

Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

1. Khối tâm của hệ chất điểm (*Center of Mass, Center of Gravity*)

- Hệ hai chất điểm m_1, m_2 đặt tại M_1, M_2 sẽ tồn tại một điểm duy nhất

G sao cho:

$$\frac{\overrightarrow{M_1 G}}{\overrightarrow{M_2 G}} = -\frac{m_2}{m_1}$$

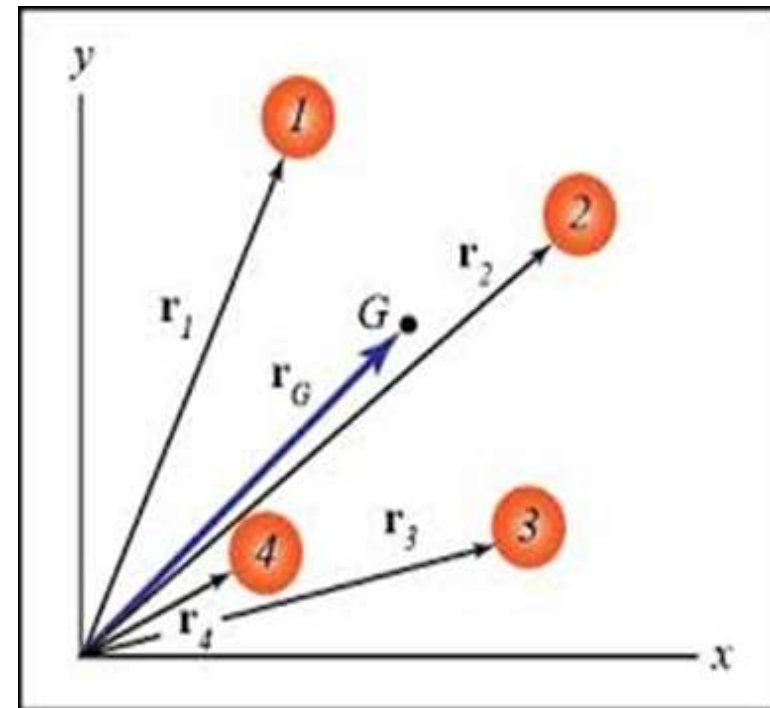
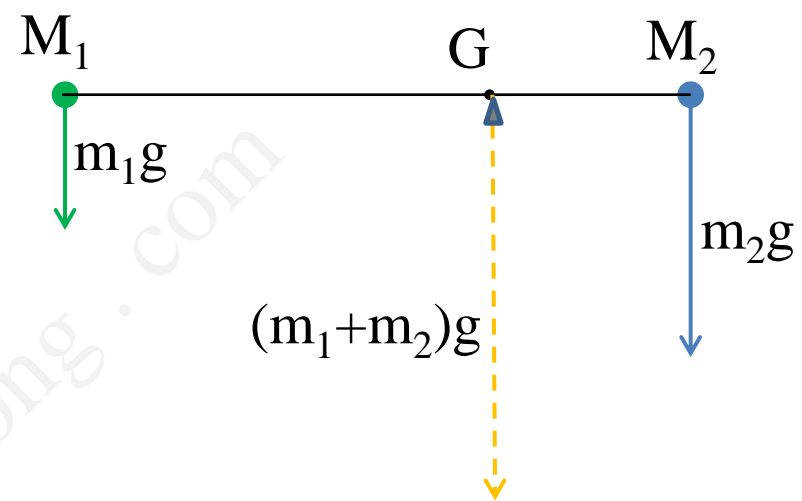
$$\Rightarrow m_1 \overrightarrow{M_1 G} + m_2 \overrightarrow{M_2 G} = 0$$

G được gọi là khối tâm của hệ chất điểm.

