x(-y_2 + y_1) - y(-x_2 + x_1)}{x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2}, \end{aligned}$$

$\mathbf{q}^e = \{q_1^e \ q_2^e \ q_3^e\}^T$  với  $q_i^e = u^e(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

*Bước 3:* từ phương trình

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^e$$

<sup>2</sup>Cách đánh số này nhằm mục đích phép biến đổi từ phần tử  $\Omega^e$  sang phần tử tham chiếu (xem thí dụ 2.2) có Jacobian dương.

ta có công thức biến phân của bài toán phát biểu cho phần tử  $\Omega^e$  với biên  $\Gamma^e$ :

$$\int_{\Omega^e} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\Omega^e} w f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma^e. \quad (3.33)$$

Ký hiệu như trong thí dụ trước,

$$a^e(w, u) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x}, \quad (w, f)^e = \int_{\Omega^e} w f d\mathbf{x},$$

công thức trên có thể viết lại:

$$a^e(w, u) = (w, f)^e + \int_{\Gamma^e} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma^e.$$

Tương tự như thí dụ trước, tính ma trận độ cứng phần tử,

$$k_{\alpha\beta}^e = a^e(N_\alpha^e, N_\beta^e) = \int_{\Omega^e} \nabla N_\alpha^e \cdot (\nabla N_\beta^e)^T d\mathbf{x}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Nhưng để tính tích phân trên  $\Omega^e$  thì, khác với thí dụ trước, ta cần đổi biến để biến đổi miền  $\Omega^e$  thành miền đơn giản hơn giống nhau cho mọi phần tử. Một cách tự nhiên, miền đơn giản được chọn là phần tử tham chiếu 2-chiều (xem thí dụ 2.2), tam giác  $\Omega^r$  với các đỉnh  $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_3 = (0, 1)$  trong mặt phẳng tọa độ  $\xi\eta$ , lần lượt tương ứng với các nút  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$ . Phép biến đổi tương ứng giữa điểm  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$  với điểm  $\mathbf{x} = (x, y)$ :

$$\mathbf{x} = (1 - \xi - \eta)\mathbf{x}_1 + \xi\mathbf{x}_2 + \eta\mathbf{x}_3. \quad (3.34)$$

Ma trận Jacobi của phép biến đổi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Định thức Jacobi (Jacobian):

$$J = \det \mathbf{J} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1). \quad (3.36)$$

Để biến đổi hàm dưới dấu tích phân, dùng công thức (2.47), ta có

$$\nabla N_\alpha^e = \nabla^r \tilde{N}_\alpha \mathbf{J}^{-1}, \quad (\nabla N_\beta^e)^T = \mathbf{J}^{-T} \nabla^r \tilde{N}_\beta.$$



Áp dụng công thức đổi biến số trong tích phân hai lớp

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}^e &= \int_{\Omega^r} \nabla^r \tilde{N}_\alpha^e (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}^{-T}) (\nabla^r \tilde{N}_\beta^e)^T J d\xi d\eta \\ &= J \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \nabla^r \tilde{N}_\alpha^e (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}^{-T}) (\nabla^r \tilde{N}_\beta^e)^T d\eta, \end{aligned}$$

trong đó các hàm dạng trong hệ tọa độ tham chiếu:

$$\tilde{\mathbf{N}} = [1 - \xi - \eta, \xi, \eta].$$

Biểu thức cụ thể của  $k_{\alpha\beta}^e$  có thể tìm được nhờ Matlab, script file:

```
% mtdc2D.m
clear all
% tính ma tran do cung phan tu
syms x y x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3
Jmat=[x_2-x_1 x_3-x_1; y_2-y_1 y_3-y_1]; % ma tran jacobi
J=abs(det(Jmat)); % jacobian
Jinv=inv(Jmat); % ma tran dao cua ma tran jacobi
syms xi eta
N=[1-xi-eta xi eta];
for i=1:3
    for j=1:3
        ke(i,j)=simplify(J*int(int([diff(N(i),xi) diff(N(i),eta)] ...
            *Jinv*transpose(Jinv) ...
            *transpose([diff(N(j),xi) diff(N(j),eta)]), ...
            eta,0,1-xi),xi,0,1));
    end
end
```

Kết quả:

$$\begin{aligned} k_{11}^{(e)} &= \frac{1}{2J} (y_3^2 - 2y_2y_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 + x_2^2), \\ k_{12}^{(e)} &= -\frac{1}{2J} (y_3^2 - y_3y_1 - y_2y_3 + y_2y_1 - x_2x_3 + x_2x_1 + x_3^2 - x_3x_1), \\ k_{13}^{(e)} &= -\frac{1}{2J} (-y_2y_3 + y_3y_1 + y_2^2 - y_2y_1 + x_2^2 - x_2x_1 - x_2x_3 + x_3x_1), \\ k_{21}^{(e)} &= -\frac{1}{2J} (y_3^2 - y_3y_1 - y_2y_3 + y_2y_1 - x_2x_3 + x_2x_1 + x_3^2 - x_3x_1), \\ k_{22}^{(e)} &= \frac{1}{2J} (y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2 + x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2), \\ k_{23}^{(e)} &= \frac{1}{2J} (-y_2y_3 + y_3y_1 + y_2y_1 - y_1^2 - x_2x_3 + x_3x_1 + x_2x_1 - x_1^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{31}^{(e)} &= -\frac{1}{2J}(-y_2y_3 + y_3y_1 + y_2^2 - y_2y_1 + x_2^2 - x_2x_1 - x_2x_3 + x_3x_1), \\
k_{32}^{(e)} &= \frac{1}{2J}(-y_2y_3 + y_3y_1 + y_2y_1 - y_1^2 - x_2x_3 + x_3x_1 + x_2x_1 - x_1^2), \\
k_{33}^{(e)} &= \frac{1}{2J}(y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2).
\end{aligned}$$

Với vectơ tải phần tử, cũng như thí dụ trước, ta "bỏ qua" số hạng liên quan đến biên của phần tử,

$$\int_{\Gamma^e} N_{\alpha}^{(e)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma^e,$$

và xấp xỉ hàm  $f$  trên phần tử với cùng một kiểu PTHH, ta được:

$$p_{\alpha}^e = (N_{\alpha}^e, f)^e = \sum_{\beta=1}^3 f^e(\mathbf{x}_{\beta}) \int_{\Omega^e} N_{\alpha}^e N_{\beta}^e d\mathbf{x}. \quad (3.37)$$

Áp dụng công thức đổi biến trong tích phân hai lớp:

$$p_{\alpha}^e = \sum_{\beta=1}^3 \tilde{f}_{\beta}^e \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \tilde{N}_{\alpha}^e \tilde{N}_{\beta}^e J d\eta, \quad (3.38)$$

trong đó ký hiệu  $\tilde{f}_{\beta}^e = \tilde{f}^e(\xi_{\beta}, \eta_{\beta})$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ .

Thay biểu thức của các hàm dạng trong tọa độ tham chiếu, cuối cùng ta được:

$$\mathbf{p}^e = \frac{J}{24} \begin{bmatrix} 2f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f_1 + f_2 + 2f_3 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Kết quả này thu được từ script file:

```
% vttai2D.m
clear all
% tính vecto tại phan tu
syms x y x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3
Jmat=[x_2-x_1 x_3-x_1; y_2-y_1 y_3-y_1]; % ma tran jacobi
J=abs(det(Jmat)); % jacobian
syms xi eta f_1 f_2 f_3
N=[1-xi-eta xi eta];
F=[f_1; f_2; f_3];
pe=simplify(J*int(int(N*F*transpose(N),eta,0,1-xi),xi,0,1));
```

*Bước 4:* vì điều kiện biên của bài toán là điều kiện Dirichlet nên các "số hạng liên quan đến biên của phần tử" (trong biểu thức tính vectơ tải địa phương) được "áp đặt" bằng 0 khi  $\mathbf{x}_\alpha \in \Gamma$ , do đó vectơ tải trọng toàn cục không cần hiệu chỉnh<sup>3</sup> (xem nhận xét 3.5). Việc khử điều kiện biên Dirichlet tương tự như trong thí dụ trước. Thông tin về điều kiện Dirichlet được chứa đựng trong mảng 2 cột `dcond` có cấu trúc như sau:

TT nút	Giá trị
nút 1	giá trị 1
nút 2	giá trị 2
$\vdots$	$\vdots$

Số dòng của mảng này bằng số điểm nút nằm trên biên.

Nội dung của bước 4, 5 không khác thí dụ trước.

### Chương trình pthh3\_2.m

Chương trình được viết cho thí dụ 3.2 với  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f(x, y) = (6y - 4)x^2(x - 1) + 2y(1 - y)^2(3x - 1)$ . Nghiệm chính xác của bài toán:  $u = x^2(1 - x)y(1 - y)^2$ .

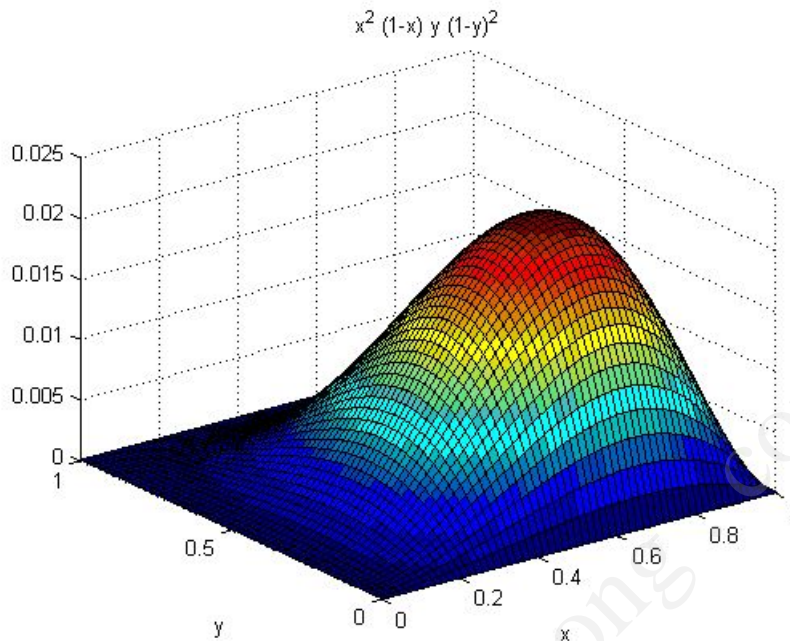
#### Thủ tục đánh số nút và phần tử

Về nguyên tắc việc đánh số thứ tự phần tử, thứ tự nút toàn cục (tương ứng địa phương) là tùy ý, miễn là hai phần tử (tương ứng nút) khác nhau được đánh số khác nhau. Thông thường, trong các bài toán phức tạp, sau khi chia lưới PTHH người ta đánh số phần tử, nút bằng "tay", rồi nhập dữ liệu dưới dạng file dữ liệu. Trong các bài toán minh họa trong chương này, do miền xác định của bài toán có dạng đơn giản nên ta có thể đưa ra thủ tục đánh số phần tử, nút, thậm chí cả tọa độ của chúng. Dưới đây là thủ tục (tự động) đề nghị thực hiện công đoạn này.

Hình vuông  $[0, 1] \times [0, 1]$  được phân hoạch bằng lưới các tam giác. Gọi  $m_a$  và  $m_b$  lần lượt là số đường tọa độ  $x = \text{const}$  (dọc) và  $y = \text{const}$  (ngang) phân hoạch miền. Việc đánh số nút được thực hiện tuần tự từ dưới lên trên, từ trái qua phải. Theo cách này thì nút ở giao điểm đường dọc thứ  $i$  với đường ngang thứ  $j$  có thứ tự là  $(j - 1)m_a + i$ . Tổng số nút là  $nn = m_a m_b$ .

Cách đánh số phần tử cũng được thực hiện tương tự. Các dải giới hạn bởi hai đường tọa độ song song kề nhau được đánh số từ dưới lên trên (đối với dải ngang), từ trái qua phải (đối với dải dọc). Phần giao của dải dọc thứ  $i$  với dải ngang thứ  $j$ , được gọi là ô, gồm hai tam giác, tam giác bên dưới có thứ tự là  $2(j - 1)(m_a - 1) + i$ , còn  $(2j - 1)(m_a - 1) + i$  là thứ tự của tam giác trên. Tổng số phần tử của phép phân hoạch là  $ne = 2(m_a - 1)(m_b - 1)$ .

<sup>3</sup>Thật ra các hàm dạng  $N_\alpha^{(e)}$  ứng với nút  $\mathbf{x}_\alpha \in \Gamma$  không có mặt trong cơ sở của không gian hàm xấp xỉ  $V^h$ .

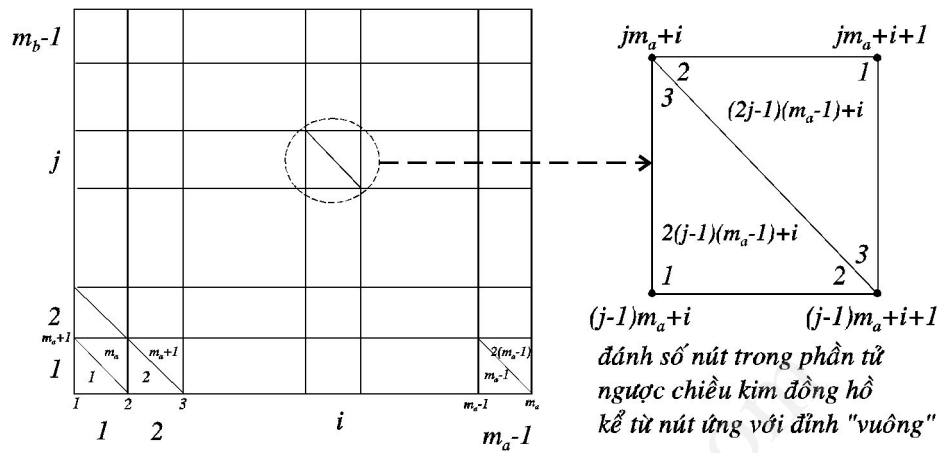


Hình 3.2: Đồ thị hàm  $u = x^2(1-x)y(1-y)^2$  (thí dụ 3.2).

Quy ước đánh số các nút trong một phần tử (thứ tự địa phương) ngược chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ nút là đỉnh vuông, thủ tục xây dựng ma trận lắp ghép được thực hiện theo từng ô (hai phần tử hữu hạn). Thứ tự địa phương của các nút được cho trên hình 3.3.

#### pthh3\_2.m

```
% chương trình thí dụ 3.2,
% f=(6*y-4)*x^2*(x-1)+2*y*(1-y)^2*(3*x-1)
% T.A. Ngọc
% update: 28/9/2009
% bien - mo ta
% nx ..... so nut tren truc x
% ny ..... so nut tren truc y
% nn ..... tong so nut
% ne ..... tong so phan tu
% coord .... vecto toa do cac nut
% la ..... ma tran lap ghép
% dcond .... dieu kien Dirichlet
% ke ..... ma tran do cung phan tu
```



Hình 3.3: Cách đánh số nút và phần tử.

```
% pe ..... vecto tai phan tu
% gk ..... ma tran do cung toan cuc
% gp ..... vecto tai toan cuc
% q ..... vecto chuyen dich nut toan cuc
% chương trình gọi các function: stiff3_2 (mtdc phan tu), load3_2
% (vtt phan tu), ffunc3_2 (ham f)
```

```
clear all
% TIEN XU LY
nx=20;
ny=20;
ne=2*(nx-1)*(ny-1);
nn=nx*ny;
for j=1:ny
    for i=1:nx
        nut=(j-1)*nx+i;
        coord(nut,1)=(i-1)/(nx-1);
        coord(nut,2)=(j-1)/(ny-1);
    end
end
for j=1:ny-1
    for i=1:nx-1
        e1=2*(j-1)*(nx-1)+i;
        e2=(2*j-1)*(nx-1)+i;
        la(e1,1)=(j-1)*nx+i;
```

```

        la(e1,2)=(j-1)*nx+i+1;
        la(e1,3)=j*nx+i;
        la(e2,1)=j*nx+i+1;
        la(e2,2)=j*nx+i;
        la(e2,3)=(j-1)*nx+i+1;
    end
end
%
dn=0;
for n=1:nn
    if coord(n,1)==0.0|coord(n,1)==1.0|coord(n,2)==0.0|coord(n,2)==1.0
        dn=dn+1;
        dcond(dn,1)=n;
        dcond(dn,2)=0;
    end
end
% XU LY
gk=zeros(nn,nn);
gp=zeros(n,1);
% tinh ma tran do cung va vecto tai toan cuc
for e=1:ne
    i=la(e,1);
    j=la(e,2);
    k=la(e,3);
    x1=coord(i,1);
    y1=coord(i,2);
    x2=coord(j,1);
    y2=coord(j,2);
    x3=coord(k,1);
    y3=coord(k,2);
    % ma tran do cung phan tu
    ke=stiff3_2(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    % lap ghep
    gk(i,i)=gk(i,i)+ke(1,1);
    gk(i,j)=gk(i,j)+ke(1,2);
    gk(i,k)=gk(i,k)+ke(1,3);
    gk(j,i)=gk(j,i)+ke(2,1);
    gk(j,j)=gk(j,j)+ke(2,2);
    gk(j,k)=gk(j,k)+ke(2,3);
    gk(k,i)=gk(k,i)+ke(3,1);
    gk(k,j)=gk(k,j)+ke(3,2);

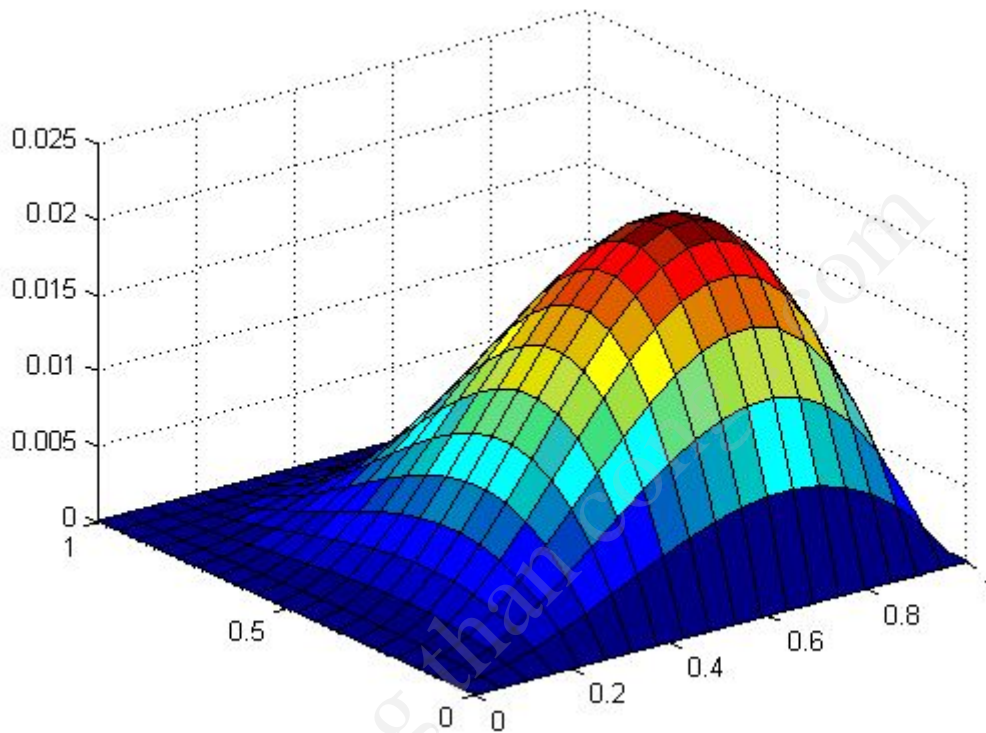
```

```

gk(k,k)=gk(k,k)+ke(3,3);
% vecto tai phan tu
pe=load3_2(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
% lap ghep
gp(i)=gp(i)+pe(1);
gp(j)=gp(j)+pe(2);
gp(k)=gp(k)+pe(3);
end;
% dua vao dieu kien nut
for i=1:size(dcond,1)
    for j=1:nn
        gp(j)=gp(j)-gk(j,dcond(i,1))*dcond(i,2);
    end
    for j=1:nn
        gk(dcond(i,1),j)=0.0;
        gk(j,dcond(i,1))=0.0;
    end
    gk(dcond(i,1),dcond(i,1))=1.0;
    gp(dcond(i,1))=dcond(i,2);
end
q=inv(gk)*gp;
% HAU XU LY
disp(sprintf('\n %s', 'KET QUA SO VOI NGHIEM CX'))
% nghiem chinh xac  $x^2(1-x)y(1-y)^2$ 
ucx=coord(:,1).^2.*(1-coord(:,1)).*coord(:,2).*(1-coord(:,2)).^2;
% xuat chuyen dich
disp(sprintf('%s', 'nut      x      y      uxx
      ucx'))
for i=1:nn
    disp(sprintf('%d\t\t %f\t\t %f\t\t %f\t\t %f', i, coord(i,1),
    coord(i,2), q(i), ucx(i)))
end
disp(sprintf('%s', 'sai so cuc dai: ', max(abs(q-ucx))))
% ve do thi chuyen dich
x=0:1/(nx-1):1;
y=0:1/(ny-1):1;
for j=1:nx
    for i=1:ny
        z(i,j)=q((i-1)*nx+j);
    end
end
end

```

surf(x,y,z);



Hình 3.4: Đồ thị nghiệm xấp xỉ (thí dụ 3.2).

