


Chương 3

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

lvluuyen@hcmus.edu.vn

 bit.do/toantohop

FB: <http://bit.do/fbtoantohop>

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

— — — Tháng 9 năm 2017 — — —

Chương 3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

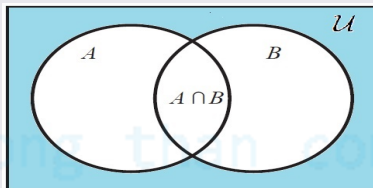
1. Phương pháp sơ đồ Ven

2. Nguyên lý bù trừ

3. Đa thức quân xe

3.1. Phương pháp sơ đồ Ven

Nhận xét. Xét sơ đồ Ven



Ta ký hiệu

- \mathcal{U} là tập vũ trụ
- \bar{A} là phần bù của A trong \mathcal{U}
- $N(A)$ là số phần tử của A.
- $N = N(\mathcal{U})$

Khi đó

$$N(\bar{A} \cap \bar{B}) = N - N(A) - N(B) + N(A \cap B) \quad (1)$$

Ví dụ. Một trường học có 100 sinh viên, trong đó có 50 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi trường có bao nhiêu sinh viên không học tiếng Anh lẫn không học tiếng Pháp?

Giải. Gọi là \mathcal{U} là tập hợp sinh viên của trường. Gọi A là tập hợp sinh viên học tiếng Anh và P là tập hợp sinh viên học tiếng Pháp. Ta có

$$N = N(\mathcal{U}) = 100, N(A) = 50, N(P) = 40 \text{ và } N(A \cap P) = 20.$$

Theo yêu cầu bài toán ta cần tính $N(\overline{A} \cap \overline{P})$. Ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A} \cap \overline{P}) &= N - N(A) - N(P) + N(A \cap P) \\ &= 100 - 50 - 40 + 20 = 30. \end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \dots, 9$ sao cho chữ số đầu lớn hơn 1 và chữ số cuối nhỏ hơn 8?

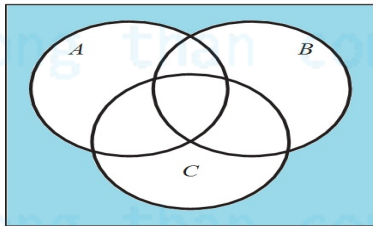
Giải. Gọi \mathcal{U} là tập tất cả các hoán vị của $0, 1, 2, \dots, 9$; A là tập tất cả các hoán vị với chữ số đầu là 0 hoặc 1 và B là tập tất cả các hoán vị với chữ số cuối là 8 hoặc 9. Khi đó yêu cầu của bài toán là tính $N(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ta có $N = 10!$, $N(A) = 2 \times 9!$, $N(B) = 2 \times 9!$, $N(A \cap B) = 2 \times 2 \times 8!$.

Áp dụng công thức (1) ta được

$$\begin{aligned} N(\overline{A \cap B}) &= N - N(A) - N(B) + N(A \cap B) \\ &= 10! - (2 \times 9!) - (2 \times 9!) + (2 \times 2 \times 8!) = 2338560. \end{aligned}$$

Câu hỏi. Hãy mở rộng công thức (1) cho trường hợp 3 tập hợp.



Đáp án. Công thức là

$$\begin{aligned} N(\overline{A \cap B \cap C}) &= N - N(A) - N(B) - N(C) \\ &\quad + N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C) \\ &\quad - N(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (2)$$

Đối với trường hợp 3 tập hợp là A_1, A_2, A_3 , ta có thể viết công thức (2) như sau:

$$N(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = N - \sum_i N(A_i) + \sum_{i \neq j} N(A_i \cap A_j) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Ví dụ. Một trường có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp, 40 sinh viên học tiếng Đức, mỗi cặp ngôn ngữ có 20 sinh viên học và có 10 sinh viên học cả 3 ngôn ngữ. Hỏi trường có bao nhiêu sinh viên không học cả 3 tiếng Anh, Pháp và Đức?

