

BÀI TẬP MỞ (3)

Deadline nộp bài: 03-10-2018

Bài tập 1. Cho $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Chứng minh rằng hàm $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lồi.

Bài tập 2. Giả sử C là tập lồi, đóng khác rỗng trong \mathbb{R}^n . Cho trước $x \in C$. Đặt:

$$C_\infty(x) = \{d \in \mathbb{R}^n | x_o + td \in C, \forall t > 0\}$$

Chứng minh rằng: $C_\infty(x)$ là nón lồi đóng và chứa 0.

Bài tập 3. Dùng tính chất của hàm lồi, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}, \forall x_1, x_2 \geq 0$

b. $\frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2},$ với $b_1, b_2 > 0$.

Gợi ý bài tập 3: Mỗi câu hãy chọn hàm số thích hợp ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

- Dùng tính chất đạo hàm cấp 2 chứng minh f là hàm lồi.
- Chọn λ thích hợp, áp dụng vào công thức dạng $(\dots \leq \dots)$ để suy ra điều phải chứng minh.