**Nhận xét 3.3.** Trong chương trình pthh3\_2.m đoạn mã tính ma trận độ cứng phần tử, vectơ tải phần tử được viết dưới dạng function và được gọi từ chương trình chính. Điều này làm chương trình dễ đọc hơn.

**stiff3\_2.m**

```
function ke=stiff3_2(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)
% ham tra ve ma tran do cung phan tu (thi du 3.2)
Jmat=[x_2-x_1 x_3-x_1; y_2-y_1 y_3-y_1]; % ma tran jacobi
J=abs(det(Jmat)); % jacobian
ke = [1/2*(-2*y_2*y_3+y_3^2-2*x_2*x_3+x_3^2+y_2^2+x_2^2)/J, ...
-1/2*(-y_2*y_3+y_2*y_1+y_3^2-y_3*y_1-x_2*x_3+x_2*x_1+x_3^2 ...
-x_3*x_1)/J, -1/2*(-y_2*y_3+y_3*y_1+y_2^2-y_2*y_1-x_2*x_3 ...
```



```

+x_3*x_1+x_2^2-x_2*x_1)/J; -1/2*(-y_2*y_3+y_2*y_1+y_3^2 -y_3*y_1 ...
-x_2*x_3+x_2*x_1+x_3^2-x_3*x_1)/J, 1/2*(y_3^2-2*y_3*y_1+y_1^2 ...
+x_3^2-2*x_3*x_1+x_1^2)/J, 1/2*(-y_2*y_3+y_3*y_1+y_2*y_1-y_1^2 ...
-x_2*x_3+x_3*x_1+x_2*x_1-x_1^2)/J; -1/2*(-y_3*y_2+y_3*y_1-y_1*y_2 ...
-x_3*x_2+x_3*x_1-x_1*x_2+y_2^2+x_2^2)/J, 1/2*(-y_3*y_2+y_3*y_1 ...
+y_1*y_2-y_1^2-x_3*x_2+x_3*x_1+x_1*x_2-x_1^2)/J, 1/2*(y_2^2 ...
-2*y_1*y_2+y_1^2+x_2^2-2*x_1*x_2+x_1^2)/J];
end

```

**load3\_2.m**

```

function pe=load3_2(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)
% ham tra ve vecto tai phan tu (thi du 3.2)
J=abs((x_2-x_1)*(y_3-y_1)-(x_3-x_1)*(y_2-y_1)); % jacobian
f_1=ffunc3_2(x_1,y_1);
f_2=ffunc3_2(x_2,y_2);
f_3=ffunc3_2(x_3,y_3);
pe=J*[2*f_1+f_2+f_3; f_1+2*f_2+f_3; f_1+f_2+2*f_3]/24;
end

```

Hàm  $f$  được cho bởi function ffunc3\_2.m

**ffunc3\_2.m**

```

function v=ffunc3_2(x,y)
% ham duoc goi trong thi du 3.2
v=(6*y-4)*x^2*(x-1)+2*y*(1-y)^2*(3*x-1);
end

```

Phần biểu diễn nghiệm ta dùng hàm **surf** để vẽ mặt cong biểu diễn nghiệm xấp xỉ. Cú pháp đơn giản gọi hàm này là **surf(x,y,z)** với hai đối số đầu là vectơ, tương ứng là hoành độ và tung độ các điểm nút, đối số còn lại là mảng chứa giá trị của hàm cần vẽ. Các điểm trên mặt là bộ ba  $(x(j), y(i), z(i, j))$ . Chú ý,  $x$  tương ứng với các cột của  $z$  và  $y$  tương ứng với các dòng. Trong chương trình **pthh3\_2.m** đoạn mã cuối nhằm chuyển đổi vectơ chuyển dịch thành dạng ma trận. •

**Nhận xét 3.4.** Khi tính toán ma trận độ cứng ta đã dùng công thức đạo hàm hàm hợp (2.47), nhưng có một cách khác đơn giản hơn. Dưới đây ta xét vài thí dụ cho nội suy trên phần tử tam giác  $\Delta$  (để đơn giản ta không ghi chỉ số trên  $e$ ) có các đỉnh  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  và gọi  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  là tọa độ trọng tâm của  $(x, y) \in \Delta$ .

Dùng ma trận các hàm dạng  $\mathbf{N}$  là nội suy đa thức bậc nhất. Ta có

$$u = \mathbf{N}\mathbf{q} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]\mathbf{q} \quad \text{và} \quad w = \mathbf{N}\delta\mathbf{q} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]\delta\mathbf{q}.$$

suy ra

$$a(w, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d\mathbf{x} = \delta\mathbf{q}^T \underbrace{\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) d\mathbf{x}}_{\text{ma trận độ cứng phần tử } \mathbf{k}} \mathbf{q}$$

Để ý rằng, trong hệ tọa độ  $xy$ , dùng biểu thức của tọa độ trọng tâm ta có

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2|\Delta|} [a_1 + b_1x + c_1y \ a_2 + b_2x + c_2y \ a_3 + b_3x + c_3y],$$

trong đó  $|\Delta|$  là diện tích tam giác,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, \ a_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \ a_3 = x_1y_2 - x_2y_1, \\ b_1 &= y_2 - y_3, \ b_2 = y_3 - y_1, \ b_3 = y_1 - y_2, \\ c_1 &= x_3 - x_2, \ c_2 = x_1 - x_3, \ c_3 = x_2 - x_1. \end{aligned}$$

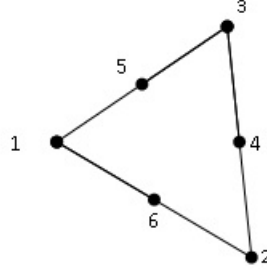
Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} &= \frac{1}{2|\Delta|} [b_1 \ b_2 \ b_3], \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = \frac{1}{2|\Delta|} [c_1 \ c_2 \ c_3], \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} &= \frac{1}{4|\Delta|^2} \begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} &= \frac{1}{4|\Delta|^2} \begin{bmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

và cuối cùng

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{1}{4|\Delta|^2} \int_{\Delta} \begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4|\Delta|^2} \begin{bmatrix} \int_{\Delta} (b_1b_1 + c_1c_1) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_1b_2 + c_1c_2) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_1b_3 + c_1c_3) d\mathbf{x} \\ \int_{\Delta} (b_2b_1 + c_2c_1) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_2b_2 + c_2c_2) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_2b_3 + c_2c_3) d\mathbf{x} \\ \int_{\Delta} (b_3b_1 + c_3c_1) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_3b_2 + c_3c_2) d\mathbf{x} & \int_{\Delta} (b_3b_3 + c_3c_3) d\mathbf{x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4|\Delta|} \begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dùng ma trận các hàm dạng  $\mathbf{N}$  là nội suy đa thức bậc hai. Với phần tử tam giác ngoài các đỉnh đánh số 1, 2, 3, ta lấy thêm các nút nội suy được đánh số 4, 5, 6 là trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh 1, 2, 3 (xem hình 3.5).



Hình 3.5: Phần tử Taylor-Hook.

Ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1, \dots, N_6] = [2\lambda_1^2 - \lambda_1, 2\lambda_2^2 - \lambda_2, 2\lambda_3^2 - \lambda_3, 4\lambda_3\lambda_2, \lambda_3\lambda_1, 4\lambda_1\lambda_2] \\ &= \underbrace{[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1]}_{\mathbf{R} \ (1 \times 6)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} \ (6 \times 6)}, \end{aligned}$$

trong đó ở đẳng thức cuối ta đã sắp xếp lại dưới dạng thuận tiện cho tính toán sau này.

Từ công thức xấp xỉ PTHH

$$u = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad w = \mathbf{N}\delta\mathbf{q},$$

ta có (tương tự cho  $w$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \mathbf{A} \mathbf{q},$$

và

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} &= [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \underbrace{\frac{1}{2|\Delta|} \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & 2b_2 & 0 & b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 & 0 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \ (3 \times 6)} = \mathbf{LB}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} &= [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \underbrace{\frac{1}{2|\Delta|} \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ 0 & 2c_2 & 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 & 0 & c_2 & c_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C} \ (3 \times 6)} = \mathbf{LC},\end{aligned}$$

trong đó ta đã ký hiệu  $\mathbf{L} = [\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3]$ . Như vậy,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{LBAq}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{LCAq},$$

từ đó,

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}^T \left( \mathbf{B}^T \int_{\Delta} \mathbf{L}^T \mathbf{L} d\mathbf{x} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \int_{\Delta} \mathbf{L}^T \mathbf{L} d\mathbf{x} \mathbf{C} \right) \mathbf{A}.$$

Đặt:

$$\mathbf{H} := \int_{\Delta} \mathbf{L}^T \mathbf{L} d\mathbf{x},$$

dùng công thức

$$\int_{\Delta} \lambda_1^a \lambda_2^b \lambda_3^c d\mathbf{x} = 2|\Delta| \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}$$

ta có

$$\mathbf{H} = 2|\Delta| \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Chú ý,  $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$  (đối xứng).

Tóm lại,

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{H} \mathbf{C}) \mathbf{A}.$$

•

**Nhận xét 3.5.** Trong bài toán biên của thí dụ 3.2, nếu của miền  $\Omega$ ,  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  gồm hai phần tách biệt  $\Gamma_D$  và  $\Gamma_N$ . Điều kiện biên được cho ở cả hai loại Dirichlet lẫn Neumann,

$$u = 0, \quad \text{trên } \Gamma_D, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, \quad \text{trên } \Gamma_N, \quad (3.41)$$

với  $g : \Gamma_N \rightarrow \mathbf{R}$  là hàm cho trước. Khi đó, ta phải "cộng thêm" vào vectơ tải "số hạng liên quan đến biên của phần tử".

Giả sử  $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$  là cạnh của phần tử  $e$  nằm trên phần biên Neumann, "hướng dọc theo" biên này. Các nút  $i, j$  (thứ tự toàn cục) tương ứng với các nút  $\alpha, \beta$  (thứ tự địa phương) trong phần tử  $e$ . Tham số hóa đoạn  $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + l(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad l \in [0, 1].$$

Với  $l \in [0, 1]$ , đặt:

$$\begin{aligned} \bar{g}(l) &= g(\mathbf{x}_i + l(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)), \\ \bar{N}_\alpha^{(e)}(l) &= N_\alpha^{(e)}(\mathbf{x}_\alpha + l(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)), \\ \bar{N}_\beta^{(e)}(l) &= N_\beta^{(e)}(\mathbf{x}_\alpha + l(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)) \end{aligned}$$

với mọi  $l \in [0, 1]$ . Do tính chất của hàm dạng, hai hàm  $\bar{N}_\gamma^e(l)$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$ , trùng với hai hàm dạng (bậc nhất) của đoạn  $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ . Cụ thể là:

$$\bar{N}_\alpha^e(l) = 1 - l, \quad \bar{N}_\beta^e(l) = l. \quad (3.42)$$

"Số hạng liên quan đến biên của phần tử" gồm các tích phân:

$$\int_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} N_\gamma^e g d\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j, \quad \gamma \in \{\alpha, \beta\}.$$

Nếu trên đoạn này ta xấp xỉ hàm  $\bar{g}$  bởi đa thức bậc nhất thì:

$$\bar{g}(l) \approx g(\mathbf{x}_i)\bar{N}_\alpha^e(l) + g(\mathbf{x}_j)\bar{N}_\beta^e(l)$$

và

$$\int_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} N_\gamma^e g d\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j \approx g(\mathbf{x}_i)L_{ij} \int_0^1 \bar{N}_\gamma^e \bar{N}_\alpha^e dl + g(\mathbf{x}_j)L_{ij} \int_0^1 \bar{N}_\gamma^e \bar{N}_\beta^e dl,$$

trong đó  $L_{ij}$  là chiều dài cạnh  $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ .

Quá trình "cộng thêm" được tiến hành lần lượt tại các cạnh "nằm trên"  $\Gamma_N$ . Nếu  $\gamma = \alpha$  thì ta cộng thêm vào thành phần  $p_i$  ( $i$  tương ứng với  $\alpha$ ) của vectơ tải toàn cục lượng:

$$g(\mathbf{x}_i)L_{ij} \int_0^1 (\bar{N}_\alpha^e)^2 dl + g(\mathbf{x}_j)L_{ij} \int_0^1 \bar{N}_\alpha^e \bar{N}_\beta^e dl = \frac{L_{ij}}{6} [2g(\mathbf{x}_i) + g(\mathbf{x}_j)];$$

còn nếu  $\gamma = \beta$  thì cộng thêm vào  $p_j$  lượng:

$$\frac{L_{ij}}{6} [g(\mathbf{x}_i) + 2g(\mathbf{x}_j)].$$

Do phân tích trên, thông tin lưu trữ điều kiện biên Neumann được tổ chức khác cách lưu trữ điều kiện biên Dirichlet (đã nói ở trên). Thay vì lưu trữ theo nút, ở đây ta lưu trữ theo cạnh. Mảng `fcond` gồm 4 cột, hai cột đầu chứa thứ tự toàn cục của nút đầu và cuối của cạnh, hai cột còn lại lưu giá trị tương ứng cho trước.

TT nút đầu	TT nút cuối	Giá trị nút đầu	Giá trị nút cuối
nút đầu cạnh 1	nút cuối cạnh 1	giá trị nút đầu 1	giá trị nút cuối 1
nút đầu cạnh 2	nút cuối cạnh 2	giá trị nút đầu 2	giá trị nút cuối 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Số dòng của mảng bằng số cạnh nằm trên biên  $\Gamma_N$ . •

**Thí dụ 3.3.** Cho  $\Omega$  là tập mở bị chặn trong  $\subset \mathbb{R}^2$  với biên  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , xét bài toán biên elliptic:

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.43)$$

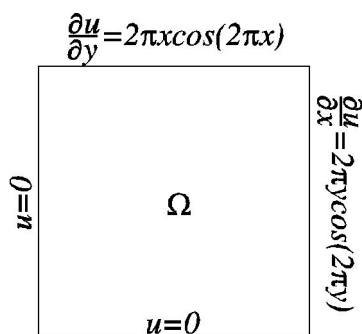
$$u = 0 \quad \text{trên } \Gamma_D, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{trên } \Gamma_N, \quad (3.45)$$

trong đó  $f(x, y) = 4\pi^2(x^2 + y^2) \sin(2\pi xy)$ , hàm  $g$  xác định trên hai cạnh  $x = 1$  và  $y = 1$ ,

$$g(x, y) = \begin{cases} 2\pi y \cos(2\pi y), & x = 1 \\ 2\pi x \cos(2\pi x), & y = 1 \end{cases}$$

(hình 3.6). Nghiệm chính xác:  $u = \sin(2\pi xy)$ .



Hình 3.6: Miền  $\Omega$  và các điều kiện biên (thí dụ 3.3).

Cách thức tiến hành tương tự như thí dụ 3.2, các kết quả chính (chi tiết thực hiện dành cho người đọc):

Không gian hàm  $V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ trên } \Gamma_D\}$ .

Công thức biến phân:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} w g d\Gamma_N.$$

Dạng song tuyến tính  $a(\cdot, \cdot)$  và dạng tuyến tính  $\ell(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} a(w, u) &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u d\mathbf{x}, \\ \ell(w) &= \int_{\Omega} w f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} w g d\Gamma_N. \end{aligned}$$

Bài toán biến phân: tìm  $u \in V$  sao cho

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V.$$

Xấp xỉ PTHH (người đọc nên thực hiện chi tiết các bước).

### Chương trình pthh3\_3.m

Chương trình dưới đây là một sửa đổi của chương trình trong thí dụ 3.2, pthh3\_2.m. Hai đoạn mã được thêm vào gồm: đoạn nhập điều kiện biên Neuman, và đoạn khử điều kiện biên loại này.

```
% chương trình thí dụ 3.3,
% f=4pi^2(x^2+y^2)sin(2pi xy), g=2pi x cos(2p x)
% T.A. Ngoc
% update: 5/10/2009
% bien - mo ta
% nx ..... so nut tren truc x
% ny ..... so nut tren truc y
% nn ..... tong so nut
% ne ..... tong so phan tu
% coord .... vecto toa do cac nut
% la ..... ma tran lap ghép
% fcond .... dieu kien Neumann
% dcond .... dieu kien Dirichlet
% ke ..... ma tran do cung phan tu
% pe ..... vecto tai phan tu
% gk ..... ma tran do cung toan cuc
% gp ..... vecto tai toan cuc
% q ..... vecto chuyen dich nut toan cuc
```

```

% chương trình gọi các function: stiff3_2 (mtdc phần tử), load3_3
% (vết phần tử), ffunc3_3 (hàm f), gfunc3_3 (đk biên)

clear all
% TIỀN XU LY
nx=20;
ny=20;
ne=2*(nx-1)*(ny-1);
nn=nx*ny;
for j=1:ny
    for i=1:nx
        nut=(j-1)*nx+i;
        coord(nut,1)=(i-1)/(nx-1);
        coord(nut,2)=(j-1)/(ny-1);
    end
end
for j=1:ny-1
    for i=1:nx-1
        e1=2*(j-1)*(nx-1)+i;
        e2=(2*j-1)*(nx-1)+i;
        la(e1,1)=(j-1)*nx+i;
        la(e1,2)=(j-1)*nx+i+1;
        la(e1,3)=j*nx+i;
        la(e2,1)=j*nx+i+1;
        la(e2,2)=j*nx+i;
        la(e2,3)=(j-1)*nx+i+1;
    end
end
% điều kiện biên Neumann
% cạnh 1 (bên trái)
fn=0; % counter đếm số cạnh cho điều kiện Neumann
for j=1:ny-1
    fn=fn+1;
    fcond(fn,1)=j*nx;
    fcond(fn,2)=(j+1)*nx;
    fcond(fn,3)=gfunc3_3(coord(fcond(fn,1),2));
    fcond(fn,4)=gfunc3_3(coord(fcond(fn,2),2));
end
% cạnh 2 (bên trên)
for j=1:nx-1
    fn=fn+1;

```



```

fcond(fn,1)=nn-j+1;
fcond(fn,2)=nn-j;
fcond(fn,3)=gfunc3_3(coord(fcond(fn,1),1));
fcond(fn,4)=gfunc3_3(coord(fcond(fn,2),1));
end
% dieu kien bien Dirichlet
dn=0; % counter dem so nut cho dieu kien Dirichlet
for n=1:nn
    if coord(n,1)==0.0|coord(n,2)==0.0
        dn=dn+1;
        dcond(dn,1)=n;
        dcond(dn,2)=0;
    end
end
% XU LY
gk=zeros(nn);
gp=zeros(nn,1);
% tinh ma tran do cung va vecto tai toan cuc
for e=1:ne
    i=la(e,1);
    j=la(e,2);
    k=la(e,3);
    x1=coord(i,1);
    y1=coord(i,2);
    x2=coord(j,1);
    y2=coord(j,2);
    x3=coord(k,1);
    y3=coord(k,2);
    % ma tran do cung phan tu
    ke=stiff3_2(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    % lap ghep
    gk(i,i)=gk(i,i)+ke(1,1);
    gk(i,j)=gk(i,j)+ke(1,2);
    gk(i,k)=gk(i,k)+ke(1,3);
    gk(j,i)=gk(j,i)+ke(2,1);
    gk(j,j)=gk(j,j)+ke(2,2);
    gk(j,k)=gk(j,k)+ke(2,3);
    gk(k,i)=gk(k,i)+ke(3,1);
    gk(k,j)=gk(k,j)+ke(3,2);
    gk(k,k)=gk(k,k)+ke(3,3);
    % vecto tai phan tu

