

BÀI TẬP MÔN LÝ THUYẾT QUY HOẠCH PHI TUYẾN

Bài tập 1. Hàm $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là thuần nhất dương nếu:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0: f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Chứng minh rằng hàm thuần nhất dương f là lồi khi và chỉ khi:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 2. Cho A_1 và A_2 là hai tập lồi trong \mathbb{R}^n . Các khẳng định sau là đúng hay sai:

a. $A_1 \cap A_2$ là tập lồi.

b. $A_1 \cup A_2$ là tập lồi.

Bài tập 3. Cho f_1, \dots, f_n là các hàm lồi. Chứng minh rằng: $g(x) := \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x)$ là hàm lồi.

Bài tập 4. Cho $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi và $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu tăng và lồi. Chứng minh rằng hàm hợp $F := (g \circ f)$ là hàm lồi.

Bài tập 5. Cho $f_i(x), i = 1, \dots, m$ là các hàm lồi trên \mathbb{R}^n và $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ là các hằng số cho trước. Chứng minh rằng tập:

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m\}$$

là tập lồi.

Bài tập 6. Bài 2.1, trang 29 cuối chương 2 (Sách: *Introduction to the Theory of Non-linear Optimization [Johannes Jahn]*).

Bài tập 7. Bài 2.2, trang 29 cuối chương 2 (Sách: *Introduction to the Theory of Non-linear Optimization [Johannes Jahn]*).

Bài tập 8. Bài 2.3, trang 29 cuối chương 2 (Sách: *Introduction to the Theory of Non-linear Optimization [Johannes Jahn]*).

Bài tập 9. Xác định tính lồi của các hàm số sau đây:

a. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$

b. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3$

c. $f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 10x_1x_2 + 5x_2x_3$