- Trường hợp hệ n chất điểm, tồn tại một điểm G sao cho:

$$m_1 \overrightarrow{M_1 G} + m_2 \overrightarrow{M_2 G} + \dots + m_n \overrightarrow{M_n G} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G} = 0$$



Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

1. Khối tâm của hệ chất điểm

+ Vị trí khối tâm G

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_iG}$$

$$\Rightarrow m_i \vec{r}_G = m_i \overrightarrow{OM_i} + m_i \overrightarrow{M_iG}$$

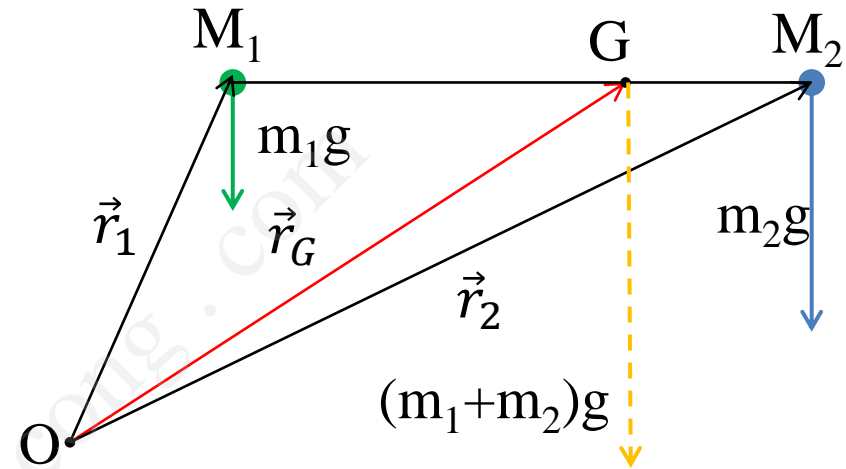
- Lấy tổng n phương trình của hệ:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_G = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_iG} \quad \boxed{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_G \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i} \quad , M = \sum_{i=1}^n m_i$$

- Trường hợp hệ 2 chất điểm M_1 và M_2 :

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$



Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

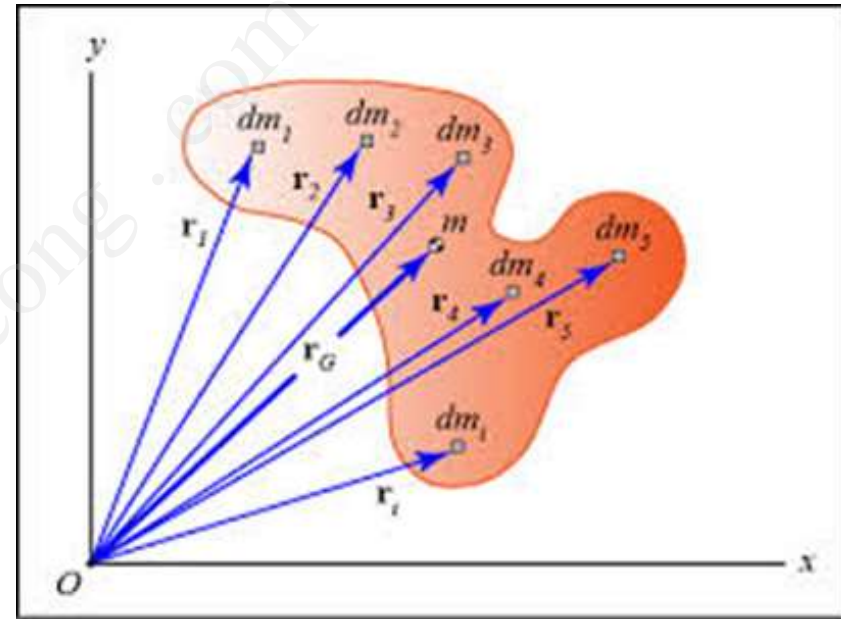
1. Khối tâm của hệ chất điểm

+ Vị trí khối tâm của vật rắn

- Chia vật rắn khối lượng M thành n phần tử đủ nhỏ, sao cho mỗi phần tử được xem là một chất điểm.

$$\vec{r}_G = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$



- Chiếu PT vector \vec{r}_G lên ba trục tọa độ:

$$x_G = \frac{1}{M} \int x \cdot dm ; y_G = \frac{1}{M} \int y \cdot dm ; z_G = \frac{1}{M} \int z \cdot dm$$

Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

1. Khối tâm của hệ chất điểm

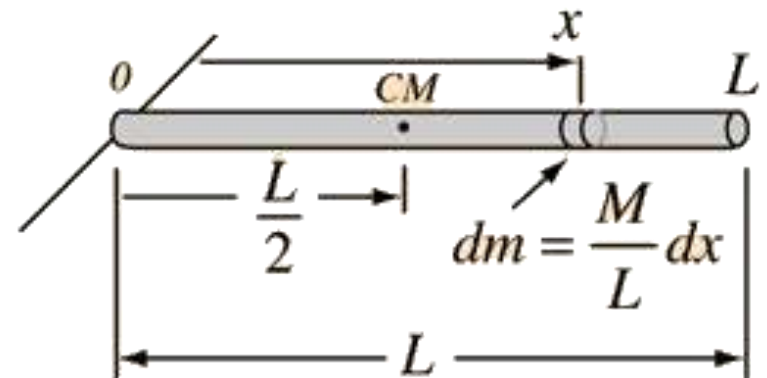
+ Thí dụ một thanh đồng nhất dài L , khối lượng M

Sử dụng trục x // thanh, gốc O trùng với một đầu thanh. Tọa độ khối tâm xác định bởi:

$$x_G = x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \cdot dm$$

Phần tử vi cấp khối lượng dm của thanh dài dx : $dm = \frac{M}{L} dx$

$$x_{cm} = \frac{\int_0^L x \frac{M}{L} dx}{M} = \frac{1}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=L} = \frac{L}{2}$$



Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

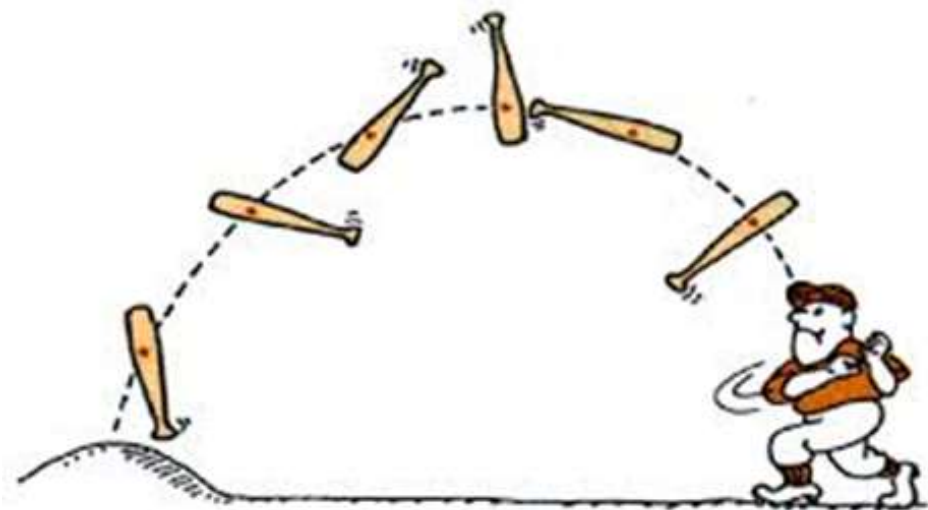
1. Khối tâm của hệ chất điểm

+ Vận tốc khối tâm

$$\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$\boxed{\vec{v}_G = \frac{\vec{P}}{M}} \quad \text{hay} \quad \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_G}$$

Tổng động lượng của hệ bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc của khối tâm.



Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

1. Khối tâm của hệ chất điểm

+ Phương trình chuyển động của khối tâm

$$\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{\vec{F}}{M}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_G}$$

\vec{F} : Tổng ngoại lực tác dụng lên hệ chất điểm

Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cả hệ chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực lên hệ.

+ Bảo toàn động lượng hệ chất điểm

Nếu hệ cô lập hay tổng ngoại lực tác dụng lên hệ bằng 0 thì tổng động lượng của hệ bảo toàn.

