

BÀI TẬP TUẦN 6

Câu 1. Trả lời các câu hỏi sau:

- a) Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tính $\nabla f(2, 1)$.
- b) Cho hàm số $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Tính $\nabla f(3, 4)$.
- c) Cho hàm số $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$. Tính $\nabla f(0, 1)$
- d) Cho hàm số $f(x, y) = \arctan(y/x)$. Tính $\nabla f(2, 3)$.
- e) Cho hàm số $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$. Tìm $\nabla f(1, 2, 3)$
- f) Cho hàm số $f(x, y, z) = \frac{y}{x+y+z}$. Tìm $\nabla f(2, 1, -1)$
- g) Cho hàm số $f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Tìm $\nabla f(0, 0, \pi/4)$

Câu 2. Trả lời các câu hỏi sau:

- a) Cho hàm số $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tính $f_x(1, 1), f_y(1, 1)$. Vẽ hình và giải thích ý nghĩa của các kết quả vừa tính được.
- b) Cho hàm số $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Tính $f_x(1, 2), f_y(1, 2)$. Vẽ hình và giải thích ý nghĩa của các kết quả vừa tính được.
- c) Cho hàm số $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$. Tính $f_x(1, 0), f_y(1, 0)$. Vẽ hình và giải thích ý nghĩa của các kết quả vừa tính được.

Câu 3. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Hãy cho biết:

- a) Hàm số có liên tục tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- b) Xác định $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ khi $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c) Hàm số có đạo hàm riêng theo biến x và đạo hàm riêng theo biến y tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- d) Cho $a = (a_1, a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Hàm số có đạo hàm theo hướng a tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- e) Hàm số có khả vi Frechet tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?

Câu 4. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Hãy cho biết:

- a) Hàm số có liên tục tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- b) Xác định $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ khi $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c) Hàm số có đạo hàm riêng theo biến x và đạo hàm riêng theo biến y tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- d) Cho $a = (a_1, a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Hàm số có đạo hàm theo hướng a tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- e) Hàm số có khả vi Frechet tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?

Câu 5. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Hãy cho biết:

- a) Hàm số có liên tục tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
- b) Xác định $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ khi $(x, y) \neq (0, 0)$.

- c) Hàm số có đạo hàm riêng theo biến x và đạo hàm riêng theo biến y tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
d) Cho $a = (a_1, a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Hàm số có đạo hàm theo hướng a tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
e) Hàm số có khả vi Frechet tại $(x, y) = (0; 0)$ hay không?

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0; 0) \end{cases}$. Hãy cho biết:

- a) Hàm số có liên tục tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
b) Xác định $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ khi $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) Hàm số có đạo hàm riêng theo biến x và đạo hàm riêng theo biến y tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
d) Cho $a = (a_1, a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Hàm số có đạo hàm theo hướng a tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
e) Hàm số có khả vi Frechet tại $(x, y) = (0; 0)$ hay không?

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Hãy cho biết:

- a) Hàm số có liên tục tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
b) Xác định $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ khi $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) Hàm số có đạo hàm riêng theo biến x và đạo hàm riêng theo biến y tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
d) Cho $a = (a_1, a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Hàm số có đạo hàm theo hướng a tại $(x, y) = (0, 0)$ hay không?
e) Hàm số có khả vi Frechet tại $(x, y) = (0; 0)$ hay không?