Giải. Gọi \mathcal{U} là tập hợp sinh viên của trường. Gọi A là tập hợp sinh viên học tiếng Anh, P là tập hợp sinh viên học tiếng Pháp và D là tập hợp sinh viên học tiếng Đức. Khi đó $N = 100$,

- $N(A) = N(P) = N(D) = 40$,
- $N(A \cap P) = N(P \cap D) = N(A \cap D) = 20$,
- $N(A \cap P \cap D) = 10$.

Theo công thức (2) ta được

$$N(\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{D}) = 100 - (40 + 40 + 40) + (20 + 20 + 20) - 10 = 30.$$

Nhận xét. Số các số nguyên dương $\leq n$ mà chia hết cho k là phần nguyên $[n/k]$.

Ví dụ. Có bao nhiêu số nguyên dương ≤ 1000 mà nguyên tố cùng nhau với 70?

Giải. Gọi \mathcal{U} là tập hợp các số nguyên dương ≤ 1000 . Ta có ước nguyên tố của 70 là 2, 5 và 7. Do đó muốn đếm các số nguyên tố cùng nhau với 70 ta cần đếm những số không chia hết cho 2, 5 và 7.

Gọi A_1, A_2 và A_3 lần lượt là tập các số nguyên trong \mathcal{U} chia hết cho 2, 5 và 7. Khi đó đáp án cần tìm của bài toán là $N(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$. Ta có

$$N = 1000, \quad N(A_1) = [1000/2] = 500,$$

$$N(A_2) = [1000/5] = 200, \quad N(A_3) = [1000/7] = 142$$

Ta có một số chia hết cho 2 và 5 khi và chỉ khi số đó chia hết cho 10. Do đó $N(A_1 \cap A_2) = [1000/10] = 100$.

Tương tự ta có,

$$N(A_1 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{2 \times 7} \right\rfloor = 71, N(A_2 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{5 \times 7} \right\rfloor = 28.$$

$$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left\lfloor \frac{1000}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 14.$$

Áp dụng công thức (2) ta được

$$\begin{aligned} N(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) &= 1000 - (500 + 200 + 142) + (100 + 71 + 28) - 14 \\ &= 343 \end{aligned}$$

Ví dụ. (tự làm) Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 2000 mà nguyên tố cùng nhau với

a) 200

b) 396

3.2. Nguyên lý bù trừ

Trong phần này chúng ta sẽ mở rộng công thức ở phần 1 cho trường hợp n tập hợp A_1, A_2, \dots, A_n . Để đơn giản về mặt ký hiệu ta viết “ \cap ” như là phép nhân. Ví dụ $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ sẽ được viết là $A_1 A_2 A_3$. Bằng việc sử dụng ký hiệu này, ta có số lượng phần tử không thuộc tất cả các tập A_1, A_2, \dots, A_n sẽ được viết là $N(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n})$.

Định lý. Cho tập vũ trụ U có N phần tử và A_1, A_2, \dots, A_n là n tập hợp con của U . Ta đặt S_k là tổng số phần tử của tất cả tập giao của đúng k tập hợp từ các $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$, cụ thể

$$S_1 = \sum_i N(A_i), \quad S_2 = \sum_{i \neq j} N(A_i A_j), \dots, \quad S_n = N(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} N(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) &= N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k \\ &= N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^k S_k + \dots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

Hệ quả. Cho A_1, A_2, \dots, A_n là n tập hợp con của tập vũ trụ U . Khi đó

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{k-1} S_k + \dots + (-1)^{n-1} S_n \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ Định lý trên ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A_1} \dots \overline{A_n}) &= N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^k S_k + \dots + (-1)^n S_n \\ &= N - \left(S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{k-1} S_k + \dots + (-1)^{n-1} S_n \right). \end{aligned}$$

Mặt khác $N(A_1 \cup \dots \cup A_n) = N - N(\overline{A_1} \dots \overline{A_n})$.

Do đó ta có điều phải chứng minh ■

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \quad (*)$$

thỏa điều kiện $x_i \leq 7, \forall i = 1, \dots, 4$.