```

```

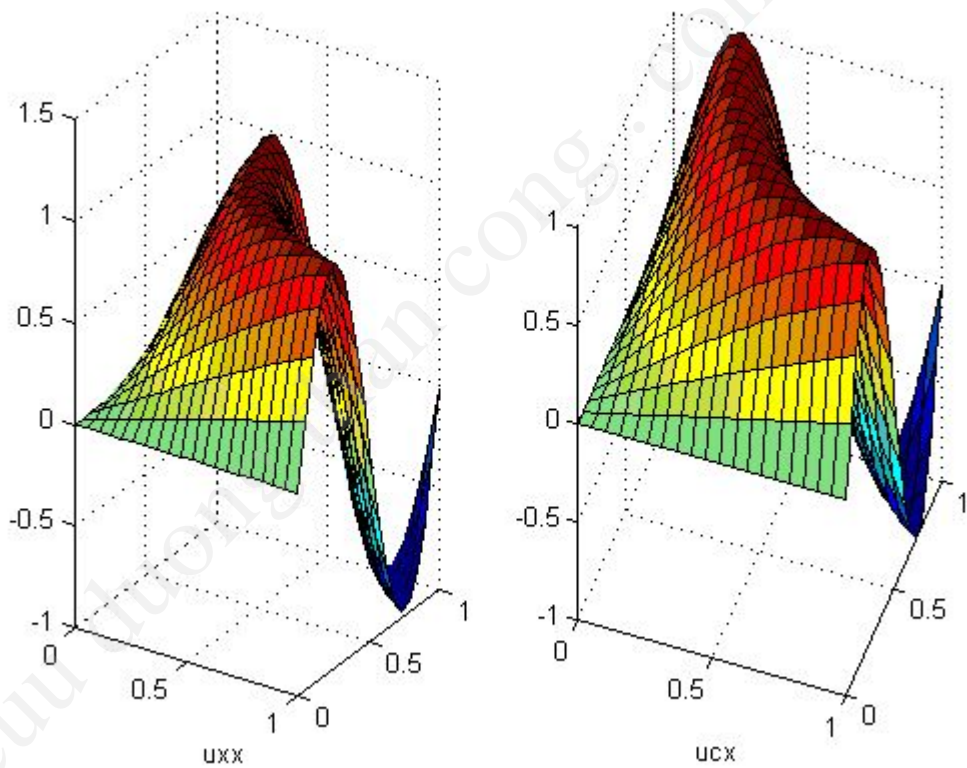
    pe=load3_3(x1,y1,x2,y2,x3,y3);
    % lap ghep
    gp(i)=gp(i)+pe(1);
    gp(j)=gp(j)+pe(2);
    gp(k)=gp(k)+pe(3);
end;
% khu dieu kien bien Neumann
for nc=1:size(fcond,1)
    i=fcond(nc,1);
    j=fcond(nc,2);
    x1=coord(i,1);
    y1=coord(i,2);
    x2=coord(j,1);
    y2=coord(j,2);
    lij=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);
    gp(i)=gp(i)+lij*(2*fcond(nc,3)+fcond(nc,4))/6;
    gp(j)=gp(j)+lij*(fcond(nc,3)+2*fcond(nc,4))/6;
end
% khu dieu kien bien Dirichlet
for i=1:size(dcond,1)
    for j=1:nn
        gp(j)=gp(j)-gk(j,dcond(i,1))*dcond(i,2);
    end
    for j=1:nn
        gk(dcond(i,1),j)=0.0;
        gk(j,dcond(i,1))=0.0;
    end
    gk(dcond(i,1),dcond(i,1))=1.0;
    gp(dcond(i,1))=dcond(i,2);
end
q=inv(gk)*gp;
% HAU XU LY
% nghiem chinh xac sin(2pi xy)
ucx=sin(2*pi*coord(:,1).*coord(:,2));
disp(sprintf('%s%e','sai so cuc dai: ', max(abs(q-ucx))));
% ve do thi chuyen dich
x=0:1/(nx-1):1;
y=0:1/(ny-1):1;
for j=1:nx
    for i=1:ny
        z(i,j)=q((i-1)*nx+j);
    end
end

```

```

        z1(i,j)=ucx((i-1)*nx+j);
    end
end
subplot(1,2,1)
surf(x,y,z);
subplot(1,2,2)
surf(x,y,z1);

```



Hình 3.7: Đồ thị nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác (thí dụ 3.3).

Các function được gọi, không kể `stiff3_2.m`:

**load3\_3.m**

```

function pe=load3_3(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)
% ham tra ve vecto tai phan tu (thi du 3.3)
J=abs((x_2-x_1)*(y_3-y_1)-(x_3-x_1)*(y_2-y_1)); % jacobian

```

```
f_1=ffunc3_3(x_1,y_1);
f_2=ffunc3_3(x_2,y_2);
f_3=ffunc28(x_3,y_3);
pe=J*[2*f_1+f_2+f_3; f_1+2*f_2+f_3; f_1+f_2+2*f_3]/24;
end
```

#### ffunc3\_3.m

```
function v=ffunc3_3(x,y)
% ham duoc goi trong thi du 3.3
v=4*pi^2*(x^2+y^2)*sin(2*pi*x*y);
end
```

#### gfunc3\_3.m

```
function v=gfunc3_3(x)
% ham duoc goi trong thi du 3.3
v=2*pi*x*cos(2*pi*x);
end
```

## 3.2 Bài toán phụ thuộc thời gian

Mục này trình bày phương pháp phần tử hữu hạn áp dụng cho bài toán không dừng.

### 3.2.1 Phương trình parabolic

**Thí dụ 3.4.** Xét bài toán biên-giá trị đầu: Tìm hàm  $u(x, t)$  thỏa phương trình

$$u_t = au_{xx} + f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (3.46)$$

cùng với các điều kiện biên

$$u(0, t) = h_0(t), \quad u(1, t) = h_1(t), \quad t > 0 \quad (3.47)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1. \quad (3.48)$$

Ở đây,  $a$  là hằng số dương,  $f(x, t)$ ,  $h_0(t)$ ,  $h_1(t)$ ,  $g(x)$  là các hàm cho trước.

**Phát biểu biến phân nửa yếu (semi-weak)**

Xem  $t$  như là tham số. Đưa vào không gian hàm  $V = H_0^1(0, 1)$ . Với  $v \in V$  bất kỳ, nhân hai vế phương trình (3.46) với  $v$  rồi tích phân từ 0 đến 1. Dùng tích phân từng phần ta được:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(t)v dx = - \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 f v dx. \quad (3.49)$$

Ở đây, ký hiệu  $u(t)$  chỉ ánh xạ từ  $(0, T)$  vào  $H^1(0, 1)$ .

**Rời rạc theo biến không gian - PTHH**

Phân hoạch  $[0, 1]$  thành các PTHH bằng lưới các nút  $\{x_i\}$ :

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{nn} = 1,$$

Trên mỗi phần tử  $[x_1^e, x_2^e]$  xấp xỉ nghiệm cần tìm dưới dạng

$$u_h^e = u_1^e(t)N_1^e(x) + u_2^e(t)N_2^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e. \quad (3.50)$$

Thay  $u_h^e$  vào phương trình biến phân phát biểu cho phần tử  $[x_1^e, x_2^e]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1^e}^{x_2^e} u(t)v dx &= \underbrace{u_x(x_2^e, t)v(x_2^e) - u_x(x_1^e, t)v(x_1^e)}_{\text{SHB: số hạng liên quan tới điều kiện biên}} \\ &\quad - \int_{x_1^e}^{x_2^e} u_x v_x dx + \int_0^1 f v dx, \end{aligned} \quad (3.51)$$

Chú ý, với  $v = \delta u$ ,

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} u(t)\delta u dx &= \delta \mathbf{u}^{eT} \left( \int_{x_1^e}^{x_2^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{u}^e, \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} u_x \delta u_x dx &= \delta \mathbf{u}^{eT} \left( \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^{eT} \frac{d}{dx} \mathbf{N}^e dx \right) \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e, \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \delta u dx &= \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{x_1^e}^{x_2^e} f \mathbf{N}^{eT} dx = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{p}^e, \end{aligned}$$

phương trình (3.51) thành

$$\delta \mathbf{u}^e (\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{p}^e) = [\text{SHB}].$$

Ở đây,  $\mathbf{M}^e$ ,  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{p}^e$  lần lượt là *ma trận khối lượng*, *độ cứng* và *vectơ tải phần tử*.

Bằng thủ tục lắp ghép ta được:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p}) = 0,$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{p}$  lần lượt là *ma trận khối lượng*, *độ cứng* và *vectơ tải toàn cục*.

Vì  $\delta \mathbf{u}$  là "tùy ý" nên phương trình PTHH:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p} = 0$$

hay

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{p}). \quad (3.52)$$

Khử điều kiện biên

Các điều kiện biên (3.47) cho:

$$u_1(t) = h_1(t), \quad u_{nn}(t) = h_2(t). \quad (3.53)$$

Đặt  $\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}$ , phương trình vi phân (3.52) được viết lại:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

hay ở dạng tường minh

$$\begin{cases} \dot{h}_1 &= A_{11}h_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1,nn-1}u_{nn-1} + A_{1,nn}h_2 + b_1 \\ \dot{u}_2 &= A_{21}h_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2,nn-1}u_{nn-1} + A_{2,nn}h_2 + b_2 \\ \vdots & \\ \dot{u}_{nn-1} &= A_{nn-1,1}h_1 + A_{nn-1,2}u_2 + \cdots + A_{nn-1,nn-1}u_{nn-1} + A_{nn-1,nn}h_2 + b_{nn-1} \\ \dot{h}_2 &= A_{nn,1}h_1 + A_{nn,2}u_2 + \cdots + A_{nn,nn-1}u_{nn-1} + A_{nn,nn}h_2 + b_{nn} \end{cases}$$

Để không làm thay đổi cấu trúc, ta thay phương trình đầu và phương trình cuối bằng

$$\dot{u}_1 = \dot{h}_1, \quad \dot{u}_{nn} = \dot{h}_2,$$

đồng thời nhóm các số hạng đã biết lại. Hệ phương trình vi phân trên thành:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_{nn-1} + 0u_{nn} & + \dot{h}_1 \\ \dot{u}_2 &= 0u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2,nn-1}u_{nn-1} + 0u_{nn} & + b_2 \\ &+ A_{21}h_1 + A_{2,nn}h_2 \\ \vdots & \\ \dot{u}_{nn-1} &= 0u_1 + A_{nn-1,2}u_2 + \cdots + A_{nn-1,nn-1}u_{nn-1} + 0u_{nn} & + b_{nn-1} \\ &+ A_{nn-1,1}h_1 + A_{nn-1,nn}h_2 \\ \dot{u}_{nn} &= 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_{nn-1} + 0u_{nn} & + \dot{h}_2 \end{cases}$$

Dạng ma trận:

$$\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.54)$$

trong đó:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,nn-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & A_{nn-1,2} & \cdots & A_{nn-1,nn-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{nn-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ A_{21}h_1 + A_{2,nn}h_2 \\ \vdots \\ A_{nn-1,1}h_1 + A_{nn-1,nn}h_2 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

Bài toán Cauchy cho hệ phương trình vi phân

Điều kiện đầu (3.48) cho:

$$u_i(0) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, nn. \quad (3.55)$$

Đây cũng là điều kiện đầu của hệ phương trình vi phân. Phương trình vi phân vectơ (3.54) cùng với điều kiện đầu (bài toán Cauchy):

$$\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{g}. \quad (3.57)$$

### Rời rạc theo biến thời gian - Thuật toán Euler

Bài toán Cauchy được giải bằng thuật toán Euler. Đưa vào lưới các nút thời gian cách đều  $d$

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{nt} = T,$$

ta có thuật toán lặp:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{g}, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + d(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{(n)} + \tilde{\mathbf{b}}^{(n)}), \quad (3.59)$$

trong đó  $\mathbf{u}^{(n)}$  là giá trị xấp xỉ của  $\mathbf{u}(t_n)$  và

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(t_n) \\ \vdots \\ b_{nn-1}(t_n) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t_n) \\ A_{21}h_1(t_n) + A_{2,nn}h_2(t_n) \\ \vdots \\ A_{nn-1,1}h_1(t_n) + A_{nn-1,nn}h_2(t_n) \\ \dot{h}_2(t_n) \end{pmatrix}.$$

**Chương trình pthh3\_4**

Chương trình được viết cho trường hợp:  $a = 1$ ,  $f(x, t) = e^{-t}(x^2 - x + 2)$ ,  
 $h_0(t) = h_1(t) \equiv 0$ ,  $g(x) = x(1 - x)$ . Nghiệm chính xác:  $u_{cx} = x(1 - x)e^{-t}$ .

```
% chương trình giải phương trình nhiệt
% u_t=u_xx+exp(-t)*(x^2-x+2)    0<x<1, 0<t<T
% điều kiện đầu: u(x,0)=x*(1-x)
% điều kiện biên: u(0,t)=u(1,t)=0
% nghiệm chính xác: u_cx=exp(-t)*(x-x^2)
% T.A. Ngoc
% update: 11/11/2011
% biên - mô tả
% nn ..... tổng số nút
% ne ..... tổng số phần tử
% coord .... vectơ tọa độ các nút
% la ..... ma trận lap ghép
% nt ..... tổng số nút thời gian
% me ..... ma trận khối lượng phần tử
% ke ..... ma trận độ cứng phần tử
% pe ..... vectơ tải phần tử
% gm ..... ma trận khối lượng toàn cục
% gk ..... ma trận độ cứng toàn cục
% gp ..... vectơ tải toàn cục
% U ..... vectơ chuyển dịch nút toàn cục
clear all
% TIEN XU LY
% tham số
T=1; % khoảng thời gian khảo sát
% roi rác không gian - PTHH
nn=10;
ne=nn-1;
coord=0:1/ne:1;
for e=1:ne
    la(e,:)=e;
end
% roi rác thời gian
nt=500;
d=T/(nt-1);
t=0:d:T;
% XU LY
```



```

gm=zeros(nn,nn);
gk=zeros(nn,nn);
gp=zeros(nn,1);
U=zeros(nn,nt);
gp=zeros(nn,1);
% tinh ma tran khoi luong, do cung va vecto tai toan cuc
for e=1:ne
    gi=la(e,:); % thu tu toan cuc
    x1=coord(gi(1));
    x2=coord(gi(2));
    % ma tran khoi luong
    me=(x2-x1)/6*[2 1; 1 2];
    % ma tran do cung phan tu
    ke=1/(x2-x1)*[1 -1; -1 1];
    % vecto tai
    pe=(x2-x1)/12*[3*x1^2+2*x1*x2-4*x1+x2^2-2*x2+12; ...
        x1^2+2*x1*x2-2*x1+3*x2^2-4*x2+12];
    % lap ghep
    gk(gi,gi)=gk(gi,gi)+ke;
    gm(gi,gi)=gm(gi,gi)+me;
    gp(gi)=gp(gi)+pe;
end
invgm=inv(gm);
A=-invgm*gk;
b=invgm*gp;
% khu dieu kien bien
A(1,:)=0.0;
A(nn,:)=0.0;
A(:,1)=0.0;
A(:,nn)=0.0;
b(1)=0.0;
b(nn)=0.0;
% thuat toan Euler
for i=1:nn
    U(:,1)=transpose(coord-coord.^2);
end
for it=2:nt
    U(:,it)=U(:,it-1)+d*(A*U(:,it-1)+exp(-t(it-1))*b);
end
% HAU XU LY
tt=t(1:20:nt);

```

```
UU=U(:,1:20:nt);
surf(coord,tt,UU');
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u_h');
title('Nghiem xap xi u_h')
```

hình 3.8 là đồ thị nghiệm xấp xỉ.

Chú thích: Việc chọn lưới không và thời gian cần thỏa điều kiện ổn định

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C,$$

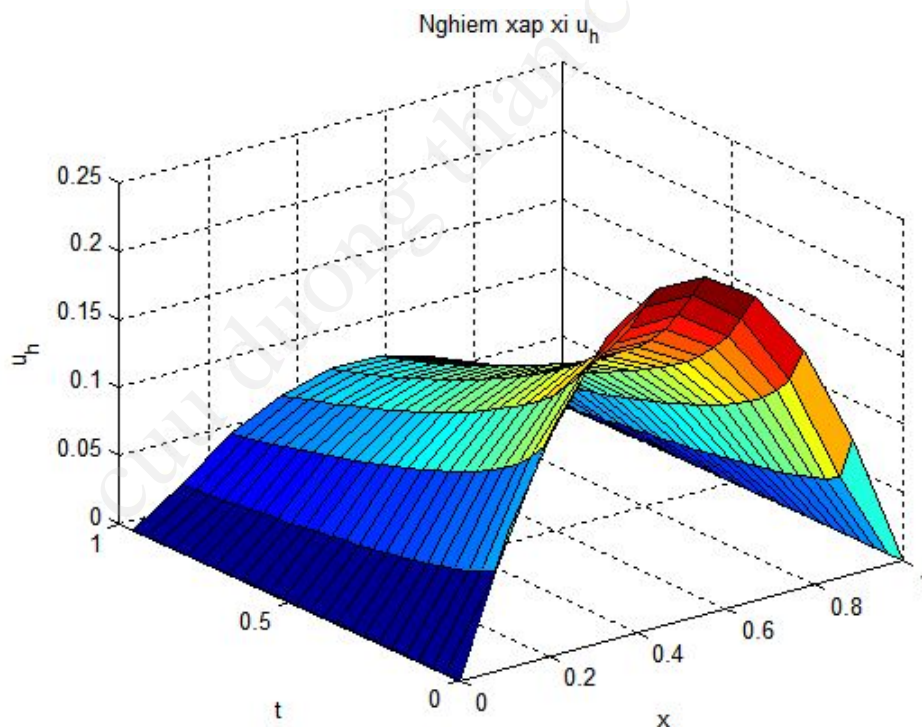
trong đó  $C$  là hằng số phụ thuộc bài toán.

Trong phần "Hậu xử lý", các lệnh:

```
tt=t(1:20:nt);
```

```
UU=U(:,1:20:nt);
```

nhằm giảm bớt số điểm vẽ trên trục  $t$ .



Hình 3.8: Đồ thị nghiệm xấp xỉ.

### 3.2.2 Phương trình Hyperbolic

**Thí dụ 3.5.** Giải phương trình sóng với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất, điều kiện đầu cho trước:

$$u_{tt} - cu_{xx} = f(x, t) \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \quad (3.60)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 < t < T, \quad (3.61)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (3.62)$$

Tương tự như thí dụ 3.4, rời rạc hóa PTHH không gian dẫn về phương trình PTHH:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p} = 0.$$

Bằng phương pháp sai phân theo thời gian giải hệ phương trình này.

## Bài tập chương 3

Trong các bài tập dưới đây, trường hợp đầu bài không cho dữ liệu cụ thể, khi tính toán số sinh viên có thể tự chọn số liệu cho phù hợp để giải.

1. Giải bài toán trong thí dụ 3.1 với dữ liệu:  $g = 0, h = -1, f(x) = \pi \sin \pi x$ .
2. Giải phương trình Helmholtz  $\Delta u - ku = 0$  ( $k$  là hằng số dương, ở đây lấy  $k = 1$ ) trong hình vuông  $0 < x, y < \pi$ , trong đó  $u$  thỏa điều kiện biên

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 1, \quad u(0, y) = u(\pi, 0) = 0.$$

3. Xét bài toán biên

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} &= f, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

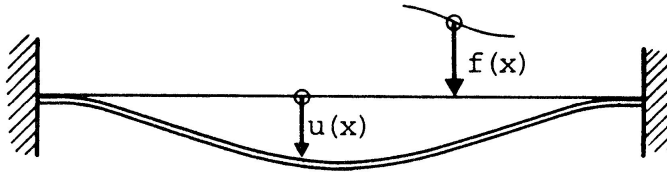
Ở đây  $u$  biểu diễn, chẳng hạn, độ võng của một dầm bị ngàm dưới tác dụng của lực ngang mật độ  $f$  (hình 3.9).

- a) Trong cơ học bài toán dầm này thường được phát biểu như sau:

$$M = u'', \quad 0 < x < 1, \quad (3.64)$$

$$M'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad (3.65)$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \quad (3.66)$$



Hình 3.9: Dầm bị ngàm dưới tác dụng của lực phân bố.