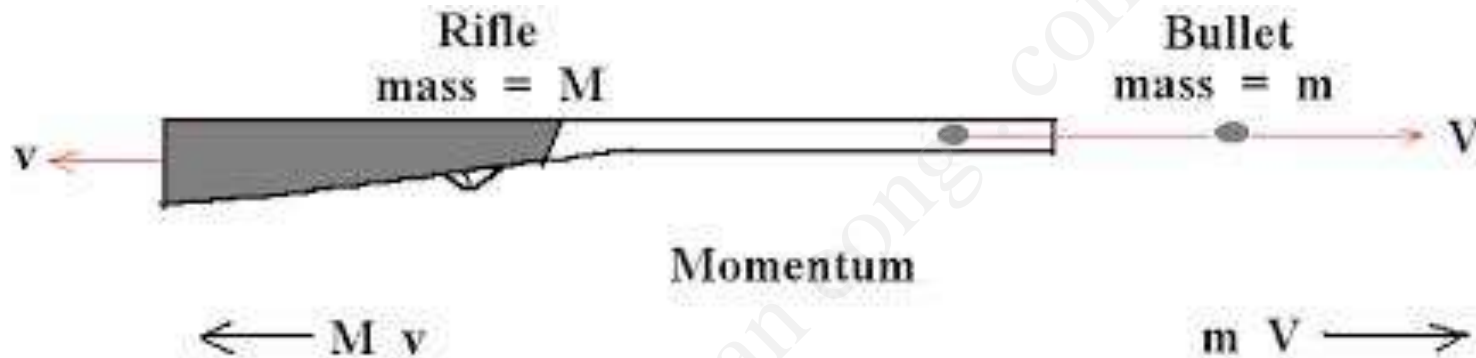
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{\text{const}} \Rightarrow \vec{v}_G = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$\Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow P_x = \text{Const} \Rightarrow v_x = \text{Const}$$

Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

2. Áp dụng bảo toàn động lượng

+ Hiện tượng súng giật lùi



- Động lượng của hệ trước và sau khi bắn không đổi:

$$m\vec{V} + M\vec{v} = 0$$

- Vận tốc giật lùi của súng: $\vec{v} = -\frac{m\vec{V}}{M}$
- Khối lượng m và vận tốc viên đạn lớn thì vận tốc giật lùi lớn.
- Khối lượng M của súng càng lớn thì vận tốc giật lùi càng nhỏ.

Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

2. Áp dụng bảo toàn động lượng

+ Tính vận tốc của tên lửa

Tên lửa khối lượng M chuyển động với vận tốc \vec{v} , phụt khí với vận tốc \vec{u} (đ/v tên lửa), là $(\vec{u} + \vec{v})$ đ/v mặt đất. Sau khi phụt khí dM (<0), tên lửa có khối lượng là $M+dM$ và vận tốc là $(\vec{v} + d\vec{v})$. **Xét chuyển động ngoài trọng trường.**

Áp dụng bảo toàn động lượng:

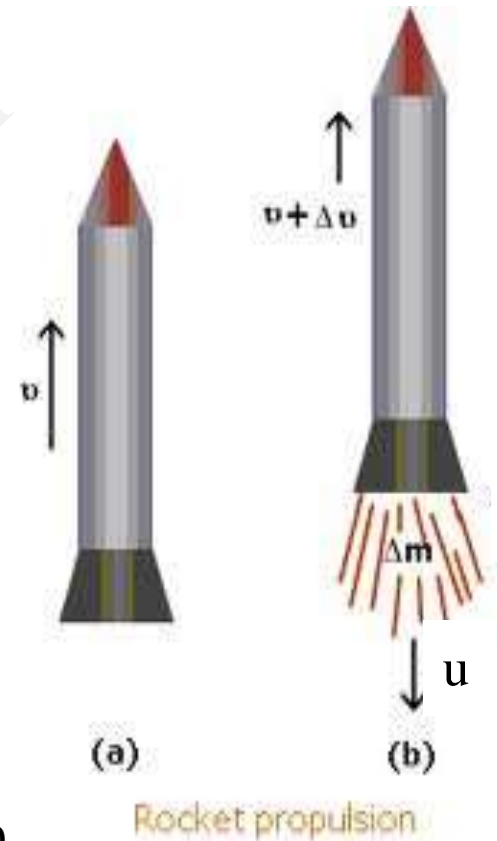
$$-dM(\vec{u} + \vec{v}) + (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) = M\vec{v}$$

$$\Rightarrow M d\vec{v} = \vec{u} \cdot dM \quad \Rightarrow M dv = -u \cdot dM$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v dv = -u \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \quad \Rightarrow v = v_0 + u \cdot \ln \frac{M_0}{M}$$