Giải. Gọi \mathcal{U} là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (*). Ta có

$$N = N(\mathcal{U}) = K_4^{18} = \binom{4+18-1}{18} = 1330.$$

Gọi A_i là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) thỏa tính chất $x_i \geq 8$. Khi đó kết quả của bài toán là $N(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4})$.

Bằng việc giải những bài toán tìm số nghiệm nguyên ta được

$$\begin{aligned} \bullet N(A_i) &= K_4^{10} = \binom{13}{10} & \bullet N(A_i A_j) &= K_4^2 = \binom{5}{2} \\ \bullet N(A_i A_j A_k) &= 0 & \bullet N(A_1 A_2 A_3 A_4) &= 0 \end{aligned}$$

Vì vai trò của các A_i ($1 \leq i \leq 4$) là như nhau nên ta có:

$$\begin{aligned} \bullet S_1 &= \sum_i N(A_i) = 4 \binom{13}{10} = 1144 \\ \bullet S_2 &= \sum_{i \neq j} N(A_i A_j) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} = 60 \\ \bullet S_3 &= 0, \quad S_4 = 0 \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý, ta có

$$\begin{aligned}N(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}) &= N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\&= 1330 - 1144 + 60 - 0 + 0 = 246.\end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách lấy 6 lá bài từ bộ bài 52 lá sao cho

- a) có đầy đủ 4 nước (cơ, rô, chuồn và bích).
- b) ít nhất một nước không có

Giải. Gọi \mathcal{U} là tất cả bộ 6 lá bài được lấy từ bộ bài 52 lá và A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tất cả bộ 6 lá bài mà không có nước cơ, rô, chuồn và bích. Ta có

$$\begin{aligned}\bullet N &= N(\mathcal{U}) = \binom{52}{6} & \bullet N(A_1A_2) &= \binom{26}{6} \\ \bullet N(A_1) &= \binom{39}{6} & \bullet N(A_1A_2A_3) &= \binom{13}{6} \\ & & \bullet N(A_1A_2A_3A_4) &= 0\end{aligned}$$

Vì vai trò A_1, A_2, A_3, A_4 là như nhau nên ta có:

$$\bullet S_1 = 4 \binom{39}{6}$$

$$\bullet S_2 = \binom{4}{2} \binom{26}{6}$$

$$\bullet S_3 = \binom{4}{3} \binom{13}{6}$$

$$\bullet S_4 = 0$$

$$\text{a) } N(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 8682544.$$

$$\text{b) } N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 11675976.$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 5, x_2 \leq 6, x_3 \leq 7$.

Ví dụ. Có bao nhiêu toàn ánh từ tập hợp có 6 phần tử vào tập hợp có 3 phần tử?

Giải. Giả sử tập nguồn là A , tập đích là $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Gọi \mathcal{U} là tập hợp các ánh xạ từ A vào B và P_i là tập hợp các ánh xạ mà có ảnh **không chứa** b_i (với $i = 1, 2, 3$). Khi đó kết quả của bài toán là $N(\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3})$.

Bằng việc giải những bài toán tìm số ánh xạ ta được

- $N = N(\mathcal{U}) = 3^6 = 729$
- $N(P_1) = 2^6 = 36$
- $N(P_1P_2) = 1^6 = 1$
- $N(P_1P_2P_3) = 0$

Vì vai trò của các P_1, P_2, P_3 là như nhau nên ta có:

- $S_1 = \sum_i N(P_i) = 3 \times 36 = 192$
- $S_2 = \sum_{i \neq j} N(P_iP_j) = \binom{3}{2} \times 1 = 3$
- $S_3 = 0$

Áp dụng Định lý, ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3}) &= N - S_1 + S_2 - S_3 \\ &= 729 - 192 + 3 - 0 = 540. \end{aligned}$$

Định lý. Cho tập vũ trụ U có N phần tử và A_1, A_2, \dots, A_n là n tập hợp con của U . Khi đó số phần tử *thuộc đúng m tập hợp*, ký hiệu N_m , là

$$\begin{aligned} N_m &= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} S_{m+i} \\ &= S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n \end{aligned}$$