$M$  là đại lượng gì trong cơ học? Các phương trình (3.64) - (3.66) có ý nghĩa cơ học gì?

b) Chứng tỏ bài toán biến phân của (3.63) có thể phát biểu: Tìm  $u \in H_0^2(0, 1)$  sao cho

$$(u'', v'') = (f, v) \quad \forall v \in H_0^2(0, 1). \quad (3.67)$$

[Trường hợp tổng quát,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  là tập mở bị chặn với biên  $\Gamma$  chính quy,  $H_0^2(\Omega)$  là không gian các hàm  $v \in L^2(\Omega)$ , có đạo hàm đến cấp hai thuộc  $L^2(\Omega)$  và  $v = \partial v / \partial \mathbf{n} = 0$  trên  $\Gamma$ . Không gian này là không gian Hilbert với tích vô hướng xác định bởi:

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v w d\Omega + \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} D^{\alpha} v D^{\alpha} w d\Omega,$$

trong đó  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ .

c) Áp dụng PTHH giải bài toán biến phân (3.67).  
H.D. c) Dùng nội suy Hermite. Hàm dạng:

```
syms x x1 x2
p=[1 x x^2 x^3];
pp=sym(zeros(4));
pp(1,:)=subs(p,x,x1);
pp(2,:)=subs(diff(p),x,x1);
pp(3,:)=subs(p,x,x2);
pp(4,:)=subs(diff(p),x,x2);
H=simplify(p*inv(pp));
```

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= -\frac{2x^3 - 3(x_1 + x_2)x^2 + 6x_1x_2x + x_2^2(x_2 - 3x_1)}{(x_1 - x_2)^3}, \\
H_2(x) &= \frac{x^3 - (x_1 + 2x_2)x^2 + x_2(x_2 + 2x_1)x - x_2^2x_1}{(x_1 - x_2)^2}, \\
H_3(x) &= \frac{2x^3 - 3(x_1 + x_2)x^2 + 6x_1x_2x + x_1^2(x_1 - 3x_2)}{(x_1 - x_2)^3}, \\
H_4(x) &= \frac{x^3 - (x_1 + 2x_2)x^2 + x_1(x_1 + 2x_2)x - x_1^2x_2}{(x_1 - x_2)^2}.
\end{aligned}$$

Ma trận độ cứng phần tử:

```

B=simplify(diff(H,2));
ke=simplify(int(transpose(B)*B,x,x1,x2));

```

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} 12/h^3 & 6/h^2 & -12/h^3 & 6/h^2 \\ 6/h^2 & 4/h & -6/h^2 & 2/h \\ -12/h^3 & -6/h^2 & 12/h^3 & -6/h^2 \\ 6/h^2 & 2/h & -6/h^2 & 4/h \end{bmatrix},$$

trong đó  $h = x_2 - x_1$ .

Vectơ tải phần tử (trường hợp  $f(x) = f(\text{const})$ ):

```

syms f
pe=simplify(f*int(transpose(H),x,x1,x2))

```

$$\mathbf{p}^e = f \begin{Bmatrix} h/2 \\ h^2/12 \\ h/2 \\ -h^2/12 \end{Bmatrix}$$

Chú ý, trường hợp này, nghiệm chính xác của bài toán  $u(x) = \frac{1}{24}fx^2(x-1)^2$ .

Ở đây ta dùng nội suy Hermite nên tại mỗi nút có 2 bậc tự do: giá trị hàm và giá trị đạo hàm tại nút. Mỗi dòng của ma trận lắp ghép (ứng với một phần tử) vì thế sẽ có dạng:

	cột 1	cột 2	cột 3	cột 4
$\mathbf{LA}(\mathbf{e}, :) =$	b.t.d. thứ nhất của nút 1	b.t.d. thứ hai của nút 1	b.t.d. thứ nhất của nút 2	b.t.d. thứ hai của nút 2

Để mở rộng phạm vi áp dụng chương trình đưa vào biến `ndof`, `dof` (số bậc tự do của nút, số bậc tự do toàn cục).

```
%
% chương trình cho bài tập 3
% biến - mô tả
% nn ..... tổng số nút
% ndof ..... bậc tự do nút (=2)
% dof ..... bậc tự do (nn*ndof)
% ne ..... tổng số phần tử
% coord .... vectơ tọa độ các nút
% la ..... ma trận lap ghép
% gi ..... bậc tự do toàn cục của phần tử
% dcond .... điều kiện Dirichlet
% ke ..... ma trận độ cứng phần tử
% pe ..... vectơ tải phần tử
% gk ..... ma trận độ cứng toàn cục
% gp ..... vectơ tải toàn cục
% q ..... vectơ chuyển dịch nút toàn cục (cả đạo hàm)
% d ..... vectơ chuyển dịch tại các nút
clear all
% TIỀN XU LÝ
f=1;
ndof=2;
ne=10;
nn=ne+1;
dof=ndof*nn;
coord=0:1/ne:1;
% ma trận lap ghép
for e=1:ne
    for k=1:ndof
        la(e,k)=(e-1)*ndof+k; % nút thứ nhất
        la(e,k+ndof)=ndof*e+k; % nút thứ hai
    end
end
% điều kiện biên
dcond=[1 0; 2 0; 2*nn-1 0; 2*nn 0];
% XU LÝ
gk=zeros(dof);
gp=zeros(dof,1);
% tính ma trận độ cứng và vectơ tải toàn cục
for e=1:ne
    x1=coord(e);
    x2=coord(e+1);
```

```

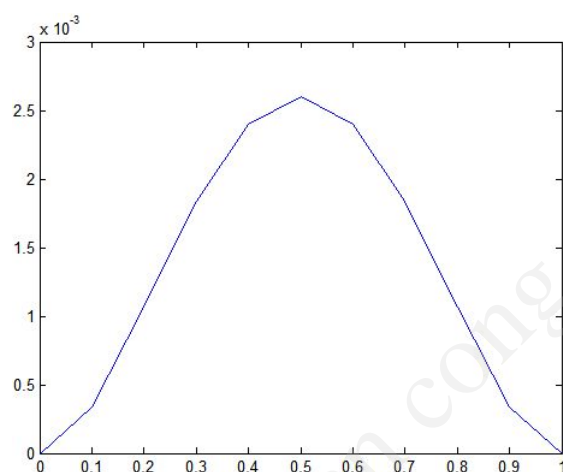
    gi=la(e,:); % bac tu do toan cuc cua phan tu e
    % ma tran do cung phan tu
    ke=mtdc_dam(x1,x2);
    % vector tai phan tu
    pe=vtt(x1,x2);
    % lap ghep
    gk(gi,gi)=gk(gi,gi)+ke;
    gp(gi)=gp(gi)+f*pe;
end;
% khu dieu kien Dirichlet
for i=1:size(dcond,1)
    gp=gp-dcond(i,2)*gk(:,dcond(i,1));
    gk(dcond(i,1),:)=0.0;
    gk(:,dcond(i,1))=0.0;
    gk(dcond(i,1),dcond(i,1))=1.0;
    gp(dcond(i,1))=dcond(i,2);
end
q=inv(gk)*gp;
% HAU XU LY
% rut trich chuyen dich tai cac nut
for i=1:nn
    d(i)=q(2*(i-1)+1);
end
disp(sprintf('\n %s', 'KET QUA SO VOI NGHIEM CX'))
% nghiem chinh xac
ucx=f*coord.^2.*(1-coord).^2/24;
% xuat chuyen dich
disp(sprintf('%s', 'nut      uxx      ucx'))
for i=1:nn
    disp(sprintf('%d\t\t%f\t%f\t%f', i, d(i), ucx(i)))
end
disp(sprintf('%s%e', 'sai so cuc dai: ', max(abs(d-ucx))))
plot(coord,d)

```

nut	uxx	ucx
1	0.000000	0.000000
2	0.000338	0.000338
3	0.001067	0.001067
4	0.001837	0.001838
5	0.002400	0.002400
6	0.002604	0.002604

7	0.002400	0.002400
8	0.001837	0.001838
9	0.001067	0.001067
10	0.000337	0.000337
11	0.000000	0.000000

sai so cuc dai: 1.084202e-017



Hình 3.10: Chuyển dịch (bài tập 3).

4. Cho  $\Omega$  là tập mở bị chặn trong  $\mathbb{R}^2$  với biên  $\Gamma$ . Xét bài toán biên:

$$-\mu \Delta u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = f, \quad \text{trong } \Omega,$$

$$u = 0, \quad \text{trên } \Gamma,$$

trong đó  $\mu > 0$ ,  $\beta_i$  là các hằng số cho trước. Đây là một thí dụ của bài toán đối lưu - khuếch tán (convection - diffusion problem); số hạng Laplace tương ứng sự khuếch tán với hệ số khuếch tán  $\mu$ , các đạo hàm cấp một tương ứng sự đối lưu theo hướng  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ .

a) Thiết lập bài toán biên phân tương ứng.

b) Giả sử  $\mu = 1$ ,  $|\beta|$  vừa phải, áp dụng PTHH giải bài toán biên phân.

5. Cho  $\Omega$  là tập mở bị chặn trong  $\mathbb{R}^2$  với biên  $\Gamma$ . Xét bài toán biên:

$$\Delta^2 u = f, \quad \text{trong } \Omega,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{trên } \Gamma,$$



Đây là bài toán uốn tấm mỏng với biên ngàm dưới tác dụng của tải trong ngang  $f$ .

- a) Thiết lập bài toán biến phân.
- b) Giải bài toán biến phân bằng PTHH.

**6.** Mô hình toán học quá trình truyền nhiệt trong vật thể nửa vô hạn dẫn về bài toán biên-giá trị đầu sau: tìm  $u(x, t)$  thỏa

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \quad (x > 0, t > 0), \\ u(x, 0) &= 0 \quad (x > 0), \\ -Ku_x(0, t) &= \phi_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Áp dụng PTHH giải bài toán này với  $K = k = 1$ ,  $\phi_0(t) \equiv 0$ .

HD. Theo điều kiện đầu và điều kiện ở vô cùng, lấy khoảng thời gian khảo sát hữu hạn  $T > 0$ , chọn  $L > 0$  đủ lớn sao cho  $u(L, t) = 0$  ( $0 < t < T$ ). Bài toán được giải xấp xỉ trong miền  $0 < x < L$ ,  $0 < t < T$ .

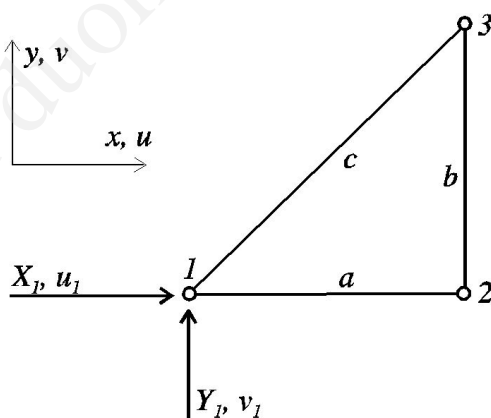
**7.** Giả sử  $\mu = 1$ ,  $|\beta|$  vừa phải, giải bằng PTHH bài toán đối lưu - khuếch tán không dừng

$$\begin{aligned} u_t - \mu \Delta u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + u &= f, \quad \text{trong } \Omega, \quad 0 < t < T, \\ u &= 0, \quad \text{trên } \Gamma, \quad 0 < t < T, \\ u(x, y, 0) &\equiv 0. \end{aligned}$$

## Chương 4

# Phần tử hữu hạn trong lý thuyết dàn hồi

PTHH ban đầu xuất hiện như là một phương pháp tính trong cơ học kết cấu – phương pháp lực. Xét kết cấu dàn phẳng gồm ba thanh liên kết khớp với nhau tại các nút 1, 2, 3 (hình 4.1). Bằng cách "lý tưởng hóa" ta xem các thanh chỉ chịu kéo nén dọc trục của chúng, giả sử các lực và chuyển dịch có liên quan đến ba nút vừa kể. Gọi  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$ ,  $(u_3, v_3)$  là chuyển dịch của các nút 1, 2, 3 và  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$ ,  $(X_3, Y_3)$  là các lực đặt tại nút tương ứng. Để tìm mối liên hệ giữa lực và chuyển dịch tại các nút, ta giả thiết các thanh là dàn hồi tuyến tính, theo đó, lực tỉ lệ với chuyển dịch



Hình 4.1: Dàn phẳng

Giả sử ta cần tìm hệ lực tác dụng lên dàn gây ra do chuyển dịch  $u_1 \neq 0$  với các chuyển dịch còn lại bằng không. Hiển nhiên, lực  $X_1$  là cần thiết để

$u_1$  tồn tại, hơn nữa nó tỉ lệ với  $u_1$ , và ta có thể viết

$$X_1 = K_{11}^{xx} u_1$$

ở đây  $K_{11}^{xx}$  là hằng số tỉ lệ, ý nghĩa các chỉ số sẽ được làm rõ sau này. Do liên kết khớp, nói chung,  $Y_1$  cũng tồn tại (điều này có thể dẫn đến  $v_1 \neq 0$ !), ta viết

$$Y_1 = K_{11}^{yx} u_1.$$

Dưới tác dụng của các lực  $X_1, Y_1$  tại các nút 2 và 3 sẽ chịu các lực tương ứng để hệ cân bằng. Ta viết

$$\begin{aligned} X_2 &= K_{21}^{xx} u_1, & Y_2 &= K_{21}^{yx} u_1 \\ X_3 &= K_{31}^{xx} u_1, & Y_3 &= K_{31}^{yx} u_1. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự với các nút ta cũng có các kết quả tương tự. Tóm lại, dịch chuyển  $u_i$  (tại nút  $i$ ) sẽ "sinh" lực  $X_j$  với hệ số tỉ lệ  $K_{ji}^{xx}$  và lực  $Y_j$  với hệ số tỉ lệ  $K_{ji}^{yx}$  (tại nút  $j$ ). Áp dụng điều kiện cân bằng lực (nguyên lý D'Alembert) ta có hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{xx} & K_{11}^{xy} & K_{12}^{xx} & K_{12}^{xy} & K_{13}^{xx} & K_{13}^{xy} \\ K_{11}^{yx} & K_{11}^{yy} & K_{12}^{yx} & K_{12}^{yy} & K_{13}^{yx} & K_{13}^{yy} \\ K_{21}^{xx} & K_{21}^{xy} & K_{22}^{xx} & K_{22}^{xy} & K_{23}^{xx} & K_{23}^{xy} \\ K_{21}^{yx} & K_{21}^{yy} & K_{22}^{yx} & K_{22}^{yy} & K_{23}^{yx} & K_{23}^{yy} \\ K_{31}^{xx} & K_{31}^{xy} & K_{32}^{xx} & K_{32}^{xy} & K_{33}^{xx} & K_{33}^{xy} \\ K_{31}^{yx} & K_{31}^{yy} & K_{32}^{yx} & K_{32}^{yy} & K_{33}^{yx} & K_{33}^{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Đây cũng chính là phương trình PTHH.

Theo cách xây dựng ở đây ta thấy vế phải của mỗi phương trình là biểu thức của lực đặt tại nút tương ứng trên phương tương ứng. Thí dụ, vế phải của phương trình thứ nhất là biểu thức xác định lực đặt tại nút 1 trên phương  $x$ , vế phải của phương trình thứ hai là biểu thức xác định lực đặt tại nút 1 trên phương  $y$ .

Một cách tiếp cận khác xây dựng phương trình PTHH cho các bài toán cơ học kết cấu là phương pháp năng lượng. Như đã biết, cơ sở lý luận của cơ học kết cấu là lý thuyết đàn hồi. Để cung cấp một cái nhìn tổng quát về cách tiếp cận năng lượng, dưới đây, các vấn đề được trình bày trong khung cảnh của lý thuyết đàn hồi. Trước hết, ta ôn lại một số kết quả của lý thuyết đàn hồi.

## 4.1 Tóm tắt về lý thuyết đàn hồi

Vật thể được cấu thành bởi các điểm vật chất phân bố liên tục (mô hình môi trường liên tục). Dưới tác dụng của lực vật thể bị biến dạng (thay đổi hình dạng, kích thước).

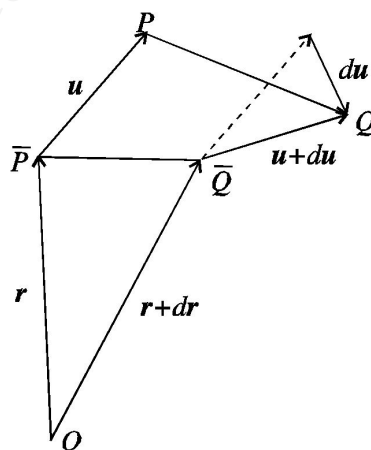
Xét vật thể  $B$  chiếm miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (thay đổi theo thời gian). Gọi  $M \in B$  là điểm bất kỳ.

**Trường chuyển dịch.** Giả sử trước khi bị biến dạng vị trí của  $M$  là  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , sau biến dạng  $M$  ở vị trí  $(x, y, z)$ . Vectơ chuyển dịch  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  của  $M$ :

$$u_i = x_i - \bar{x}_i \quad i = x, y, z. \quad (4.1)$$

Ánh xạ  $(x, y, z) \mapsto \mathbf{u}$  gọi là trường chuyển dịch của vật thể. Trường chuyển dịch có thể xem là hàm vectơ theo các biến Lagrange  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t$  hay biến Euler  $x, y, z, t$ .

**Trường biến dạng.** Để mô tả biến dạng trong lân cận điểm  $M$ , xét điểm vật chất  $N \in B$  vô cùng gần  $M$ . Giả sử trước biến dạng  $M$  và  $N$  ở các vị trí  $\bar{P}$  và  $\bar{Q}$  có vectơ bán kính lần lượt là  $\mathbf{r}$  và  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . Sau biến dạng chúng đến vị trí  $P$  và  $Q$ , chuyển dịch tương ứng của chúng bằng  $\mathbf{u}$  và  $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ . Chuyển dịch  $N$  gồm hai thành phần:  $\mathbf{u}$  và  $d\mathbf{u}$  (hình 4.2). Thành phần thứ nhất bằng đúng chuyển dịch của  $M$  (chuyển động tịnh tiến) nên không thể hiện sự biến dạng, đại lượng đặc trưng cho biến dạng chứa đựng trong thành phần thứ hai,



Hình 4.2: Biến dạng trong lân cận điểm  $M$ .

$$\begin{aligned}
du_x &= u_{x,x}dx + u_{x,y}dy + u_{x,z}dz \\
du_y &= u_{y,x}dx + u_{y,y}dy + u_{y,z}dz \\
du_z &= u_{z,x}dx + u_{z,y}dy + u_{z,z}dz
\end{aligned}$$

hay dưới dạng vectơ

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\
d\mathbf{u} &= \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Phân tích  $\mathbf{T}$  thành tổng hai ma trận đối xứng và phản đối xứng. Do thành phần phản đối xứng đặc trưng cho chuyển động quay nên biến dạng được đặc trưng bởi thành phần còn lại,

$$\mathbf{E} = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{x,x} & \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) & \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{y,x} + u_{x,y}) & u_{y,y} & \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y}) \\ \frac{1}{2}(u_{z,x} + u_{x,z}) & \frac{1}{2}(u_{z,y} + u_{y,z}) & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ma trận  $[\epsilon_{ij}]$  gọi là tenxơ biến dạng. Từ trên ta có liên hệ giữa các thành phần tenxơ biến dạng với chuyển dịch (phương trình Cauchy)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4.3)$$

Nếu cho trước sáu thành phần tenxơ biến dạng, để xác định ba thành phần chuyển dịch, thành các thành phần tenxơ biến dạng phải thỏa các phương trình tương thích biến dạng:

$$\epsilon_{mq,np} + \epsilon_{np,mq} - \epsilon_{nq,mp} - \epsilon_{mp,nq} = 0, \quad (4.4)$$

với  $(mnpq) = xyxy, xzxz, yzyz, xyxz, yxyz, zxzy$ .

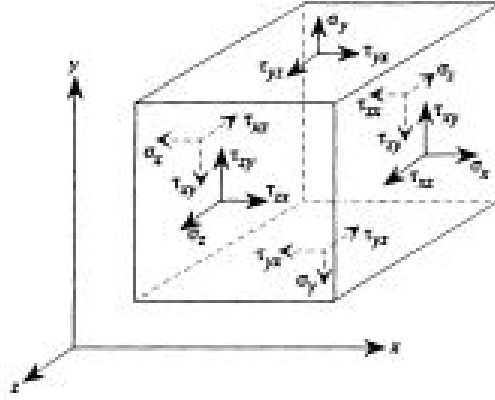
**Trường ứng suất.** Khi vật bị biến dạng bên trong xuất hiện lực chống lại sự biến dạng gọi là ứng suất. Ứng suất tại một điểm được xác định bởi một ma trận đối xứng,

$$\mathbf{S} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

gọi là tenxơ ứng suất.

Lực tác dụng lên một mặt đi qua một điểm  $M \in B$  có vectơ pháp tuyến  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  được xác định bởi

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \quad (4.6)$$



Hình 4.3: Các thành phần ứng suất.

hay

$$t_i = \sigma_{ij}n_j.$$

**Định luật Hooke suy rộng.** Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính (biến dạng nhỏ), tenxơ ứng suất và biến dạng liên hệ với nhau qua định luật Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\epsilon_{mn}, \quad (4.7)$$

trong đó  $C_{ijmn}$  là tenxơ các hệ số đàn hồi hạng bốn. Nếu vật thể là đồng chất, đẳng hướng thì

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta_\epsilon\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (4.8)$$

trong đó  $\lambda, \mu$  là các hằng số Lamé phụ thuộc vật liệu,  $\theta = u_{k,k}$ .

Phương trình chuyển động của vật thể biến dạng cũng được suy ra từ định luật thứ hai của Newton, phương trình động lượng,

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i, \quad (4.9)$$

trong đó  $f_i$  là lực thể tích tác dụng lên  $B$ .