Nếu chuyển động trong trọng trường g : $d\vec{P} = M\vec{g} \cdot dt$

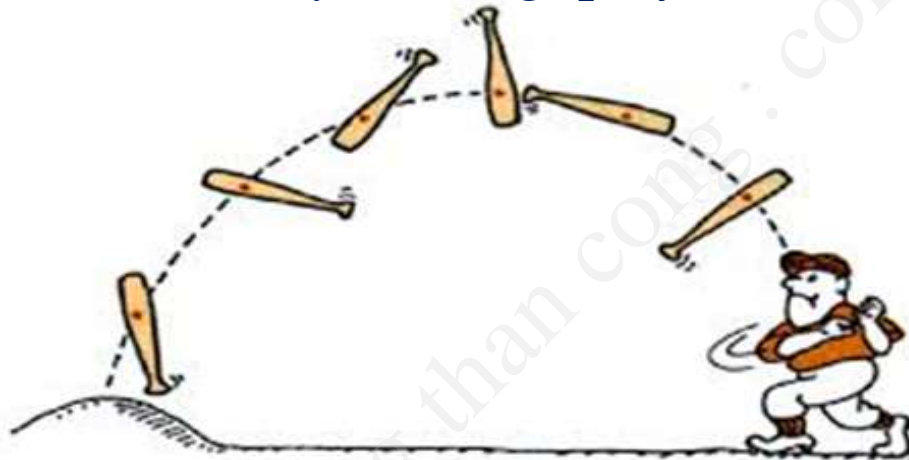
$$\Rightarrow v = v_0 + u \cdot \ln \frac{M_0}{M} - gt$$



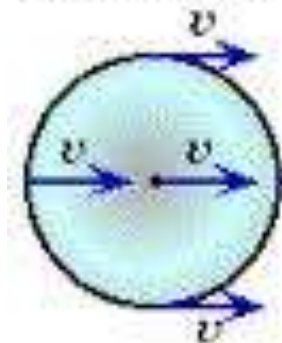
Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

3. Phương trình chuyển động cơ bản của vật rắn

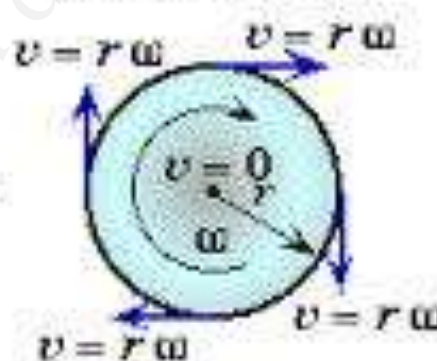
Chuyển động bất kỳ của vật rắn là tổng hợp của chuyển động tịnh tiến (Translation) và chuyển động quay (Rotation).



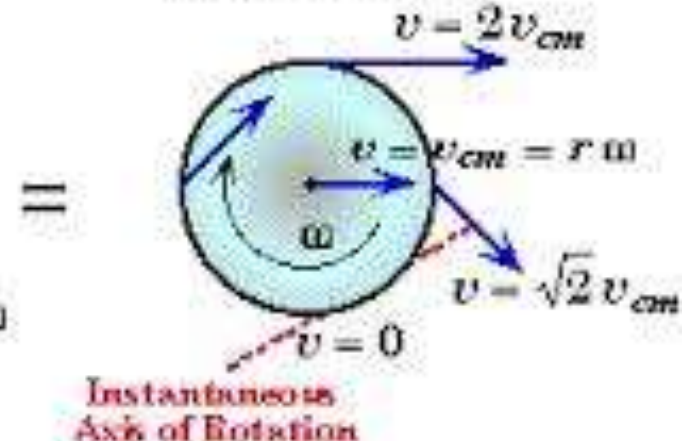
Translational Motion Only



Rotational about Center of Mass



Rolling Without Slipping



Instantaneous Axis of Rotation

Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

3. Phương trình chuyển động cơ bản của vật rắn (tt) + Phương trình chuyển động tịnh tiến của khối tâm

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{i(\text{ngoại})} = M\vec{a}_G$$