Nếu ta gọi N_m^* là số phần tử *thuộc ít nhất m tập hợp* thì

$$\begin{aligned} N_m^* &= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i-1}{m-1} S_{m+i} \\ &= S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} S_n. \end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi tam phân (chỉ gồm 0, 1, 2) có độ dài 4

- a) chứa đúng 2 chữ số 1 b) chứa ít nhất 2 chữ số 1

Giải. Gọi \mathcal{U} là tập hợp tất cả những chuỗi tam phân có độ dài 4. Gọi A_i là tập hợp tất cả các chuỗi tam phân có chữ số tại vị trí i là 1. Ta có

$$\begin{aligned} \bullet N &= 3^4 & \bullet S_3 &= \binom{4}{3} 3^1 \\ \bullet S_1 &= \binom{4}{1} 3^3 & \bullet S_4 &= \binom{4}{4} 3^0 \\ \bullet S_2 &= \binom{4}{2} 3^2 \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý trên ta có:

$$\text{a) } N_2 = S_2 - \binom{3}{2} S_3 + \binom{4}{2} S_4 = 24.$$

$$\text{b) } N_2^* = S_2 - \binom{2}{1} S_3 + \binom{3}{1} S_4 = 33.$$

Ví dụ.(tự làm) Có 5 lá thư và 5 phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào phong bì.

- a) Hỏi xác suất để không lá thư nào đúng địa chỉ là bao nhiêu?
- b) Hỏi xác suất để đúng 3 lá thư đúng địa chỉ là bao nhiêu?

Sau đó tổng quát hóa bài toán cho n và $k \leq n$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

3.3. Đa thức quân xe

Giới thiệu. Xe là một quân cờ quan trọng trong cờ tướng cũng như cờ vua, nó có quyền ăn bất cứ quân cờ nào khác màu (của đối phương) ở trên cùng dòng hay cùng cột (không bị cản trở bởi một quân cờ khác). Một số bài toán đếm có thể đưa về dạng tính số cách **đặt k quân xe trên một bàn cờ** sao cho hai quân xe bất kỳ không thể ăn nhau, tức là không có 2 quân xe nào trên cùng một dòng hay một cột.

Định nghĩa. Tập hợp tất các hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ được ký hiệu là S_n . Mỗi hoán vị của $\sigma \in S_n$ được xem như là một song ánh từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào $\{1, 2, \dots, n\}$. Ví dụ, hoán vị $\sigma = 321$ được xem như là song ánh $\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ với $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$.

Nhận xét. Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách đặt n quân xe trên bàn cờ $n \times n$ ở các tọa độ **$(i, \sigma(i))$** (với $1 \leq i \leq n$), hiển nhiên không có 2 quân xe nào ăn nhau.

Ví dụ. Hoán vị hoán vị $\sigma = 4231$ tương đương với cách đặt quân xe

	1	2	3	4
1				●
2		●		
3			●	
4	●			

Định nghĩa. Xét các tập con $X_1, X_2, \dots, X_n \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Ta đặt

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i\}.$$

Tập X_i được gọi là **vị trí cấm** của i , các hoán vị thuộc $P(X_1, \dots, X_n)$ được gọi là **hoán vị với vị trí cấm**.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$?

Phân tích Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

Để giải bài này chúng ta có thể sử dụng nguyên lý bù trừ (hơi phức tạp). Trong phần này chúng ta sẽ dùng phương pháp **đa thức quân xe** để giải những bài toán dạng này.

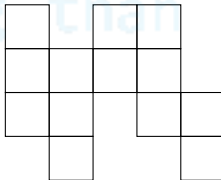
Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Phân tích. Ta biểu diễn 4 người và 5 công việc thành một bàn cờ 4×5 như hình sau.