#### 4.1.1 Bài toán biên của lý thuyết đàn hồi (dạng mạnh)

Xét vật thể đàn hồi  $B$ , chiếm miền  $\Omega$  với biên  $\Gamma$ , chịu biến dạng dưới tác dụng của lực ngoài. Bỏ qua ảnh hưởng của lực quán tính  $\rho\ddot{u}_i$ , phương trình động lượng là phương trình cân bằng:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0. \quad (4.10)$$

Nghiệm của (4.10) phải thỏa các điều kiện biên. Trên phần biên  $\Gamma_u$  chuyển dịch được cho trước:

$$u_i = \bar{u}_i. \quad (4.11)$$

Phần biên còn lại  $\Gamma_t$  chịu tải trọng (lực mặt),  $t_i = \sigma_{ji}n_j$ :

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \quad (4.12)$$

Phương pháp phần tử hữu hạn được xây dựng từ phát biểu yếu hoặc phát biểu biến phân của bài toán.

### 4.1.2 Cách phát biểu yếu

Đưa vào tập hợp các trường chuyển dịch khả dĩ

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_i \in H^1(\Omega), u_i = \bar{u}_i \text{ trên } \Gamma_u\} \quad (4.13)$$

và không gian các trường chuyển dịch ảo

$$\mathcal{W} = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_i \in H^1(\Omega), w_i = 0 \text{ trên } \Gamma_u\} \quad (4.14)$$

Gọi  $w_i$  là trường chuyển dịch ảo bất kỳ, tích vô hướng hệ phương trình cân bằng với  $w_i$ , lấy tích phân trên  $\Omega$ , ta được:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) w_i d\Omega = 0. \quad (4.15)$$

Vì  $\sigma_{ji,j} w_i = (\sigma_{ji} w_i)_{,j} - \sigma_{ji} w_{i,j}$  nên (áp dụng công thức Gauss-Ostrogradski)

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji,j} w_i d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ji} n_j) w_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji} w_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i w_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji} w_{i,j} d\Omega.$$

Thay vào (4.15) ta thu được phát biểu yếu của bài toán biên

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji} w_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i w_i d\Gamma, \quad (4.16)$$

với mọi  $w_i$ .

Phương trình (4.16) là nội dung của nguyên lý công ảo cho vật thể đàn hồi ở trạng thái cân bằng. Nếu đặt bài toán theo chuyển dịch, dùng các hệ thức (4.8), phương trình (4.16) thành

$$\int_{\Omega} [\lambda u_{k,k} \delta_{ji} + \mu(u_{j,i} + u_{i,j})] w_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i w_i d\Gamma, \quad (4.17)$$

### 4.1.3 Cách phát biểu biến phân

Ngoài dạng yếu, phương pháp phần tử hữu hạn còn có thể xây dựng trên cơ sở dạng biến phân của mô hình toán học.

Đưa vào phiếm hàm

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (4.18)$$

gọi là thế năng toàn phần của vật thể. Từ phương trình nguyên lý công ảo ta có thể chứng minh:

**Định lý 4.1** (Thế năng cực tiểu). *Trong tất cả các chuyển dịch khả dĩ thỏa mãn điều kiện biên hình học, thì chuyển dịch thực tương ứng với thế năng cực tiểu.*

Phương pháp phần tử hữu hạn được áp dụng cho phương trình Euler (điều kiện cực trị) của thế năng toàn phần.

## 4.2 Phân tích kết cấu dàn không gian

PTHH được áp dụng rộng rãi trong cơ học kết cấu. Kết cấu dàn không gian là một thí dụ điển hình. Dàn là kết cấu gồm các thanh dàn hồi khớp nối với nhau. Với kết cấu này các thanh chỉ bị kéo hoặc nén dọc trục.

### 4.2.1 Phần tử thanh

Phần tử tham chiếu của phần tử thanh chiều dài  $\ell$  là đoạn  $\Omega^r = [0, \ell]$  trên trục  $\xi$ . Chuyển dịch dọc trục được xấp xỉ bởi các đa thức bậc nhất:

$$\bar{q} = [1 \quad \xi] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

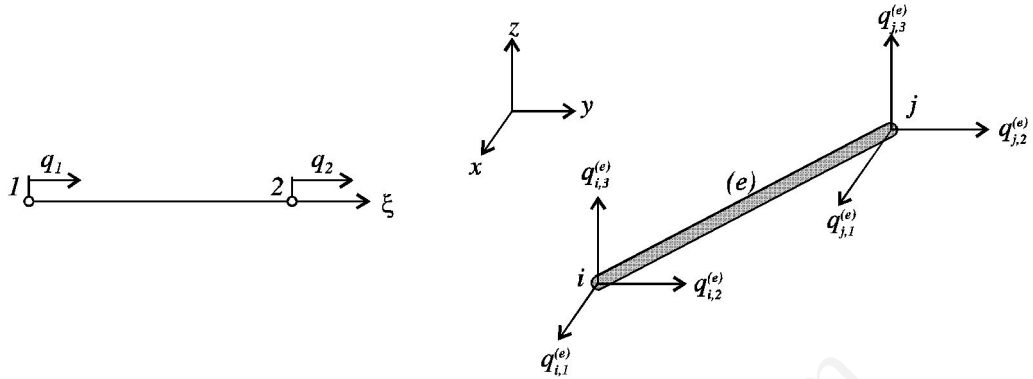
Gọi  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  là chuyển vị tại hai nút đầu cuối (dấu gạch bên trên biểu thức chỉ thị biểu thức được viết trong không gian tham chiếu), từ giả thiết xấp xỉ nút ta suy ra:

$$\bar{q} = [\bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi)] \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{q}}, \quad (4.20)$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$





Hình 4.4: Phân tử đàn tham chiều (trái), phân tử đàn trong không gian (phải).

là vectơ chuyển dịch phần tử tham chiều,

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{\ell - \xi}{\ell}, \quad \bar{N}_2(\xi) = \frac{\xi}{\ell} \quad (4.22)$$

là các hàm dạng.

Chuyển vị là dọc trục nên tenxơ biến dạng chỉ có thành phần  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{\xi\xi}$ :

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{q}}{d\xi} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{q}}, \quad (4.23)$$

trong đó

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Theo định luật Hooke, ứng suất chỉ có thành phần  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\xi\xi}$

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{q}}, \quad (4.24)$$

trong đó  $\mathbf{D} = [E]$  là môđun của phần tử đang xét.

#### Phép biến đổi phần tử tham chiều thành phần tử thực

Giả sử phần tử đàn không gian  $\Omega^e$  là thanh tiết diện  $A^e$ , chiều dài  $L^e$ , với hai điểm đầu cuối (có thứ tự toàn cục là  $i$  và  $j$ ) là  $\mathbf{x}_i^e = (x_i^e, y_i^e, z_i^e)$  và  $\mathbf{x}_j^e = (x_j^e, y_j^e, z_j^e)$ .

Phép biến đổi  $\tau^e : \Omega^r \rightarrow \Omega^e$  được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \tau^e(\xi) = x_i^e + \frac{\xi(x_j^e - x_i^e)}{L^e} \\ y = \tau^e(\xi) = y_i^e + \frac{\xi(y_j^e - y_i^e)}{L^e} \\ z = \tau^e(\xi) = z_i^e + \frac{\xi(z_j^e - z_i^e)}{L^e} \end{cases}$$

hay dưới dạng vectơ

$$\mathbf{x} = \tau^e(\xi) = \mathbf{x}_i + \frac{\xi}{L^e}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad \xi \in [0, L^e]. \quad (4.25)$$

Quan hệ ngược (dùng  $(x_j^e - x_i^e)^2 + (y_j^e - y_i^e)^2 + (z_j^e - z_i^e)^2 = L^e$ )

$$\xi = \frac{(x^e - x_i^e)(x_j^e - x_i^e) + (y^e - y_i^e)(y_j^e - y_i^e) + (z^e - z_i^e)(z_j^e - z_i^e)}{L^e}$$

hay dưới dạng vectơ

$$\begin{aligned} \xi &= \left[ \frac{x_j^e - x_i^e}{L^e} \quad \frac{y_j^e - y_i^e}{L^e} \quad \frac{z_j^e - z_i^e}{L^e} \right] \begin{Bmatrix} x^e - x_i^e \\ y^e - y_i^e \\ z^e - z_i^e \end{Bmatrix} \\ &= [\alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \quad \gamma_{ij}](\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T, \end{aligned} \quad (4.26)$$

trong đó

$$\alpha_{ij} = \frac{x_j^e - x_i^e}{L^e}, \quad \beta_{ij} = \frac{y_j^e - y_i^e}{L^e}, \quad \gamma_{ij} = \frac{z_j^e - z_i^e}{L^e}. \quad (4.27)$$

Từ (4.25), (4.26) ta rút ra

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\delta \xi}{L^e}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad (4.28)$$

$$\delta \xi = [\alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \quad \gamma_{ij}]\delta \mathbf{x}^T; \quad (4.29)$$

nghĩa là một chuyển dịch  $\delta \mathbf{x}$  trong hệ tọa độ không gian  $xyz$  tương ứng với chuyển dịch  $\delta \xi$  trong hệ tọa độ tham chiếu  $\xi$ . Như vậy, các chuyển dịch nút  $\bar{q}_1$  và  $\bar{q}_2$  tương ứng với các chuyển dịch (không gian) tại nút  $i$  và  $j$ ,

$$[q_i^e] = [q_{i,1}^e \quad q_{i,2}^e \quad q_{i,3}^e]^T, \quad [q_j^e] = [q_{j,1}^e \quad q_{j,2}^e \quad q_{j,3}^e]^T;$$

theo công thức

$$\bar{q}_1 = [\alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \quad \gamma_{ij}][q_i^e], \quad \bar{q}_2 = [\alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \quad \gamma_{ij}][q_j^e] \quad (4.30)$$

(chú ý mỗi chuyển dịch nút có ba thành phần vì vậy bậc tự do tại mỗi nút là 3).

Ta có thể viết (4.30) dưới dạng vectơ

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} & \gamma_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{ij} & \beta_{ij} & \gamma_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [q_i^{(e)}] \\ [q_j^{(e)}] \end{Bmatrix} \\ \bar{\mathbf{q}} &= \Lambda^e \mathbf{q}^e, \end{aligned} \quad (4.31)$$

trong đó

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} [q_i^e] \\ [q_j^e] \end{Bmatrix} = \{q_{i,1}^e \ q_{i,2}^e \ q_{i,3}^e \ q_{j,1}^e \ q_{j,2}^e \ q_{j,3}^e\}^T \quad (4.32)$$

gọi là vectơ chuyển dịch phần tử,

$$\Lambda^e = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} & \gamma_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{ij} & \beta_{ij} & \gamma_{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

gọi là ma trận biến đổi của  $\tau^e$ .

Vì vectơ chuyển dịch phần tử có sáu thành phần nên bậc tự do của phần tử dàn không gian là 6.

Thay vào (4.23) và (4.24) ta được biến dạng và ứng suất trong tọa độ toàn cục:

$$\epsilon^e = \mathbf{B}\Lambda^e\mathbf{q}^e, \quad (4.34)$$

$$\sigma^e = \mathbf{D}\mathbf{B}\Lambda^e\mathbf{q}^e. \quad (4.35)$$

Ký hiệu

$$\mathbf{p}^e = \{p_{i,1}^e \ p_{i,2}^e \ p_{i,3}^e \ p_{j,1}^e \ p_{j,2}^e \ p_{j,3}^e\}^T \quad (4.36)$$

là vectơ với các thành phần là lực theo các hướng  $x, y, z$  đặt tại các nút đầu cuối, gọi là vectơ tải phần tử.

Biểu thức thế năng của phần tử  $\Omega^e$ :

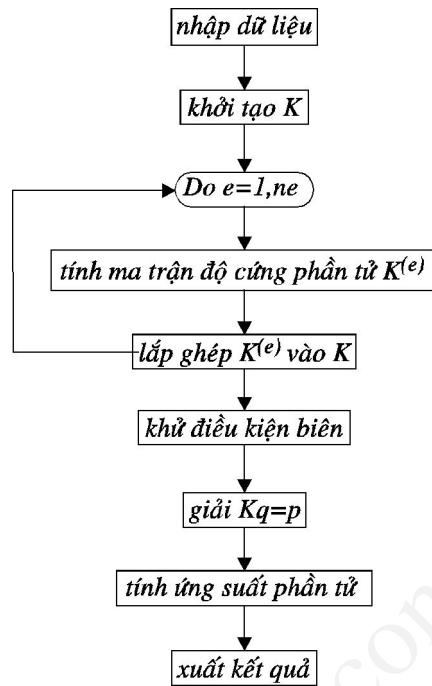
$$\begin{aligned} \pi^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma^{eT} \epsilon^e d\Omega^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{p}^e \\ &= \frac{A^e L^e}{2} \mathbf{q}^{eT} (\Lambda^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \Lambda^e) \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{p}^e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{p}^e, \end{aligned} \quad (4.37)$$

trong đó:

$$\mathbf{k}^e = \frac{A^e E^e}{L^e} \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \alpha_{ij}\beta_{ij} & \alpha_{ij}\gamma_{ij} & -\alpha_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\alpha_{ij}\gamma_{ij} \\ \alpha_{ij}\beta_{ij} & \beta_{ij}^2 & \beta_{ij}\gamma_{ij} & -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\beta_{ij}^2 & -\beta_{ij}\gamma_{ij} \\ \alpha_{ij}\gamma_{ij} & \beta_{ij}\gamma_{ij} & \gamma_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\gamma_{ij} & -\beta_{ij}\gamma_{ij} & -\gamma_{ij}^2 \\ -\alpha_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\alpha_{ij}\gamma_{ij} & \alpha_{ij}^2 & \alpha_{ij}\beta_{ij} & \alpha_{ij}\gamma_{ij} \\ -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\beta_{ij}^2 & -\beta_{ij}\gamma_{ij} & \alpha_{ij}\beta_{ij} & \beta_{ij}^2 & \beta_{ij}\gamma_{ij} \\ -\alpha_{ij}\gamma_{ij} & -\beta_{ij}\gamma_{ij} & -\gamma_{ij}^2 & \alpha_{ij}\gamma_{ij} & \beta_{ij}\gamma_{ij} & \gamma_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

gọi là ma trận độ cứng phần tử.

Các bước thực hiện phương pháp phần tử hữu hạn cho kết cấu dàn không gian, cũng như các bài toán của lý thuyết đàn hồi, tương tự như trong thí dụ trước đây. Lưu đồ của chương trình tính toán phần tử hữu hạn được cho trên hình 4.5.



Hình 4.5: Lưu đồ chương trình tính toán phần tử hữu hạn.

### 4.2.2 Áp dụng

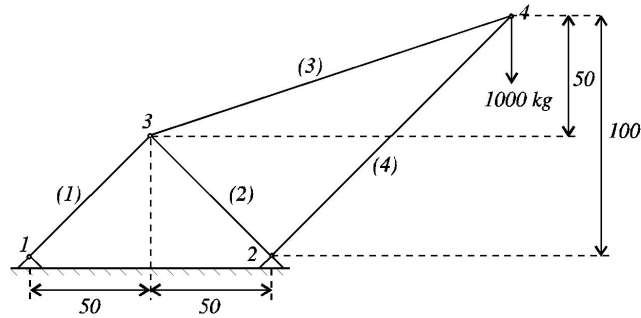
Xét kết cấu dàn phẳng như hình 4.6. Số liệu của bài toán được cho trên bảng sau:

Phần tử $e$	Tiết diện $A^e (cm^2)$	Chiều dài $L^e (cm)$	Môđun Y $E^e (kg/cm^2)$
1	2,0	$50\sqrt{2}$	$2 \times 10^6$
2	2,0	$50\sqrt{2}$	$2 \times 10^6$
3	1,0	$100\sqrt{2,5}$	$2 \times 10^6$
4	1,0	$100\sqrt{2}$	$2 \times 10^6$

#### Dữ liệu nhập

Do kết cấu là phẳng nên các kết quả trình bày trong mục trước bớt đi một chiều liên quan đến cao độ (thành phần trên trục  $z$ ). Công thức ma trận độ cứng phần tử

$$k^e = \frac{A^e E^e}{L^e} \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \alpha_{ij}\beta_{ij} & -\alpha_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\beta_{ij} \\ \alpha_{ij}\beta_{ij} & \beta_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\beta_{ij}^2 \\ -\alpha_{ij}^2 & -\alpha_{ij}\beta_{ij} & \alpha_{ij}^2 & \alpha_{ij}\beta_{ij} \\ -\alpha_{ij}\beta_{ij} & -\beta_{ij}^2 & \alpha_{ij}\beta_{ij} & \beta_{ij}^2 \end{bmatrix}$$



Hình 4.6: Bài toán.

và ma trận biến đổi

$$\Lambda^e = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ij} & \beta_{ij} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\alpha_{ij} = \frac{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}}{L^{(e)}}, \quad \beta_{ij} = \frac{y_j^{(e)} - y_i^{(e)}}{L^{(e)}}.$$

Thông tin về phép phân hoạch được cho bởi các biến nhập  $nn$  – số nút,  $ne$  – số phần tử và các mảng:

COORD chứa tọa độ các nút, mỗi dòng cho một nút, cột 1 là hoành độ, cột 2 là tung độ. Thí dụ, nếu  $(x_i, y_i)$  là tọa độ nút thứ  $i$  thì  $\text{COORD}(i,1)=x_i$ ,  $\text{COORD}(i,2)=y_i$ .

LA là ma trận lắp ghép, chứa thứ tự toàn cục của hai nút đầu cuối trong các phần tử, mỗi dòng cho một phần tử, cột 1 là thứ tự nút đầu, cột 2 là thứ tự nút cuối. Thí dụ, nếu  $i, j$  lần lượt là nút đầu và cuối của phần tử thứ  $e$  thì  $\text{LA}(e,1)=i$ ,  $\text{LA}(e,2)=j$ .

Các tham số về diện tích tiết diện, mô đun đàn hồi của các phần tử được lưu trữ trong mảng PARA. Mỗi dòng của mảng này ứng với một phần tử, cột 1 là diện tích tiết diện, cột 2 chiều dài, cột 3 là mô đun Young của phần tử.

Để tiện đưa vào các chuyển dịch và lực cho trước ta dùng mảng DCOND (chuyển dịch), và FCOND (lực). Mỗi mảng gồm 3 cột, mỗi dòng của mảng ứng với một nút cho trước chuyển dịch (hay lực). Cột 1 là thứ tự toàn cục của nút, cột 2 và 3 tương ứng là thành phần hoành độ và tung độ của chuyển dịch (hay lực) tại nút. Thí dụ, nếu nút đầu tiên được cho trước lực có thứ tự toàn cục là  $k$  và các thành phần của lực cho trước bằng  $f_1, f_2$  thì  $\text{FCOND}(1,1)=k$ ,  $\text{FCOND}(1,2)=f_1$ ,  $\text{FCOND}(1,3)=f_2$ .

Ngoài ra, do số bậc tự do tại mỗi nút là 2 nên số bậc tự do của toàn hệ là  $2 \cdot nn$ . Mỗi nút sẽ liên hệ với hai dòng và hai cột của ma trận độ cứng toàn cục, cũng vậy với hai dòng của vectơ tải toàn cục. Liên hệ giữa nút thứ  $i$  (thứ tự toàn cục) với hai bậc tự do này là  $2 \cdot i - 1$  và  $2 \cdot i$ . Cách đưa vào các điều kiện có khác so với các bài toán trước đây (xem `dan2d.m`) do đặc điểm này. Mỗi điều kiện được đưa vào sẽ làm thay đổi hai dòng, hai cột của ma trận độ cứng toàn cục cũng như vectơ tải toàn cục. Tham khảo chi tiết thực hiện trong chương trình `dan2d.m` (phụ lục) phân tích kết cấu dàn phẳng.

### Quá trình tính toán

#### Tiền xử lý

Dữ liệu

$nn=4$ ;  $ne=4$ ;  $dof=8$  (bậc tự do của hệ).

$COORD=[0 \ 0; 100 \ 0; 50 \ 50; 200 \ 100]$ .

$LA=[1 \ 3; 3 \ 2; 3 \ 4; 2 \ 4]$ .

$PARA=[2 \ 50 \cdot \sqrt{2} \ 2 \cdot 10^6; 2 \ 50 \cdot \sqrt{2} \ 2 \cdot 10^6; 1 \ 100 \cdot \sqrt{2.5} \ 2 \cdot 10^6;$   
 $1 \ 100 \cdot \sqrt{2} \ 2 \cdot 10^6]$ .

$DCOND=[1 \ 0.0 \ 0.0; 2 \ 0.0 \ 0.0]$ .

$FCOND=[4 \ 0.0 \ -1000]$ .