+ Chuyển động quay quanh trục

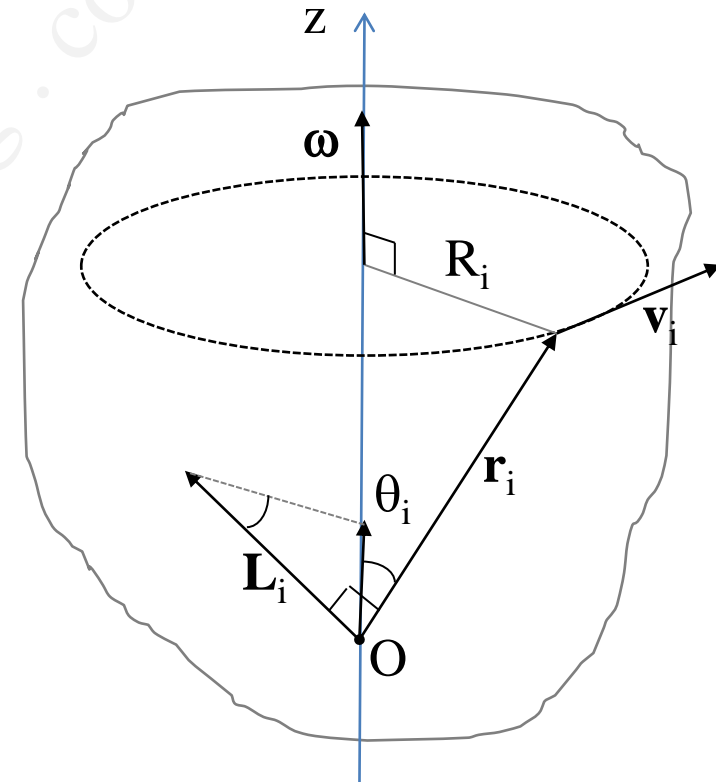
Vật rắn quay quanh trục z với vận tốc góc ω . Mỗi chất điểm có vận tốc v_i vạch nên quỹ đạo tròn bán kính R_i , có tâm trên trục quay z .

- Vận tốc chất điểm i : $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

Độ lớn vận tốc chất điểm i : $v_i = \omega R_i$

- Momen động lượng của chất điểm i đối với điểm O :

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$



Động lực học Hệ chất điểm – Vật rắn

3. Phương trình chuyển động cơ bản của vật rắn (tt)

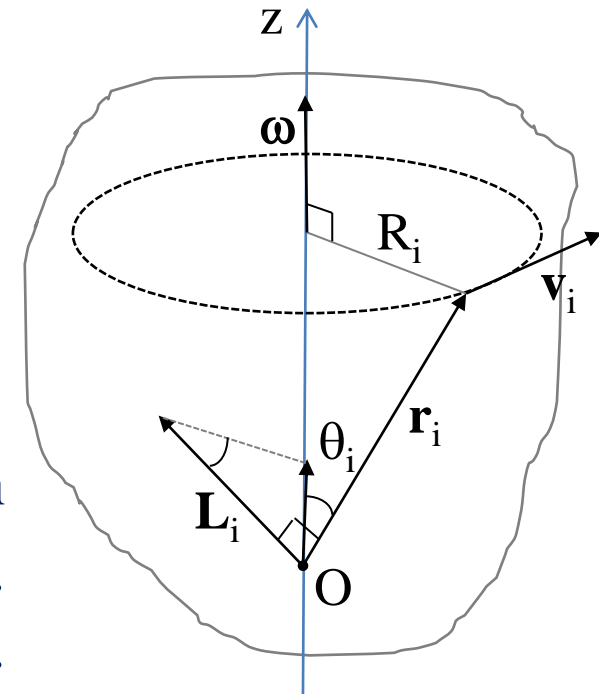
- Hình chiếu momen động lượng của chất điểm i lên trục z :

$$L_{iz} = m_i r_i v_i \cdot \sin \theta_i = m_i (r_i \sin \theta_i) (\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = I \omega$$

$$I = \sum_i m_i R_i^2 : \text{Momen quán tính của vật rắn đối với trục quay}$$

- Nếu trục quay là trục chính, vector momen động lượng \vec{L} có phương // với trục quay \vec{z} . Một vật rắn có ít nhất 3 trục chính \perp nhau. Khi đó: $\vec{L} = I \vec{\omega}$



4. Momen quán tính của vật rắn

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i I_i = \int R^2 dm$$

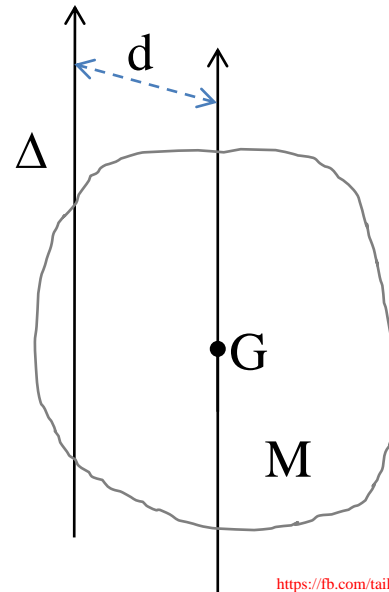
- Vật rắn có dạng thanh dài: $dm = (m/L)dx = \lambda \cdot dx$ $I = \int \lambda x^2 dx$