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	

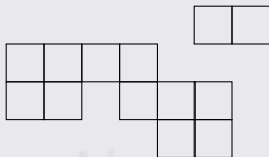
Ta dễ thấy một cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp chính là một cách đặt 4 quân xe vào bàn cờ.

Để đơn giản ta có thể xóa các ô cấm ra khỏi bàn cờ. Như vậy bàn cờ trên sẽ thành



Định nghĩa. Một **bàn cờ** là một tập con của mảng $m \times n$ ô vuông.

Ví dụ. Tập hợp các ô vuông sau là một bàn cờ



Định nghĩa. Cho C là một bàn cờ có m ô vuông và $k \leq m$. Gọi $r_k(C)$ là cách đặt k quân xe lên bàn cờ sao cho 2 quân xe bất kỳ không thể ăn nhau. **Đa thức quân xe** được định nghĩa là

$$R(C, x) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \dots + r_m(C)x^m.$$

Ta dễ thấy $r_0(C) = 1$ và $r_1(C) = m$.

Nhận xét. Việc hoán vị các dòng hay các cột trên bàn cờ không ảnh hưởng đến kết quả của đa thức quân xe.

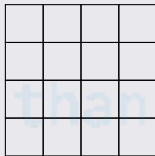
Ví dụ. Cho C là bàn cờ 2×2



Khi đó, ta có 4 cách đặt một quân xe và 2 cách đặt hai quân xe. Do đó đa thức quân xe của C là

$$R(C, x) = 1 + 4x + 2x^2.$$

Ví dụ. Cho C là bàn cờ 4×4



Hãy tìm đa thức quân xe của C ?

Giải. Ta có $r_0(C) = 1$, $r_1(C) = 16$.

- Với 2 quân xe, ta có $\binom{4}{2}$ cách chọn vị trí dòng đặt quân xe. Với mỗi cách chọn dòng, quân xe thứ 1 có 4 cách chọn, quân xe thứ 2 có 3 cách chọn. Như vậy

$$r_2(C) = \binom{4}{2} \times 4 \times 3 = 72.$$

- Lý luận tương tự, ta có

$$r_3(C) = \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 = 96.$$

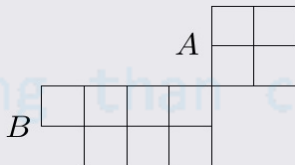
$$r_4(C) = \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Vậy

$$R(C, x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4.$$

Định nghĩa. Hai phần A, B của bàn cờ C được gọi là **rời nhau** nếu không có ô vuông nào trong A cùng dòng hay cùng cột với một ô vuông trong B .

Ví dụ. Hai phần A, B của bàn cờ sau là rời nhau



Định lý. Nếu bàn cờ C chỉ gồm hai phần rời nhau A và B thì

$$R(C, x) = R(A, x) \times R(B, x)$$

Chứng minh. Với k quân xe, ta đặt i quân xe ở A và $k - i$ quân xe ở B . Như vậy số cách đặt k quân xe vào C là $r_i(A) r_{k-i}(B)$.

Do đó

$$r_k(C) = \sum_{i=0}^k r_i(A) r_{k-i}(B).$$

Từ hệ thức này ta có

$$R(C, x) = R(A, x) \times R(B, x).$$

Định lý. Cho \bullet là ô vuông tùy ý của bàn cờ C . Gọi D là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa dòng và cột chứa \bullet và E là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa ô \bullet . Khi đó

$$R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x).$$

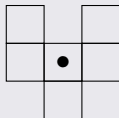
Chứng minh. Với k quân xe ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. Ô \bullet được đặt 1 quân xe nên $k - 1$ quân xe còn lại được đặt trên D nên có $r_{k-1}(D)$ cách đặt.