#### Xử lý

Khởi tạo ma trận độ cứng và vectơ tải

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lập theo phần tử. Phần tử 1

$$[k^{(1)}] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 \\ 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 \\ -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 \\ -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 \end{bmatrix};$$

lắp ghép

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 & 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 \\ -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 & 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Phần tử 2

$$[k^{(2)}] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 \\ -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 \\ -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 \\ 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 \end{bmatrix};$$

lắp ghép

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ -2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 5.6569 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & 0 & 5.6569 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Phần tử 3

$$[k^{(3)}] = 10^4 \begin{bmatrix} 1.1384 & 0.3795 & -1.1384 & -0.3795 \\ 0.3795 & 0.1265 & -0.3795 & -0.1265 \\ -1.1384 & -0.3795 & 1.1384 & 0.3795 \\ -0.3795 & -0.1265 & 0.3795 & 0.1265 \end{bmatrix};$$

lắp ghép

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.8284 & 2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ -2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 6.7953 & 0.3795 & -1.1384 & -0.3795 \\ -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & 0.3795 & 5.7833 & -0.3795 & -0.1265 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1384 & -0.3795 & 1.1384 & 0.3795 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3795 & -0.1265 & 0.3795 & 0.1265 \end{bmatrix}$$

Phần tử 4

$$[k^{(4)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 7.0711 & 7.0711 & -7.0711 & -7.0711 \\ 7.0711 & 7.0711 & -7.0711 & -7.0711 \\ -7.0711 & -7.0711 & 7.0711 & 7.0711 \\ -7.0711 & -7.0711 & 7.0711 & 7.0711 \end{bmatrix};$$

lắp ghép

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 2.8284 & 2.8284 & 0 & 0 & -2.8284 & -2.8284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5355 & -2.1213 & -2.8284 & 2.8284 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & -2.1213 & 3.5355 & 2.8284 & -2.8284 & -0.7071 & -0.7071 \\ -2.8284 & -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & 6.7953 & 0.3795 & -1.1384 & -0.3795 \\ -2.8284 & -2.8284 & 2.8284 & -2.8284 & 0.3795 & 5.7833 & -0.3795 & -0.1265 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 & -1.1384 & -0.3795 & 1.8455 & 1.0866 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 & -0.3795 & -0.1265 & 1.0866 & 0.8336 \end{bmatrix}.$$

Vectơ tải

$$[P] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1000]^T.$$

Khử điều kiện cốt yếu, ma trận độ cứng thành

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7953 & 0.3795 & -1.1384 & -0.3795 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3795 & 5.7833 & -0.3795 & -0.1265 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1384 & -0.3795 & 1.8455 & 1.0866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3795 & -0.1265 & 1.0866 & 0.8336 \end{bmatrix};$$

vectơ tải không đổi.

Ta có  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$ . Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 6.7953q_5 + 0.3795q_6 - 1.1384q_7 - 0.3795q_8 &= 0, \\ 0.3795q_5 + 5.7833q_6 - 0.3795q_7 - 0.1265q_8 &= 0, \\ -1.1384q_5 - 0.3795q_6 + 1.8455q_7 + 1.0866q_8 &= 0, \\ -0.3795q_5 - 0.1265q_6 + 1.0866q_7 + 0.8336q_8 &= -0.1 \end{aligned}$$

ta được các chuyển dịch còn lại:

$$q_5 = 0.0265, \quad q_6 = 0.0088, \quad q_7 = 0.3479, \quad q_8 = -0.5600.$$

**Hậu xử lý**

Tính ứng suất của các phần tử

$$[\sigma] = 10^3 [1.4142 \quad -1.4142 \quad -1.9799 \quad -2.1213].$$

## Bài tập chương 4



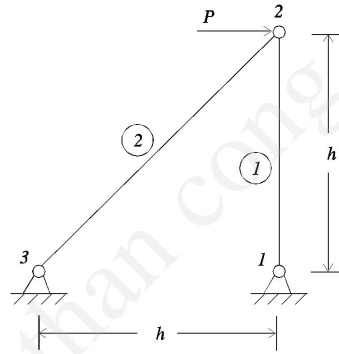
1. Trong các tính toán kỹ thuật, tenxơ biến dạng, ứng suất thường được viết dưới dạng vectơ. Cụ thể:

$$\begin{aligned}\sigma &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}]^T \\ \epsilon &= [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T\end{aligned}$$

trong đó  $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ , ( $i \neq j$ ), hay đơn giản:

$$\begin{aligned}\sigma &= [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]^T \\ \epsilon &= [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T.\end{aligned}$$

Tenxơ các hệ số đàn hồi  $C$  được viết dưới dạng ma trận:



Hình 4.7: Bài tập 2.2

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix}$$

hay

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

Khi đó, định luật Hooke:  $\sigma = C\epsilon$  (nhân ma trận).

- a) Hãy xác định ma trận  $C$  cho vật thể đàn hồi đồng chất đẳng hướng.
- b) Viết các phương trình (4.16), (4.17) và công thức (4.18) dưới dạng ma trận.

**2.** Tính ứng suất trong các thanh của dàn phẳng như hình 4.7. Biết  $AE = 10^6 \text{ kg}$ ,  $h = 100 \text{ cm}$ ,  $P = 10 \text{ kg}$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

# Bài đọc thêm

Bài viết dưới đây được trích từ tài liệu tham khảo [13], các mục, tiểu mục, định lý, phương trình được đánh số lại cho dễ theo dõi. Sinh viên nên đọc thêm để làm quen với việc tham khảo tài liệu bằng Anh ngữ, và cũng học thêm một cách trình bày lý thuyết phân tử hữu hạn.

## 1 Abstract formulation of the finite element method for elliptic problems

### 1.1 Introduction

We shall now give an abstract formulation of the finite element method for elliptic problems. This is not a goal in itself, but makes it possible to give a unified treatment of many problems in mechanics and physics so that we do not have to repeat in principle the same argument in different concrete cases. Further the abstract formulation is very easy to grasp and helps us to understand the basic structure of the finite element method.

Thus, let  $V$  be a Hilbert space with scalar product  $(\cdot, \cdot)_V$  and corresponding norm  $\|\cdot\|_V$  (the  $V$ -norm). Suppose that  $a(\cdot, \cdot)$  is a bilinear form on  $V \times V$  and  $L$  a linear form on  $V$  such that

- (i)  $a(\cdot, \cdot)$  is symmetric,
- (ii)  $a(\cdot, \cdot)$  is continuous, i.e., there is a constant  $\gamma > 0$  such that

$$|a(v, w)| \leq \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \quad (1)$$

- (iii)  $a(\cdot, \cdot)$  is  $V$ -elliptic, i.e., there is a constant  $\alpha > 0$  such that

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

- (iv)  $L$  is continuous, i.e., there is a constant  $\Lambda > 0$  such that

$$L(v) \leq \Lambda \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

Let us now consider the following abstract minimization problem (M): Find  $u \in V$  such that

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v), \quad (4)$$

where

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v),$$

and consider also the following abstract variational problem (V): Find  $u \in V$  such that

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (5)$$

Let us now first prove:

**Theorem 1.** *The problems (4) and (5) are equivalent, i.e.,  $u \in V$  satisfies (4) if and only if  $u$  satisfies (5). Moreover, there exists a unique solution  $u \in V$  of these problems and the following stability estimate holds*

$$\|u\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (6)$$

*Proof.* Existence of a solution follows from the Lax-Milgram theorem which is variant of the Riesz' representation theorem in Hilbert space theory. To prove that (4) and (5) are equivalent, we first show that if  $u \in V$  satisfies (4), then also (5) holds, and we leave the proof of the reverse implication to the reader. Thus, let  $v \in V$  and  $\epsilon \in \mathbb{R}$  be arbitrary. Then  $(u + \epsilon v) \in V$  so that since  $u$  is a minimum,

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Using the notation  $g(\epsilon) = F(u + \epsilon v)$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , we thus have

$$g(0) \leq g(\epsilon) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R},$$

so that  $g$  has a minimum at  $\epsilon = 0$ . Hence  $g'(0) = 0$  if the derivative  $g'(\epsilon)$  exists at  $\epsilon = 0$ . But

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{1}{2}a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{\epsilon}{2}a(u, v) + \frac{\epsilon}{2}a(v, u) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) - L(u) - \epsilon L(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + \epsilon a(u, v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) - \epsilon L(v), \end{aligned}$$

where we used the symmetry of  $a(\cdot, \cdot)$ . It follows that

$$0 = g'(0) = a(u, v) - L(v),$$

which proves (5). To prove the stability result we choose  $v = u$  in (5) and use (2) and (3) to obtain

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \Lambda \|u\|_V,$$

which proves (6) upon division by  $\|u\|_V \neq 0$ . Finally, the uniqueness follows from the stability estimate (6) since if  $u_1$  and  $u_2$  are two solutions so that  $u_i \in V$  and

$$a(u_i, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad i = 1, 2,$$

then by subtraction we see that  $u_1 - u_2 \in V$  satisfies

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Applying the stability estimate to this situation (with  $L \equiv 0$ , i.e.,  $\Lambda = 0$ ) we conclude that  $\|u_1 - u_2\|_V = 0$ , i.e.,  $u_1 = u_2$ .  $\square$

## 1.2 Discretization. An error estimate

Now let  $V_h$  be a finite-dimensional subspace of  $V$  of dimension  $M$ . Let  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$  be a basis for  $V_h$ , so that  $\varphi_i \in V_h$  and any  $v \in V_h$  has the unique representation

$$v = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i, \quad \text{where } \eta_i \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

We can now formulate the following discrete analogues of the problems (M) and (V): Find  $u_h \in V_h$  such that

$$F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in V_h, \quad (8)$$

or equivalently: Find  $u_h \in V_h$  such that

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (9)$$

We see that (9) is equivalent to

$$a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

Using the representation

$$u_h = \sum_{i=1}^M \xi \varphi_i \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

(9) can be written as

$$\sum_{i=1}^M a(\varphi_i, \varphi_j) \xi_i = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, M,$$

or, in matrix form,

$$A\xi = b, \quad (11)$$

where  $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^M$ ,  $b = (b_i) \in \mathbb{R}^M$  with  $b_i = L(\varphi_i)$ , and  $A = (a_{ij})$  is an  $M \times M$  matrix with elements  $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ . From the representation (7), we have

$$a(v, v) = a\left(\sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^M \eta_j \varphi_j\right) = \sum_{i,j=1}^M \eta_i a(\varphi_i, \varphi_j) \eta_j = \eta \cdot A\eta, \quad (12)$$

$$L(v) = L\left(\sum_{j=1}^M \eta_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^M \eta_j L(\varphi_j) = b \cdot \eta, \quad (13)$$

where the dot denotes the usual scalar product in  $\mathbb{R}^M$ :

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i=1}^M \xi_i \eta_i.$$

It follows that (8) may be formulated as

$$\frac{1}{2} \xi \cdot A\xi - b \cdot \xi = \min_{\eta \in \mathbb{R}^M} \left[ \frac{1}{2} \eta \cdot A\eta - b \cdot \eta \right]. \quad (14)$$

We also have, recalling (2),

$$\eta \cdot A\eta = a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 > 0$$

if  $v \neq 0$ , i.e., if  $\eta \neq 0$ . Since also  $a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i)$ , this proves the following result.

**Theorem 2.** *The stiffness matrix  $A$  is symmetric and positive definite.*

We can now prove the following basic result where the equivalence follows as above.

**Theorem 3.** *There exists a unique solution  $\xi \in \mathbb{R}^M$  to the equivalent problems (11) and (14), i.e., there exists a unique solution  $u_h \in V_h$  to the equivalent problems (8) and (9). Further, the following stability estimate holds*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}. \quad (15)$$

*Proof.* Since  $A$  is positive definite,  $A$  is non-singular, which proves existence and uniqueness. The stability estimate follows by choosing  $v = u_h$  in (9) which gives, using (2) and (3),

$$\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = L(u_h) \leq \Lambda \|u_h\|_V,$$

from which (15) follows upon division by  $\|u_h\|_V \neq 0$ .

*Remark.* The stability estimate (15) for the finite element solution, which is an analogue of the stability estimate (6) for the continuous problem, reflects a very important property of the finite element method. In a certain sense it can be viewed as the theoretical basis for the success of the method.  $\square$

Let us now prove the following error estimate:

**Theorem 4.** *Let  $u \in V$  be the solution of (5) and  $u_h \in V_h$  that of (9) where  $v_h \subset V$ . Then*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h. \quad (16)$$

*Proof.* Since  $V_h \subset V$  we have from (5) in particular

$$a(u, w) = L(w) \quad \forall w \in V_h,$$

so that after subtracting (9),

$$a(u - u_h, w) = 0 \quad \forall w \in V_h. \quad (17)$$

For an arbitrary  $v \in V_h$ , define  $w = u_h - v$ . Then  $w \in V_h$ ,  $v = u_h - w$  and by (2) and (17), we have

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, w) \\ &= a(u - u_h, u - u_h + w) = a(u - u_h, u - v) \leq \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V, \end{aligned}$$

where the last inequality follows from (1). Dividing by  $\|u - u_h\|_V$  we obtain the desired estimate.  $\square$

From the abstract qualitative estimate of Theorem 4 we may obtain a quantitative estimate by choosing a suitable function  $v \in V_h$  and estimating  $\|u - v\|_V$ . Usually one then chooses  $v = \pi_h u$  where  $\pi_h u \in V_h$  is a suitable interpolant of  $u$ .



### 1.3 The energy norm

By (1) and (2) it follows that we may introduce a new norm  $\|\cdot\|_a$  on  $V$  defined by

$$\|v\|_a^2 = a(v, v), \quad v \in V.$$

This norm is *equivalent* to the norm  $\|\cdot\|_V$ , i.e., there are positive constants  $c$  and  $C$  such that

$$c\|v\|_V \leq \|v\|_a \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (18)$$

More precisely, we may choose  $c = \sqrt{\alpha}$  and  $C = \sqrt{\gamma}$ . The scalar product  $(\cdot, \cdot)_a$  corresponding to  $\|\cdot\|_a$  is given by

$$(v, w)_a = a(v, w).$$

The norm  $\|\cdot\|_a$  is referred to as the *energy norm*. The error equation (17) may now be written

$$(u - u_h, v)_a = 0 \quad \forall v \in V_h,$$

from which follows that

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - v\|_a \quad \forall v \in V_h, \quad (19)$$

or equivalently that  $u_h$  is the projection of  $u$  onto  $V_h$  with respect to the scalar product  $(\cdot, \cdot)_a$ . Clearly (19) shows that  $u_h$  is a best approximation of  $u$  in the energy norm.

## 2 Approximation theory for FEM. Error estimates for elliptic problems

For a typical elliptic problem satisfying the conditions (i)- (iv) of Section 3.2, we have by Theorem 4

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h.$$

Choosing  $v = \pi_h u \in V_h$  to be a suitable interpolant of  $u$  and estimating the interpolation error  $\|u - \pi_h u\|_V$  we obtain an estimate of the error  $\|u - u_h\|_V$ . In this section we study the problem of estimating the interpolation error  $\|u - \pi_h u\|_V$ . The interpolant  $\pi_h u \in V_h$  is usually chosen so that the degrees of freedom for  $V_h$  agree for  $u$  and  $\pi_h u$ . In this case the problem of estimating  $\|u - u_h\|_V$  is reduced to the problem of estimating  $u - \pi_h u$  individually on each element  $K \in T_h$ .

## 2.1 Interpolation with piecewise linear functions in two dimensions

We shall first consider the case where  $V = H^l(\Omega)$  and  $V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}$  where  $T_h = \{K\}$  is a triangulation of  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , i.e.,  $V_h$  is the standard finite element space of piecewise linear functions on triangles  $K$ . For  $K \in T_h$  we define (see Fig 1)

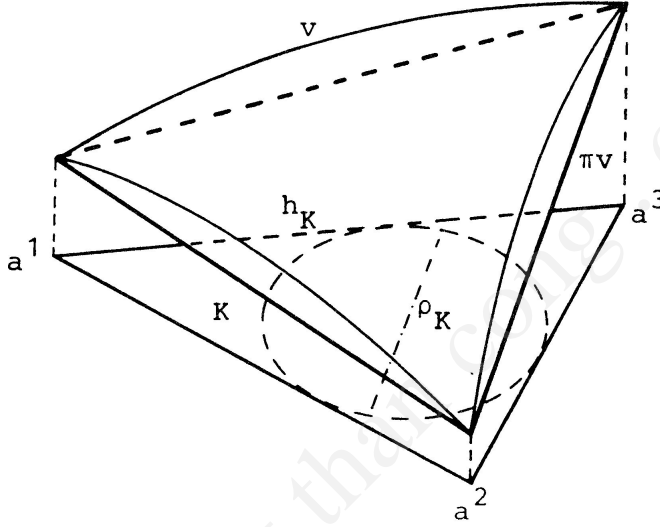


Fig 1:

$h_K$  = the diameter of  $K$  = the longest side of  $K$ ,

$\rho_K$  = the diameter of the circle inscribed in  $K$ ,

$h = \max_{K \in T_h} h_K$ .

To be more precise, we will subsequently be concerned with not only one triangulation  $T_h$  but a family of triangulations  $\{T_h\}$  that are indexed by the parameter  $h$ . We shall below assume that there is a positive constant  $\beta$  independent of the triangulation  $T_h \in \{T_h\}$ , i.e., independent of  $h$ , such that

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta \quad \forall K \in T_h. \quad (20)$$

This condition means that the triangles  $K \in T_h$  are not allowed to be arbitrarily thin, or equivalently, the angles of the triangles  $K$  are not allowed to be arbitrarily small; the constant  $\beta$  is a measure of the smallest angle in any  $K \in T_h$  for any  $T_h \in \{T_h\}$ .

Let  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , be the nodes of  $T_h$ . Given  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  we define the interpolant  $\pi_h u \in V_h$  by

$$\pi_h u(N_i) = u(N_i) \quad i = 1, \dots, M.$$

Thus  $\pi_h u$  is the piecewise linear function agreeing with  $u$  at the nodes of  $T_h$ . We will start by estimating the interpolation error  $u - \pi_h u$  on each triangle  $K$ . We have the following result.

**Theorem 5.** *Let  $K \in T_h$  be a triangle with vertices  $a^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Given  $v \in C^0(K)$  let the interpolant  $\pi v \in P_1(K)$  be defined by*

$$\pi v(a^i) = v(a^i) \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Then

$$\|v - \pi v\|_{L_\infty(K)} \leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)} \quad (22)$$

$$\max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha(v - \pi v)\|_{L_\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}, \quad (23)$$

where

$$\|v\|_{L_\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|.$$

Before giving a proof of Theorem 5 let us comment on the estimates (22) and (23). We note that the size of the errors  $v - \pi v$  and  $D^\alpha(v - \pi v)$  depend on the second partial derivatives of  $v$ ; the larger these derivatives are, the more "curved" is the surface representing the function  $v$  and thus the larger is the deviation  $v - \pi v$  from the plane representing  $\pi v$  (see Fig 1). Also note that the assumption (20) will be used in the estimate (23) to bound the quantity  $h_K/\rho_K$ .

*Proof of Theorem 5.* Let  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , be the basis functions for  $P_1(K)$ . A general function  $w \in P_1(K)$  then has the representation

$$w(x) = \sum_{i=1}^3 w(a^i) \lambda_i(x), \quad x \in K,$$

so that in particular

$$\pi v(x) = \sum_{i=1}^3 v(a^i) \lambda_i(x), \quad x \in K, \quad (24)$$

since by (21)  $\pi v(a^i) = v(a^i)$ . We now derive representation formulas for the errors  $v - \pi v$  and  $D^\alpha(v - \pi v)$ ,  $|\alpha| = l$ , using the following Taylor expansion at  $x \in K$

$$v(y) = v(x) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + R(x, y),$$

where

$$R(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(y_i - x_i)(y_j - x_j),$$

is the remainder term of order 2 and  $\xi$  is a point on the line segment between  $x$  and  $y$ . In particular by choosing  $y = a^i$ , we have

$$v(a^i) = v(x) + p_i(x) + R_i(x), \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(a_j^i - x_j), \quad a_j^i = (a_1^i, a_2^i), \\ R_i(x) &= R(x, a^i). \end{aligned}$$

Since

$$|a_j^i - x_j| \leq h_K, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

we have the following estimate of the remainder term  $R_i(x)$ :

$$R_i(x) \leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Now (24) and (25) combine to give

$$\pi v(x) = v(x) \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) + \sum_{i=1}^3 p_i(x) \lambda_i(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \lambda_i(x) \quad x \in K. \quad (27)$$

We now need the following lemma whose simple proof is given below.

**Lemma 1.** For  $j = l, 2$  and  $x \in K$  we have

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) = 1, \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i(x) \lambda_i(x) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x). \quad (31)$$

By (28), (29) and (27) we have

$$\pi v(x) = v(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \lambda_i(x),$$

which gives us the following representation of the interpolation error:

$$v(x) - \pi v(x) = - \sum_{i=1}^3 R_i(x) \lambda_i(x).$$

Since  $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$ , if  $x \in K$ ,  $i = l, 2, 3$ , we can use the previous estimate (26) of the remainder term  $R_i$  to get

$$\begin{aligned} |v(x) - \pi v(x)| &\leq \sum_{i=1}^3 |R_i(x)| |\lambda_i(x)| \leq \max_i |R_i(x)| \sum_{i=1}^3 |\lambda_i(x)| \\ &\leq 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}, \end{aligned}$$

which proves (22).

