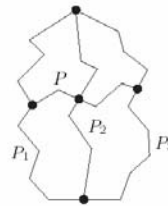


# ĐỒ THỊ PHẪNG

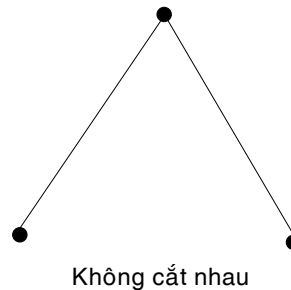
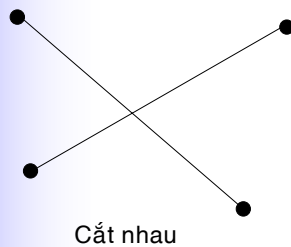


## Định nghĩa

- **Đồ thị phẳng**
- Một đồ thị vô hướng  $G$  được gọi là phẳng nếu tồn tại một cách vẽ  $G$  trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của  $G$  cắt nhau.
- Khi  $G$  là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ  $G$  trong mặt phẳng (sao cho không có hai cạnh nào của  $G$  cắt nhau) được gọi là một biểu diễn phẳng của  $G$ .

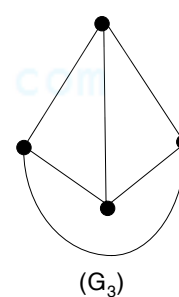
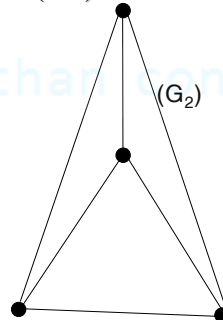
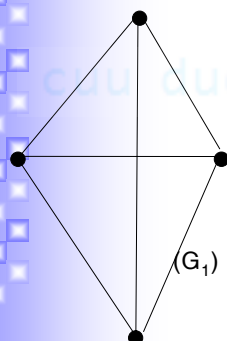
## Định nghĩa

- Ghi chú: hai cạnh có chung một đỉnh được qui ước là không cắt nhau



## Định nghĩa

- Ví dụ
- Đồ thị  $(G_1)$  là đồ thị phẳng và các đồ thị  $(G_2)$ ,  $(G_3)$  là các biểu diễn phẳng của  $(G_1)$ .

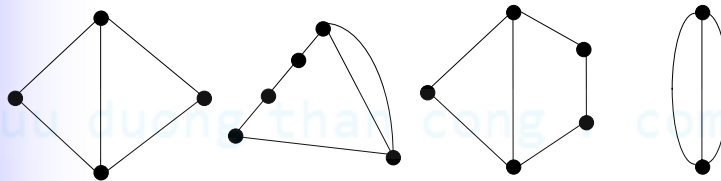


## Định nghĩa

- (b) Phép biến đổi đồng phôi
- Thêm vào 1 đỉnh nằm trên 1 cạnh, hay gộp 2 cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành 1 cạnh.
- (c) Đồ thị đồng phôi
- Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi.
- Định lý: Nếu  $G$  là một đồ thị phẳng thì ta có thể tìm một đồ thị  $G_1$  đồng phôi với  $G$  sao cho có thể vẽ  $G_1$  bằng cách chỉ dùng các đoạn thẳng.

## Định nghĩa

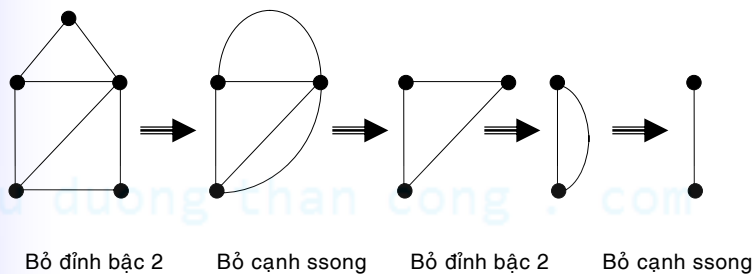
- Các đồ thị sau đây đồng phôi:



## Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

- Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:
  - Bỏ đi các khuyên
  - Bỏ bớt các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh).
  - Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

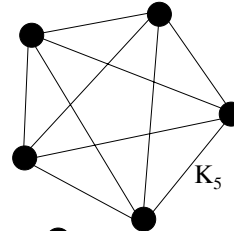
## Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị



# Định lý Kuratowski

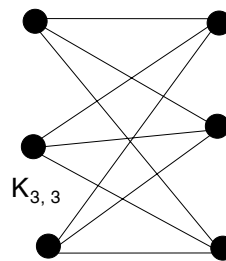
## ■ Định lý 1:

- Đồ thị đủ  $K_5$  không phẳng.