Câu 8. [Đạo hàm riêng cấp cao]

- a) Cho $f(x, y) = x^2y + x$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
b) Cho $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
c) Cho $f(x, y) = \sin^2(mx + ny)$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
d) Cho $f(x, y) = 3e^{xy^3}$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
e) Cho $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
f) Cho $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
g) Cho $f(x, y) = x \sin(x + 2y)$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
h) Cho $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
i) Cho $f(x, y) = xye^y$. Xác định $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$
j) Cho $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$. Xác định f_{xxy}, f_{yyy}
k) Cho $f(x, t) = x^2e^{-ct}$. Xác định f_{ttt}, f_{txx}
l) Cho $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$. Xác định f_{xyz}, f_{yzz} .
m) Cho $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$. Xác định f_{rss}, f_{rst}
n) Cho $u = e^{r\theta} \sin \theta$. Xác định $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$.
o) Cho $z = u\sqrt{v-w}$. Xác định $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$
p) Cho $w = \frac{x}{y+2z}$. Xác định $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$
q) Cho $u = x^a y^b z^c$. Xác định $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

Câu 9. Hàm $f(x, y)$ gọi là hàm điều hòa hai biến nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ trên miền xác định của nó.

Kiểm tra rằng các hàm sau là hàm điều hòa:

- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.
- b) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$
- c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- d) $f(x, y) = (e^x + e^{-y}) \sin x$
- e) $f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
- f) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Câu 10. Hàm $f(x, y, z)$ gọi là hàm điều hòa hai biến nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ trên miền xác định của nó. Kiểm tra rằng các hàm sau là hàm điều hòa:

- a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$.
- b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
- c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- d) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos(5z)$

Câu 11. Chứng minh rằng $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin kx$ là nghiệm của phương trình nhiệt $u_t = \alpha^2 u_{xx}$

Câu 12. Chứng minh rằng các hàm số sau là nghiệm của phương trình sóng $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

- a) $u = \sin(kx) \sin(akt)$
- b) $u = t / (a^2 t^2 - x^2)$
- c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
- d) $u = \sin(x - at) + \ln(x + at)$
- e) $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$, trong đó f, g là các hàm một biến khả vi cấp 2.

Câu 13. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- a) Tính $f_x(x, y), f_y(x, y)$ tại $(x, y) = (0, 0)$ và tại $(x, y) \neq (0, 0)$. Suy ra biểu thức $f_x(0, y), f_y(0, x)$
- b) Tính $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ với $(x, y) \neq (0, 0)$ và $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$. Từ đó suy ra $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.
- c) Giả thiết nào của định lý 4.1, chương 4 bị vi phạm trong ví dụ này? Chứng minh khẳng định của bạn.

Câu 14. Động năng của một vật có khối lượng m và vận tốc v được cho bởi công thức $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Chứng minh $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$

Câu 15. Tồn tại hay không một hàm số $f(x, y)$ thỏa $f_x(x, y) = x + 4y$ và $f_y(x, y) = 3x - y$

Câu 16. Xét một khối khí lí tưởng có khối lượng m (kg), thể tích V (lít), nhiệt độ T (0K), và áp suất P (atm). Biết phương trình $PV = mRT$ trong đó R là hằng số. Chứng minh rằng: $\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$ và $T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = mR$

Câu 17. Chứng minh rằng hàm số $P = bL^\alpha K^\beta$ là nghiệm của phương trình $L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$

Câu 18. Cho hàm số $u = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$ trong đó $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Chứng minh $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$

Câu 19. Chứng minh rằng $z = \ln(e^x + e^y)$ là nghiệm của các phương trình $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ và $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$

Câu 20. Cho hàm số $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ trong đó $f(x, y)$ là hàm số khả vi. Chứng minh rằng $t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$

Câu 21. Cho hàm số $z = f(x, y)$ trong đó $x = r \cos \theta$ và $y = r \sin \theta$. Chứng minh $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$

Câu 22. Cho $u = f(x, y)$ trong đó $x = e^s \cos t$ và $y = e^s \sin t$. Chứng minh $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right]$

Câu 23. Cho $z = f(x - y)$. Chứng minh $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Câu 24. Cho $z = f(x, y)$ trong đó $x = s + t$ và $y = s - t$. Chứng minh $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$

Câu 25. Cho $z = f(x, y)$, trong đó $x = r \cos \theta$ và $y = r \sin \theta$. Chứng minh $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$