To prove (23) we differentiate (24) with respect to  $x_1$  to get

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) = \sum_{i=1}^3 v(a^i) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x),$$

which together with (25) shows that

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) = v(x) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x). \quad (32)$$

Hence, by (30) and (31) we have

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x),$$

which gives the following representation of the error  $\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) = - \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x), \quad x \in K.$$

It is now easy to see that

$$\max_{x \in K} \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x) \right| \leq \frac{1}{\rho_K} \quad (33)$$

which together with (26) finally gives

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) \right| \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}.$$

In the same way we estimate  $\frac{\partial v}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \pi v}{\partial x_2}(x)$  and thus (23) follows. The proof of the theorem is now complete once the lemma is established.

*Proof of Lemma 1.* The proof is based on the following observation:

$$\pi v = v \quad \text{if } v \in P_1(K), \quad (34)$$

which of course follows from the fact there is a unique function  $v \in P_1(K)$  assuming given values at the vertices of  $K$ . If we now choose  $v(x) \equiv 1$  in (27), in which case clearly  $v = \pi v$ , we get

$$1 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x), \quad x \in K,$$

since in this case  $p_l \equiv R_l \equiv 0$ . This proves (28) and (30) follows directly.

To prove (29) we choose  $v(x) = d_l x_l + d_2 x_2$  in (27) with  $d_i \in \mathbb{R}$ . Again  $v = \pi v$  and further

$$p_i(x) = d_l(a_1^i - x_1) + d_2(a_2^i - x_2),$$

and  $R_i \equiv 0$  so that by (27)

$$v(x) = v(x) + \sum_{i=1}^3 [d_l(a_1^i - x_1) + d_2(a_2^i - x_2)] \lambda_i(x), \quad x \in K.$$

and so for all  $d_i \in \mathbb{R}$  we have

$$\sum_{i=1}^3 [d_i(a_1^i - x_1) + d_2(a_2^i - x_2)] \lambda_i(x) = 0 \quad x \in K.$$

This proves (29) by choosing  $d_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Finally, (31) follows in a similar way by choosing  $v = d_1 x_1 + d_2 x_2$  in (32). This finishes the proof of the lemma and the proof of Theorem 5 is complete.  $\square$

Since Theorem 5 states estimates of the interpolation error using the  $L_\infty(K)$ -norm, it is not ideally suited to give estimates for  $\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)}$  involving the  $L_2$ -norm. For this purpose we will use instead the following analogue of Theorem 5. Here we use the following notation for  $r = 0, 1, \dots$

$$|v|_{H^r(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Note that  $|v|_{H^r(\Omega)}$  measures the  $L_2(\Omega)$ -norm of the partial derivatives of  $v$  of order exactly equal to  $r$ , whereas derivatives of order less than  $r$  are not included. We say that  $|\cdot|_{H^r(\Omega)}$  is a *seminorm*. Since we may have  $|v|_{H^r(\Omega)} = 0$  even if  $v \neq 0$  (e.g. if  $v \equiv 1$  and  $r \leq l$ ), it is not a norm.

**Theorem 6.** *Under the assumptions of Theorem 5 there is an absolute constant  $C$  such that*

$$\begin{aligned} \|v - \pi v\|_{L_2(K)} &\leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)}, \\ |v - \pi v|_{H^1(K)} &\leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}. \end{aligned}$$

We see that Theorem 5 and 6 have exactly the same structure, the only difference being the norm involved, either the  $L_\infty$  or the  $L_2$ -norm. For simplicity we have chosen to present a proof in the  $L_\infty$ -case since we then avoid some technical complications.

Let us now apply Theorem 6 to estimate the global interpolation errors  $\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)}$  and  $|u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)}$ . We have by summing over  $K \in T_h$ ,

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in T_h} \|u - \pi_h u\|_{L_2(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in T_h} C^2 h_K^4 |u|_{H^2(K)}^2 \leq C^2 h^4 \sum_{K \in T_h} |u|_{H^2(K)}^2 = C^2 h^4 |u|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

and similarly using (20), i.e.,  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{1}{\beta}$ ,

$$\begin{aligned} |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sum_{K \in T_h} C^2 \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |u|_{H^2(K)}^2 \leq \sum_{K \in T_h} \frac{C^2 h_K^2}{\beta^2} |u|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq \frac{C^2 h^2}{\beta^2} |u|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

so that

$$\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{Ch}{\beta} |u|_{H^2(\Omega)} = Ch |u|_{H^2(\Omega)}, \quad (36)$$

if the constant  $\beta$  is included in the constant  $C$ , and

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (37)$$

## 2.2 Interpolation with polynomials of higher degree

The estimates (36) and (37) are typical examples of estimates for the interpolation error  $u - \pi_h u$ , in this case for interpolation with piecewise linear functions. If we work with piecewise polynomials of degree  $r \geq l$  on triangulations  $T_h$  satisfying (20), we have in the typical case the following estimates:

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+l}(\Omega)}, \quad (38)$$

$$|u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^r |u|_{H^{r+l}(\Omega)}, \quad (39)$$

where the constant  $\beta$  is absorbed in the constant  $C$  in (39). If  $V_h \subset H^2(\Omega)$ , then we also have

$$|u - \pi_h u|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{r-1} |u|_{H^{r+l}(\Omega)}. \quad (40)$$

Note that for each derivative of the error  $u - \pi_h u$ , the power of  $h$  on the right hand side drops by one. Note that the constant  $C$  in (38)-(40) only depends on the constant  $\beta$  in (20) and the degree  $r$ , but not on the mesh parameter  $h$  or the function  $u$ .

*Remark.* If  $u$  does not have the regularity required in (38) or (39), we get the corresponding reduction in the power of  $h$ : For  $1 \leq s \leq r + 1$ , we have

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^s |u|_{H^s(\Omega)}, \quad (41)$$

$$\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1} |u|_{H^s(\Omega)}. \quad \square \quad (42)$$



### 2.3 Error estimates for FEM for elliptic problems

Recalling again the typical abstract error estimate for an elliptic problem

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h,$$

and choosing here  $v = \pi_h u$  with  $\pi_h u \in V_h$  and interpolant of  $u$ , we have

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - \pi_h u\|_V \quad \forall v \in V_h, \quad (43)$$

Using estimates for the interpolation error  $\|u - \pi_h u\|_V$  we then obtain estimates for the finite element error  $\|u - u_h\|_V$ .

## Các đề tài nghiên cứu

1. Giải bài toán đối lưu - khuếch tán dừng (bài tập 4, chương 3) và không dừng (bài tập 7, chương 3).
2. Giải bài toán uốn tấm Kirchhoff với biên ngàm (bài tập 5, chương 3) dùng nội suy Hermite phần tử tam giác hoặc tứ giác.

Hoặc dùng thuật toán lặp trong §4.2 An iterative method for solving certain variational problems of order 4 (Numerical Analysis of Variational Inequalities, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, R. T. ROCKAFELLAR (eds.)

3. Giải bài toán biên cho phương trình Stokes dừng

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{trong } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{trên } \Gamma. \end{aligned}$$

Dùng phần tử Taylor-Hood.

4. Giải bài toán uốn dầm Euler-Bernoulli.
5. Giải bài toán uốn tấm Reissner-Mindlin.
6. Tìm hiểu phần mềm mã nguồn mở **Triangle** (Triangle - A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator). Viết chương trình chuyển đổi output để dùng cho chương trình PTHH.  
Link: <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>
7. Yêu cầu tương tự với phần mềm **gmsh-2.8.2-Windows**.

*Sinh viên có thể chọn một trong các đề tài trên để làm báo cáo cuối khóa do thầy hướng dẫn. Kết quả được tính vào điểm thi cuối kỳ.*

cuu duong than cong . com

# Phụ lục A

## Không gian Sobolev

Để trình bày phương pháp PTHH ta cần đến các không gian hàm Sobolev.

### 1 Không gian Lebesgue

Cho tập mở  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  có biên  $\Gamma$  trơn từng mảnh. Theo lý thuyết tích phân Lebesgue một mệnh đề phụ thuộc  $\mathbf{x} \in \Omega$  được gọi là "đúng hầu hết" (h.h.) trên  $\Omega$  nếu nó đúng với mọi  $\mathbf{x}$  ngoại trừ các  $\mathbf{x}$  thuộc một tập có độ đo không (không đáng kể). Ta đồng nhất hai hàm bằng nhau h.h.

Với  $1 \leq q \leq \infty$ , ta định nghĩa không gian Lebesgue,  $L^q(\Omega)$ , là tập hợp các hàm thực  $v$  xác định trên  $\Omega$  sao cho  $\|v\|_{L^q(\Omega)} < \infty$ , trong đó  $\|v\|_{L^q(\Omega)}$  được định bởi

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^{1/q}$$

khi  $1 \leq q < \infty$ ,

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup } \{|v(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Omega\} := \inf\{C : |v(\mathbf{x})| \leq C \text{ h.h.}\}$$

khi  $q = \infty$ .

Ánh xạ  $v \mapsto \|v\|_{L^q(\Omega)}$  thỏa định nghĩa về chuẩn trên  $L^q(\Omega)$ . Hơn nữa, không gian  $L^q(\Omega)$  với chuẩn  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$  là không gian Banach.

*Bất đẳng thức Hölder*

Với  $1 \leq p, q \leq \infty$  sao cho  $1/p + 1/q = 1$ ,

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega). \quad (\text{A.1})$$

Khi  $p = q = 1$ , bất đẳng thức này còn được gọi là *bất đẳng thức Cauchy* hay *bất đẳng thức Schwarz*.

Bất đẳng thức tam giác áp dụng cho  $L^q(\Omega)$  được gọi là *bất đẳng thức Minkowski*:

$$\|u + v\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^q(\Omega). \quad (\text{A.2})$$

## 2 Đạo hàm suy rộng (đạo hàm yếu)

Cho  $v$  là hàm liên tục xác định trên  $\Omega$ , giá (support) của  $v$  là bao đóng của tập  $\{v : v(\mathbf{x}) \neq 0, \mathbf{x} \in \Omega\}$ . Nếu tập này là compact (bị chặn), thì  $v$  được gọi là có giá compact trong  $\Omega$ .

Ký hiệu  $\mathcal{D}(\Omega)$  hay  $C_0^\infty(\Omega)$  là tập hợp các hàm có giá compact trong  $\Omega$ . Để định nghĩa đạo hàm yếu, ta đưa vào không gian hàm:

$$L_{loc}^1(\Omega) = \{v : v \in L^1(K) \text{ với mọi compact } K \text{ trong } \Omega\}.$$

Chú ý rằng  $L_{loc}^1(\Omega)$  chứa tất cả các hàm thuộc lớp  $C^0(\Omega)$ .

Ký hiệu dưới đây được dùng để chỉ một đạo hàm riêng của hàm  $v$

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

trong đó  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  là một đa chỉ số, với  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  là các số nguyên không âm, và  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$  là độ dài của  $\alpha$ .

Hàm  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  được gọi là có đạo hàm suy rộng,  $D_w^\alpha v$ , nếu tồn tại hàm  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  sao cho

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) D^\alpha \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nếu  $u$  tồn tại ta viết  $D_w^\alpha v = u$ .

Nếu  $v \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ , thì đạo hàm suy rộng  $D_w^\alpha v$  tồn tại và bằng  $D^\alpha v$ .

## 3 Không gian Sobolev

Với  $r = 1, 2, \dots$  và  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ , giả sử các đạo hàm suy rộng  $D^\alpha v$  tồn tại với mọi  $|\alpha| \leq r$ . Ta định nghĩa chuẩn Sobolev

$$\|v\|_{W^{r,q}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q}$$

khi  $1 \leq q < \infty$ . Khi  $q = \infty$ , định nghĩa

$$\|v\|_{W^{r,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Không gian Sobolev được định nghĩa bởi

$$W^{r,q}(\Omega) = \{v \in L^1_{loc}(\Omega) : \|v\|_{W^{r,q}(\Omega)} < \infty\}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

$\|\cdot\|_{W^{r,q}(\Omega)}$  thỏa định nghĩa chuẩn. Hơn nữa,  $W^{r,q}(\Omega)$  là không gian Banach với chuẩn này.

Ký hiệu  $W_0^{r,q}(\Omega)$  là đầy đủ hóa của  $\mathcal{D}(\Omega)$  đối với chuẩn  $\|\cdot\|_{W^{r,q}(\Omega)}$ .

Với  $\Omega$  có biên trơn và  $v \in W^{1,q}(\Omega)$ , hạn chế trên biên  $\Gamma$ ,  $v|_\Gamma$ , có thể được biểu diễn như là hàm trong  $L^q(\Gamma)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ . Điều này không khẳng định giá trị từng điểm của  $v$  trên  $\Gamma$  có nghĩa. Từ tính chất này ta có

$$W_0^{r,q}(\Omega) = \{v \in W^{r,q}(\Omega) : D^\alpha v|_\Gamma = 0 \text{ trong } L^2(\Gamma), |\alpha| < r\}.$$

Trong các phát biểu về sau ta còn dùng các nửa chuẩn:

$$|v|_{W^{r,q}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha v\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty$$

$$|v|_{W^{r,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=r} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Với  $q = 2$  ta dùng các ký hiệu:

$$H^r(\Omega) = W^{r,2}(\Omega), \quad H_0^r(\Omega) = W_0^{r,2}(\Omega), \quad r = 1, 2, \dots$$

Một số bao hàm thức thông dụng:

Nếu  $r \leq k$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , thì

$$W^{r,q'}(\Omega) \subset W^{r,q}(\Omega). \quad (\text{A.3})$$

Nếu  $\Omega$  bị chặn,  $1 \leq q \leq q' \leq \infty$ , thì

$$W^{k,q}(\Omega) \subset W^{r,q}(\Omega). \quad (\text{A.4})$$

*Bất đẳng thức Poincaré*

Cho  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  là tập mở với biên  $\Gamma$  trơn từng mảnh, nếu  $v \in H^1(\Omega)$  triệt tiêu trên một phần biên của  $\Gamma$  có độ đo dương, thì tồn tại hằng số  $C > 0$ , phụ thuộc chỉ vào  $\Omega$ , sao cho

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C|v|_{H^1(\Omega)}. \quad (\text{A.5})$$

Nếu  $\Omega$  bị chặn, bất đẳng thức này ám chỉ nửa chuẩn  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  tương đương với chuẩn  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Tổng quát,  $\|\cdot\|_{H^r(\Omega)}$  tương đương với chuẩn  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

Xét không gian  $L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Với  $f \in L^p(\Omega)$ , trong đó  $1/p + 1/q = 1$ , đặt

$$L(v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad v \in L^q(\Omega).$$

Theo bất đẳng thức Hölder,  $L$  là dạng tuyến tính bị chặn theo chuẩn  $L^q(\Omega)$ :

$$L(v) \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad v \in L^q(\Omega).$$

Như vậy  $f \in L^p(\Omega)$  có thể xem như phiếm hàm tuyến tính liên tục trên  $L^q(\Omega)$ . Do định lý biểu diễn Riesz  $L^p(\Omega)$  là không gian đối ngẫu của  $L^q(\Omega)$ . Chỉ số  $p$  gọi là chỉ số đối ngẫu của  $q$ .

Với  $1 \leq q \leq \infty$  và  $r$  là số nguyên dương, không gian đối ngẫu của không gian Sobolev  $W^{r,q}(\Omega)$  được ký hiệu bởi  $W^{-r,p}(\Omega)$ , trong đó  $p$  là chỉ số đối ngẫu của  $q$ . Chuẩn:

$$\|L\|_{W^{-r,p}(\Omega)} = \sup_{0 \neq v \in W^{r,q}(\Omega)} \frac{L(v)}{\|v\|_{W^{r,q}(\Omega)}}, \quad L \in W^{-r,p}(\Omega).$$

## Phụ lục B

### Bài toán biến phân tuyến tính

Cho  $V$  là không gian Hilbert, cho  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  là dạng song tuyến tính trên  $V$ ,  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  là dạng tuyến tính trên  $V$ . Bài toán: tìm  $u \in V$  thỏa

$$a(u, v) = \ell(v) \quad (\text{B.1})$$

với mọi  $v \in V$  được gọi là bài toán biến phân tuyến tính.

Điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán biến phân được cho trong định lý Lax - Milgram:

**Định lý B.1** (Lax - Milgram). Cho  $V$  là không gian Hilbert với tích vô hướng  $(\cdot, \cdot)$  và chuẩn tương ứng  $\|\cdot\|$ . Nếu

(i)  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  là dạng song tuyến tính liên tục trên  $V$ , kháng từ, nghĩa là tồn tại hằng số  $\alpha > 0$  sao cho

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

với mọi  $v \in V$ .

(ii)  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  là dạng tuyến tính liên tục trên  $V$ .

thì bài toán biến phân (B.1) tồn tại và duy nhất nghiệm.

Chúng minh định lý Lax - Milgram dựa trên định lý biểu diễn Riesz.

**Định lý B.2** (Riesz). Cho  $V$  là không gian Hilbert với tích vô hướng  $(\cdot, \cdot)$ . Nếu  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  là dạng tuyến tính liên tục trên  $V$ , thì tồn tại duy nhất vectơ  $w \in V$  sao cho:

$$\ell(v) = (w, v), \quad \forall v \in V.$$

Chúng minh định lý Lax - Milgram. Do  $a(\cdot, \cdot)$  là dạng song tuyến tính liên tục và kháng từ trên  $V$  nên có thể xem nó là tích vô hướng (mới) xác định trên  $V$  với chuẩn tương ứng:

$$\|v\|_\alpha = \sqrt{a(v, v)}.$$



Vì dạng song tuyến tính  $a(\cdot, \cdot)$  liên tục nên tồn tại  $M > 0$  sao cho với mọi  $v \in V$ ,

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v, v) \leq M\|v\|^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\|v\| \leq \|v\|_\alpha \leq \sqrt{M}\|v\|,$$

nghĩa là chuẩn  $\|\cdot\|_\alpha$  tương đương với chuẩn  $\|\cdot\|$  trên  $V$ .

Từ giả thiết  $\ell(\cdot)$  liên tục trên  $V$  với chuẩn  $\|\cdot\|$  ta suy ra nó cũng liên tục trên  $V$  với chuẩn mới. Áp dụng định lý Riesz, tồn tại  $u \in V$  sao cho

$$\ell(v) = a(u, v), \quad \forall v \in V;$$

nghĩa là bài toán biến phân (B.1) có nghiệm.

Nếu bài toán (B.1) có hai nghiệm  $u_1, u_2$  thì

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \Rightarrow \|u_1 - u_2\|_\alpha = 0 \Rightarrow \|u_1 - u_2\| = 0;$$

nghĩa là  $u_1 = u_2$ . Như vậy, nghiệm của bài toán (B.1) là duy nhất. ■

Trong trường hợp  $a$  đối xứng thì bài toán biến phân tương đương với bài toán tối ưu, đối tượng của phương pháp Ritz: tìm  $u \in V$  cực tiểu hóa phiếm hàm

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v). \quad (\text{B.2})$$

# Phụ lục C

## Cầu phương Gauss

### 1 Cầu phương 1-chiều

Từ công thức cầu phương

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) + E, \quad (\text{A.1})$$

Phép cầu phương Gauss 1-chiều được thiết lập bằng cách chọn các điểm cầu phương  $\xi_i$  và các trọng lượng  $w_i$  tương ứng sao cho sai số  $E = 0$  khi  $f(x) = x^d$  với bậc  $d$  lớn nhất có thể. Thí dụ, trường hợp  $n = 2$ , công thức (A.1) là

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^2 w_i f(\xi_i) + E.$$

Thay  $f(x) = 1$  (đa thức bậc 0):

$$2 = \xi|_{-1}^1 = w_1 + w_2.$$

Thay  $f(x) = x$  (đa thức bậc 1):

$$0 = \frac{1}{2} \xi^2 \Big|_{-1}^1 = w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2.$$

Thay  $f(x) = x^2$  (đa thức bậc 2):

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \xi^3 \Big|_{-1}^1 = w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2.$$

Thay  $f(x) = x^3$  (đa thức bậc 3):

$$0 = \frac{1}{4}\xi^4 \Big|_{-1}^1 = w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3.$$

Giải ra ta được:  $\xi_{12} = \pm 1/\sqrt{3}$ ,  $w_1 = w_2 = 1$ . Vậy, công thức cầu phương Gauss 2 điểm:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}). \quad (\text{A.2})$$

Bảng các điểm cầu phương và trọng lượng với  $n = 1 : 6$

$n$	$\pm\xi_i$	$w_i$
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556
4	0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37654
5	0.00000 00000 00000 0.53864 93101 05683 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189
6	0.23861 91860 83197 0.66120 93864 66265 0.93246 95142 03152	0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.17132 44923 79170

Khi phải tính tích phân trên đoạn  $[a, b]$ , ta dùng phép đổi biến:

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}$$

để chuyển khoảng lấy tích phân về đoạn  $[-1, 1]$ .