Trường hợp 2. Ô **o** không được đặt quân xe, nghĩa là k quân xe được đặt trên E nên trường hợp này ta có $r_k(E)$ cách đặt. Vậy với $k \geq 1$ thì $r_k(C) = r_{k-1}(D) + r_k(E)$. Do đó

$$\begin{aligned} R(C, x) &= 1 + \sum_{k \geq 1} r_k(C) x^k \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} r_{k-1}(D) x^k + \sum_{k \geq 1} r_k(E) x^k \\ &= x \sum_{k \geq 0} r_k(D) x^k + (1 + \sum_{k \geq 1} r_k(E) x^k) \\ &= xR(D, x) + R(E, x) \end{aligned}$$

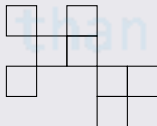
Ví dụ. Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C sau



Giải. Ta có

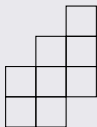
$$\begin{aligned}
 R(C, x) &= xR\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, x\right) + R\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, x\right) \\
 &= x(1 + 2x) + R\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, x\right) \times R\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, x\right) \\
 &= x(1 + 2x) + (1 + 4x + 2x^2)(1 + x) \\
 &= 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3.
 \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$

Ví dụ. (tự làm) Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



Đáp án. $1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$

Định lý. Cho $P(X_1, \dots, X_n)$ là tập các hoán vị $\sigma \in S_n$ với vị trí cấm X_1, \dots, X_n . Gọi B là bàn cờ được tạo từ các vị trí cấm này. Khi đó số hoán vị này là

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! r_k(B).$$

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$?

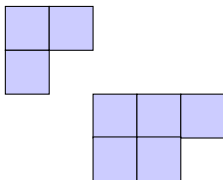
Giải. Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.

		X	X	
				X
X		X	X	
	X			X

Hoán vị dòng 1 với dòng 4 và cột 1 với cột 5, ta được

X	X			
X				
		X	X	X
		X	X	

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm, ta có



Vì B tạo bởi 2 phần rời nhau nên

$$\begin{aligned} R(C, x) &= R\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \\ \hline \end{array}, x\right) \times R\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \\ \hline \end{array}, x\right) \\ &= (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2) \\ &= 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4. \end{aligned}$$

Theo định lý trên ta có số hoán vị với vị trí cấm là

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^5 (-1)^k (5-k)! r_k(B) \\ &= 5! \times 1 - 4! \times 8 + 3! \times 20 - 2! \times 17 + 1! \times 4 - 5! \times 0 = 18 \end{aligned}$$

Ví dụ. (tự làm) Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc 1, 2, 3, 4, 5. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với 1, 3 và 4. Hỏi bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Hướng dẫn. Ta thêm vào người E và người này thích hợp với mọi công việc. Khi đó bài toán đưa về việc tìm số cách phân công 5 người cho 5 công việc. Đây cũng chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Bàn cờ 5×5 với ô cấm

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	
E					

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm. Khi đó

Đáp án. $R(B, x) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4$. Suy ra số cách phân công công việc là

$$\sum_{k=0}^5 (-1)^k (5-k)! r_k(B) = 24.$$

Ví dụ. (tự làm) Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{u, v, w, x, y, z\}$. Hỏi có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B **không** thỏa các điều kiện:

$$f(1) = u \text{ hoặc } v; \quad f(2) = w;$$

$$f(3) = w \text{ hoặc } x; \quad f(4) = x, y, \text{ hoặc } z.$$

Hướng dẫn. Đặt $A' = A \cup \{5, 6\}$. Xét bài toán tìm tất cả các đơn ánh từ $A' \rightarrow B$ không thỏa các điều kiện trên. Vì mỗi các xây dựng đơn ánh từ $A \rightarrow B$ ta được $2!$ các xây dựng đơn ánh từ $A' \rightarrow B$ (vì có $2!$ các chọn ảnh của 5 và 6).

Bài toán tìm số đơn ánh từ $A' \rightarrow B$ chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

Đáp án. Đa thức quân xe: $R(C, x) = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4$

Khi đó, số đơn ánh từ $A' \rightarrow B$ thỏa điều kiện là

$$\sum_{k=0}^6 (-1)^k (6-k)! r_k(C) = 152.$$

Như vậy số đơn ánh từ $A' \rightarrow B$ thỏa điều kiện là $\frac{152}{2!} = 76$.