- Vật rắn có dạng bản mỏng: $dm = (m/S)dS = \sigma \cdot dS$ $I = \int \sigma r^2 dS$

- Vật rắn có dạng khối: $dm = (m/V)dV = \rho \cdot dV$ $I = \int \rho r^2 dV$

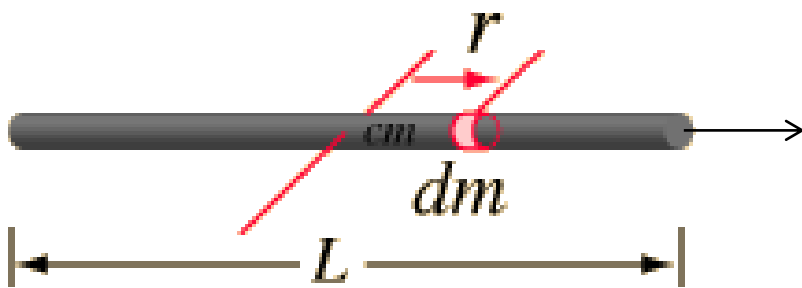
- Công thức Steiner - Huygens

$$I_{\Delta} = I_G + Md^2$$



4. Momen quán tính của vật rắn (tt)

+ Thí dụ tính momen quán tính của thanh đồng nhất đối với trục quay vuông góc với thanh



$$I = \int R^2 dm$$

Chọn trục x // thanh, gốc O tại trục quay.

Thay $R = x$ và $dm = \frac{m}{L} dx$

- Đối với trục quay qua khối tâm:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{m}{3} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} mL^2$$

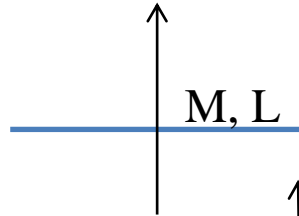
- Đối với trục quay qua một đầu thanh:

$$I = \int_0^L \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{1}{3} mL^2$$

4. Momen quán tính của vật rắn (tt)

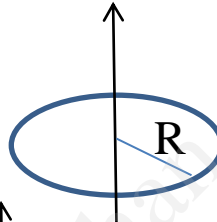
+ Momen quán tính của một vài vật rắn đồng nhất có dạng hình học đối xứng:

- Thanh thẳng:



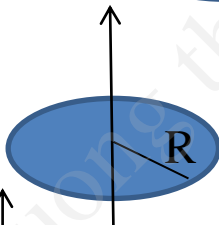
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

- Vòng tròn, trụ rỗng:



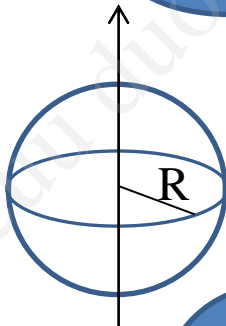
$$I = MR^2$$

- Đĩa tròn, trụ đặc:



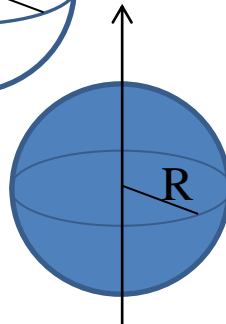
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

- Mặt cầu rỗng:



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

- Quả cầu đặc:



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

5. Phương trình chuyển động quay của vật rắn

Momen lực \vec{M} và momen động lượng \vec{L} đối với một điểm O hay khối tâm trong một hệ qui chiếu quán tính:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

- Phương trình chuyển động quay của vật rắn: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

- Vật rắn quay quanh trục chính: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

$\Rightarrow I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$ hay $I\beta = M$ ($I = \text{const}$: Trục quay cố định đ/v VR)

Khi tổng momen lực tác dụng lên vật rắn quay quanh trục chính bằng 0 thì vật rắn quay với vận tốc góc không đổi.

- Khi trục quay z không là trục chính: $\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = M_z$

Nếu $M_z = 0$ thì $\omega = \text{const}$