## 2 Cầu phương 2-chiều

Đối với trường hợp 2-chiều, đối với hàm  $f(\xi, \eta)$  xác định trên hình vuông  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , dùng tích phân lặp rồi cầu phương Gauss cho trường hợp 1-chiều:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) d\eta = \sum_{i=1}^n w_i \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta) d\eta$$

Cuối cùng ta được:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i,j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j). \quad (\text{A.3})$$

### 3 Lập trình Matlab

```
function [point,weight]=gaussqd1(n)
% Mục đích
% xác định điểm cầu phương và trọng lượng
% của quy tắc cầu phương Gauss 1-chiều
% Cu pháp:
% [point,weight]=gaussqd1(n)
% Mô tả biến:
% n - số điểm cầu phương
% point - vectơ chứa các điểm cầu phương
% weight - vectơ chứa các trọng lượng
%
% khởi tạo
%
point=zeros(n,1);
weight=zeros(n,1);
%
% điểm cầu phương và trọng lượng tương ứng
%
if n==1 % quy tắc 1 điểm
    point(1)=0.0;
    weight(1)=2.0;
elseif n==2 % quy tắc 2 điểm
    point(1)=0.577350269189626;
    point(2)=-point(1);
    weight(1)=1.0;
    weight(2)=weight(1);
elseif n==3 % quy tắc 3 điểm
    point(1)=-0.774596669241483;
    point(2)=0.0;
    point(3)=-point(1);
    weight(1)=0.555555555555556;
    weight(2)=0.888888888888889;
    weight(3)=weight(1);
```

```

elseif n==4 % quy tac 4 diem
    point(1)=-0.861136311594053;
    point(2)=-0.339981043584856;
    point(3)=-point1(2);
    point(4)=-point1(1);
    weight(1)=0.347854845137454;
    weight(2)=0.652145154862546;
    weight(3)=weight1(2);
    weight(4)=weight1(1);
elseif n==5 % quy tac 5 diem
    point(1)=-0.906179845938664;
    point(2)=-0.538469310105683;
    point(3)=0.0;
    point(4)=-point1(2);
    point(5)=-point1(1);
    weight(1)=0.236926885056189;
    weight(2)=0.478628670499366;
    weight(3)=0.568888888888889;
    weight(4)=weight1(2);
    weight(5)=weight1(1);
end
end
function [point,weight]=gaussqd2(nx,ny)
% Mục đích
% xác định điểm cầu phương và trọng lượng
% của quy tắc cầu phương Gauss 2-chiều
% Cu pháp:
% [point,weight]=gaussqd2(nx,ny)
% Mô tả biến:
% nx - số điểm cầu phương trên trục x
% ny - số điểm cầu phương trên trục y
% point - vectơ chứa các điểm cầu phương
% weight - vectơ chứa các trọng lượng
%
% xác định giá trị lớn nhất của nx, ny
%
if nx > ny
    n=nx;
    point=zeros(n,1);
else
    n=ny;

```

```
end
%
% khoi tao
%
point=zeros(n,2);
weight=zeros(n,2);
%
% diem cau phuong va trong luong tuong ung
%
[pointx,weightx]=gaussqd1(nx);
[pointy,weighty]=gaussqd1(ny);
%
for intx=1:nx
    point(intx,1)=pointx(intx);
    weight(intx,2)=weightx(intx);
end
%
for inty=1:ny
    point(inty,2)=pointy(inty);
    weight(inty,2)=weighty(inty);
end
end
```

cuu duong than cong . com

## Phụ lục D

### Các nhà toán học

**Walther Ritz**<sup>1</sup> (1878-1909) sinh ở Switzerland, con trai của họa sĩ Raphael Ritz. Ông theo học tại Zurich, Switzerland, và Göttingen, Germany, ở đó ông nhận học vị tiến sĩ vào năm 1902. Sau đó, ông làm việc tại Leyden, Paris, và Tübingen. Năm 1908, ông trở lại Göttingen và mất đột ngột ở đó.



Fig 1: Walther Ritz (1878-1909).

Ông nổi tiếng với công trình làm chung với Johannes Rydberg về Nguyên lý tổ hợp Rydberg-Ritz (Rydberg-Ritz combination principle). Ritz cũng còn

---

<sup>1</sup>Tất cả hình ảnh xuất hiện trong phụ lục này được lấy từ <http://en.wikipedia.org/wiki/>.



được biết đến với phương pháp biến phân mang tên ông, phương pháp Ritz. **Boris Grigorievich Galerkin** (1871-1945) là kỹ sư người Nga, tốt nghiệp Học viện kỹ thuật Petersburg. Ông giảng dạy tại nhiều đại học ở vùng St. Petersburg, gồm Đại học Tổng hợp Leningrad, ở đó ông trở thành trưởng khoa khoa kỹ thuật kết cấu. Ông đóng góp vào nhiều vấn đề khó, chẳng hạn độ cong của tấm mỏng. Lời giải xấp xỉ của ông cho các phương trình vi phân ngày nay được dùng để giải nhiều bài toán cơ học áp dụng.



Fig 2: Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945).

**Georgii Ivanovich Petrov** sinh năm 1912 tại Pinega (vùng Arkkangel'sk), nơi cha mẹ ông bị lưu đày. Ngay sau tháng 10 năm 1917 gia đình ông trở về quê cha ở tỉnh Ivanovo, tại đây, năm 16 tuổi ông đi làm ở xưởng dệt. Năm 1930 ông thực hiện được ước mơ của mình là vào Đại học Tổng hợp Moscow. Năm 1935 ông tốt nghiệp khoa cơ học thủy khí, nơi mà sau này ông làm trưởng khoa thay thế viện sĩ V.V. Golubev qua đời. Khi còn là sinh viên năm thứ tư, Petrov đã bắt đầu hoạt động khoa học tại Viện nghiên cứu động lực thủy khí trung ương (TsAGI). Sự gặp gỡ, học tập, trao đổi với các nhà khoa học già (V.P. Vetchinkin, V.B. Golubev, L.S. Leibenzon, và A.I. Nekrasov), trẻ (như M.B. Keldysh, N.E. Kochin, M.A. Lavrentev, L.I. Sedov, L.N. Sretenskii, ...) ở viện này giúp ông nhanh chóng trở thành nhà khoa học xuất sắc. Thời gian này ngành hàng không Nga khuếch trương mạnh mẽ và Georgii Ivanovich bị cuốn hút vào các bài toán lý thuyết cũng như ứng dụng của hoạt động này. Trong những năm trước chiến tranh thành tựu khoa học xuất sắc của Petrov là tổng quát hóa và chính xác hóa toán học khả năng áp dụng phương pháp Bubnov-Galerkin vào các hệ không bảo toàn mà các giá trị riêng của chúng không có các tính chất cực trị. Ông đã đi đầu áp

dụng phương pháp này để nghiên cứu tính ổn định của các dòng chảy nhớt không nén được. Phương pháp này, gọi là phương pháp Galerkin-Petrov, là một trong các phương pháp hiệu quả và hứa hẹn trong lý thuyết ổn định khí động và các bài toán quan trọng khác của cơ học, vật lý, thiên văn.

**Sergei Lvovich Sobolev** (1908-1989) là nhà toán học Liên xô chuyên về giải tích toán học và phương trình đạo hàm riêng. Ông sinh tại St. Petersburg, và chết ở Moscow.



Fig 3: Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989).

**Henri Léon Lebesgue** (1875-1941) là nhà toán học người Pháp nổi tiếng với lý thuyết tích phân mang tên ông.

**Stefan Banach** (1892-1945) là nhà toán học người Ba lan sống tại vùng đất bị Liên xô chiếm đóng. Ông được xem là một trong số các nhà toán học có ảnh hưởng quan trọng đến sự phát triển toán học trong thế kỷ 20. Tuy chỉ là một người tự học toán, nhưng Banach đã sáng lập giải tích hàm hiện đại. Các khái niệm toán học mang tên ông: nghịch lý Banach-Tarski, định lý Hahn-Banach, định lý Banach-Steinhaus, trò chơi Banach-Mazur, và không gian Banach.

**Otto Ludwig Hölder** (1859-1937) là nhà toán học người Đức. Ông từng theo học với Leopold Kronecker, Karl Weierstraß, và Ernst Kummer. Các khái niệm và kết quả mang tên ông: bất đẳng thức Hölder, điều kiện Hölder, định lý Jordan-Hölder, và định lý Hölder.



Fig 4: Henri Léon Lebesgue (1875-1941).

**Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) sinh vào thời kỳ chính biến trong lịch sử nước Pháp. Augustin-Louis Cauchy được dành để khởi đầu một cuộc cách mạng của riêng ông - trong toán học. Với nhiều đóng góp nền tảng, nhưng đặc biệt với những nỗ lực của ông trong việc làm rõ sự khó hiểu của toán học và không ngừng đòi hỏi các định nghĩa phù hợp và chứng minh chặt chẽ các định lý, Cauchy thường được gọi là "cha đẻ của giải tích hiện đại". Một người viết nhiều, Cauchy viết khoảng 800 bài báo về thiên văn học, vật lý học và toán học. Ông là người phát triển khái niệm hội tụ của chuỗi và lý thuyết hàm một biến phức. Cùng một trí tuệ luôn luôn rộng mở đón nhận và tìm tòi trong khoa học và toán học lại hẹp hòi và mù quáng trong các lãnh vực khác. Trục tính và ngạo mạn, Cauchy sôi nổi về chính trị và các vấn đề tôn giáo. Ông giữ nguyên các quan điểm về các vấn đề này làm nhiều cộng sự ghét bỏ.

**Karl Hermann Amandus Schwarz** (1843-1921) là nhà toán học người Đức nổi tiếng nhờ các công trình về giải tích phức. Ông sinh ra ở Hermsdorf, Silesia (thuộc Ba lan) và qua đời tại Berlin. Ông cưới Marie Kummer con gái của nhà toán học Ernst Eduard Kummer. Họ có với nhau 6 người con. Schwarz ban đầu học hóa nhưng Kummer and Weierstraß thuyết phục ông chuyển sang học toán. Ông chuyên về lý thuyết hàm, hình học vi phân và phép tính biến phân. Các nhà toán học nổi tiếng Lipót Féjer, Paul Koebe và Ernst Zermelo là học trò ông.



Fig 5: Stefan Banach (1892-1945).

**Hermann Minkowski** (1864-1909) là toán học Đức gốc Litva. Ông là người sáng tạo và phát triển hình học các số và đã dùng các phương pháp hình học để giải các bài toán khó trong lý thuyết số, vật lý toán, và lý thuyết tương đối.

**Leonhard Euler** (1707-1783) là người có trí nhớ phi thường và khả năng tập trung kỳ lạ, Euler quan tâm về mọi thứ; ông là nhà thần học, vật lý học, thiên văn học, ngôn ngữ học, sinh lý học, nghiên cứu kinh điển, và trước hết là nhà toán học. Euler được xem là một thí dụ về vị thần đích thực của thời đại. Về toán học ông có những đóng góp tồn tại bền vững cho đại số, lượng giác, hình học giải tích, phép tính vi tích phân, phép tính biến phân, phương trình vi phân, biến phức, lý thuyết số và tôpô (vị tướng học). Khối lượng đồ sộ các công trình về toán của ông hầu như không bị ảnh hưởng bởi sự quấy rầy của 13 đứa con hay việc ông bị mù hoàn toàn trong 17 năm cuối đời. Euler viết trên 700 bài báo và 32 cuốn sách về toán và là cha đẻ của nhiều ký hiệu (như  $e$ ,  $\pi$  và  $i = \sqrt{-1}$ ) và các ký hiệu vẫn còn dùng hiện nay (như  $f(x)$ ,  $\sum$ ,  $\sin x$  và  $\cos x$ ). Euler sinh tại Basel, Switzerland, ngày 15 tháng Tư năm 1707, và chết đột ngột ở St. Petersburg ngày 18 tháng Chín năm 1783, khi đang chầu nữ hoàng Nga Catherine vĩ đại.

**Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) là một nhà toán học và thiên văn học, sinh ra tại Turin, Piedmont, một phần đời sống ở Phổ và một phần ở Pháp. Ông có nhiều đóng góp có ý nghĩa cho tất cả các lĩnh vực của giải tích, lý



Fig 6: Otto Ludwig Hölder (1859-1937).

thuyết số, cơ học cổ điển và cơ học thiên thể. Ông được chôn cất tại Panthéon và tên ông được khắc ghi trên tháp Eiffel.

**Paul Adrien Maurice Dirac** (1902-1984) là một nhà vật lý lý thuyết người Anh có những đóng góp cơ bản cho sự phát triển ban đầu của cơ học lượng tử và điện động lực học lượng tử. Trong số những khám phá khác, ông đã xây dựng phương trình Dirac, trong đó mô tả hành vi của các fermion, và dự đoán sự tồn tại của phản vật chất. Năm 1933, cùng với Erwin Schrödinger, ông nhận giải Nobel về vật lý nhờ các khám phá về các dạng sản sinh mới của lý thuyết nguyên tử.



Fig 7: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).



Fig 8: Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).



Fig 9: Hermann Minkowski (1864-1909).



Fig 10: Leonhard Euler (1707-1783).



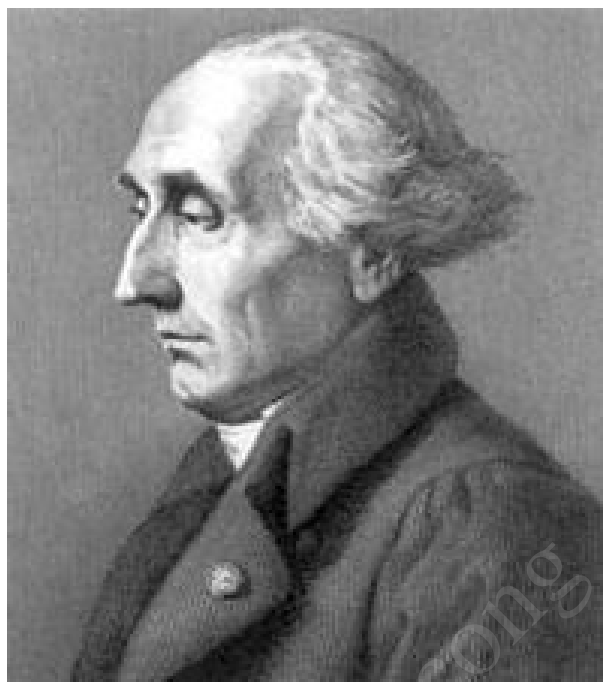


Fig 11: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).



Fig 12: Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).



cuu duong than cong . com

# Tài liệu tham khảo

- [1] Ainsworth, M. and Oden, J.T., *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, New York: John Wiley (2000).
- [2] J. E. Akin, *Finite Element Analysis with Error Estimators - An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students*, Elsevier, Butterworth, Heinemann, 2005.
- [3] Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong, *Nhập môn cơ học*, NXB Đại học Quốc gia TP HCM, 2003.
- [4] Bathe K-J., *Finite element procedures*, Prentice-Hall International, Inc., 1996.
- [5] Becker E.B., Carey G.F., Oden J.T., *Finite elements - An introduction*, Vol. 1, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1981.
- [6] Susanne C. Brenner L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Third Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
- [7] Đào Huy Bích, *Lý thuyết đàn hồi*, NXB Đại học & Trung học Chuyên nghiệp, Hà nội, 1979.
- [8] Brauchli, H.J. and Oden, J.T., *On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Applications*, Int. J.N um. Meth. Eng., 3,p p. 317-325 (1971).
- [9] Dhatt G., Touzot G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. Éditeur, Paris, 1984.
- [10] Flaherty J.E., *Finite Element Analysis*, Lecture Notes, Spring 2000.
- [11] Hou-Cheng-Huang, *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells*

- [12] Hughes T.J.R., *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [13] Claes Johnson, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Dover Publications, Incorporated, 2009.
- [14] Oden, J.T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, New York: McGraw-Hill (1972).
- [15] Rao S.S., *The finite element method in engineering*, Pergamon Press, 1989.
- [16] Pavel Šolín, Karel Segeth, Ivo Doležel, *Higher-Order Finite Element Methods*, CHAPMAN & HALL/CRC, 2004.
- [17] Strang G., Fix G.J., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [18] Zhu, J.Z. and Zienkiewicz, O.C., *Superconvergence Recovery Techniques and AP osteriori Error Estimators*, Int. J.Num. Meth. Eng., 30,p p. 1321-1339 (1990).
- [19] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., *The finite element method in structural and continuum mechanics*, McGraw-Hill, London, 1967.
- [20] Zienkiewicz, O.C. and Morgan, K., *Finite Elements and Approximation*, Chichester: John Wiley (1983).
- [21] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., *Superconvergent Patch Recovery Techniques and Adaptive Finite Element Refinement*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 101, pp. 207-224 (1992).
- [22] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., *The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity*, Int. J.Num. Meth. Eng., 33,p p. 1365-1382 (1992).

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Nhập môn</b>	<b>1</b>
1.1	Dẫn nhập	1
1.2	Phép tính biến phân	2
1.3	Các phương pháp số	4
1.3.1	Phương pháp Ritz	4
1.3.2	Phương pháp dư số có trọng	5
1.3.3	Phương pháp bình phương tối thiểu	6
1.3.4	Phương pháp đồng vị	6
1.3.5	Thí dụ minh họa	6
1.4	Áp dụng của phương pháp PTHH	15
1.4.1	Tổng quan	15
1.4.2	Một số bài toán cơ học và vật lý	16
	Bài tập chương 1	17
<b>2</b>	<b>Lý thuyết cơ bản</b>	<b>21</b>
2.1	PTHH như là phương pháp xấp xỉ hàm	21
2.1.1	Phép phân hoạch PTHH	21
2.1.2	Các loại phần tử hữu hạn	22
2.1.3	Phần tử tam giác	23
2.1.4	Xấp xỉ hàm trên phần tử hữu hạn	31
2.1.5	Sai số của xấp xỉ PTHH trên một phần tử	36
2.1.6	Đạo hàm và tích phân theo tọa độ tham chiếu	38
2.2	Các bước thiết lập mô hình PTHH	40
2.2.1	Phân tích ứng suất của thanh nhiều nấc	41
2.2.2	Lập trình tính toán PTHH	48
2.2.3	Một cách tiếp cận khác	53
	Bài tập chương 2	55
<b>3</b>	<b>PTHH cho phương trình đạo hàm riêng</b>	<b>59</b>
3.1	Phương trình elliptic	59

3.1.1	Bài toán 1-chiều . . . . .	59
3.1.2	Bài toán 2-chiều . . . . .	70
3.2	Bài toán phụ thuộc thời gian . . . . .	95
3.2.1	Phương trình parabolic . . . . .	95
3.2.2	Phương trình Hyperbolic . . . . .	102
	Bài tập chương 3 . . . . .	102
<b>4</b>	<b>PTHH trong lý thuyết đàn hồi</b>	<b>109</b>
4.1	Tóm tắt về lý thuyết đàn hồi . . . . .	111
4.1.1	Bài toán biên của lý thuyết đàn hồi (dạng mạnh) . . . . .	113
4.1.2	Cách phát biểu yếu . . . . .	114
4.1.3	Cách phát biểu biến phân . . . . .	115
4.2	Phân tích kết cấu dàn không gian . . . . .	115
4.2.1	Phần tử thanh . . . . .	115
4.2.2	Áp dụng . . . . .	119
	Bài tập chương 4 . . . . .	123
	<b>Bài đọc thêm</b>	<b>127</b>
1	Abstract formulation of the finite element method for elliptic problems . . . . .	127
1.1	Introduction . . . . .	127
1.2	Discretization. An error estimate . . . . .	129
1.3	The energy norm . . . . .	132
2	Approximation theory for FEM. Error estimates for elliptic problems . . . . .	132
2.1	Interpolation with piecewise linear functions in two dimensions . . . . .	133
2.2	Interpolation with polynomials of higher degree . . . . .	139
2.3	Error estimates for FEM for elliptic problems . . . . .	140
	<b>Các đề tài nghiên cứu</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Không gian Sobolev</b>	<b>143</b>
1	Không gian Lebesgue . . . . .	143
2	Đạo hàm suy rộng (đạo hàm yếu) . . . . .	144
3	Không gian Sobolev . . . . .	144
<b>B</b>	<b>Bài toán biến phân tuyến tính</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Cầu phương Gauss</b>	<b>149</b>
1	Cầu phương 1-chiều . . . . .	149
2	Cầu phương 2-chiều . . . . .	150

MỤC LỤC	169
3 Lập trình Matlab	151
<b>D Các nhà toán học</b>	<b>155</b>
Tài liệu tham khảo	160
Mục lục	169