## ■ Định lý 2:

- Đồ thị lưỡng phân đủ  $K_{3,3}$  không phẳng.



# Định lý Kuratowski

## ■ Nhận xét:

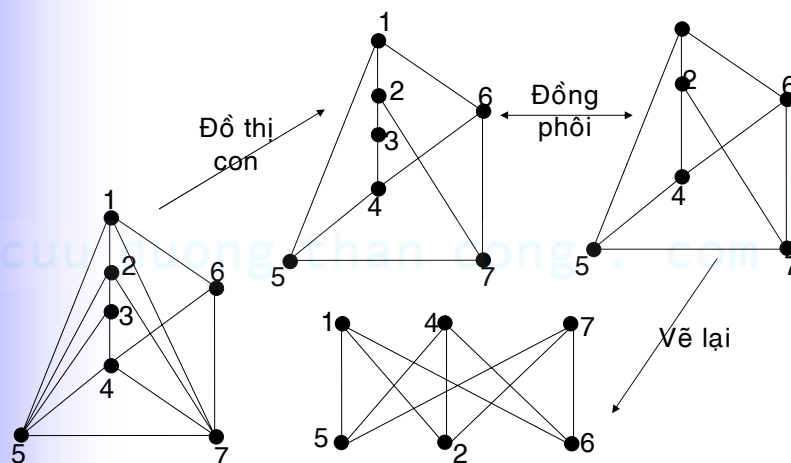
- Hai đồ thị  $K_5$  và  $K_{3,3}$  là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau
- Nếu xóa đi 1 đỉnh hay 1 cạnh của 2 đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
- Đồ thị  $K_5$  là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
- Đồ thị  $K_{3,3}$  là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.

# Định lý Kuratowski

## ■ Định lý 3:

- Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông  $G$  có tính phẳng là  $G$  không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với  $K_5$  hay  $K_{3,3}$ .

# Định lý Kuratowski



## Công thức Euler

- Định lý: Cho  $G$  là đồ thị phẳng, liên thông gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh. Giả sử  $G$  chia mặt phẳng ra làm  $f$  vùng, ta có công thức sau (công thức Euler):

$$f = e - n + 2$$

- Hệ quả: Nếu  $G$  là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm  $n$  đỉnh và  $e$  cạnh (với  $e > 2$ ). Giả sử  $G$  chia mặt phẳng ra thành  $f$  vùng. Ta có:

$$e \geq (3/2)f$$

$$e \leq 3n - 6$$

## Công thức Euler

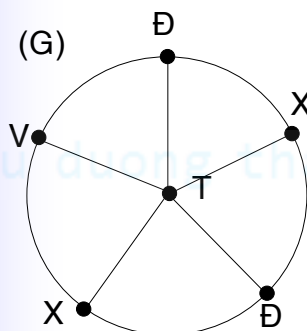
- Ví dụ, áp dụng hệ quả này để chứng minh tính không phẳng của  $K_5$ .  $K_5$  là đồ thị đơn và liên thông có  $v=5$  và  $e=10$ , ta có  $e=10 > 9=3v-6$  do đó  $K_5$  không phẳng (chú ý rằng đảo lại nếu một đồ thị thỏa mãn  $e \leq 3v - 6$  thì chưa chắc là đồ thị phẳng,  $K_{3,3}$  là một ví dụ).

# Tô màu đồ thị

## ■ Sắc số của đồ thị

- Một phép tô màu đồ thị là một cách đánh nhãn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải được đánh nhãn khác nhau.
- Sắc số của một đồ thị  $G$ , ký hiệu  $\gamma(G)$ , là một số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho tồn tại một phép tô màu  $G$  chỉ sử dụng  $k$  màu.

# Tô màu đồ thị



- $\gamma(G)=4$
- $\gamma(K_n)=n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\gamma(K_{m,n})=2, \forall m, n \in \mathbb{N}$



## Tô màu đồ thị

### ■ Một vài tính chất về sắc số

- Nếu đồ thị  $G$  có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì  $\gamma(G) \geq 2$ .
- Đồ thị đủ  $n$  đỉnh  $K_n$  có sắc số là  $n$ . Nếu đồ thị  $G$  chứa một đồ thị con đẳng cấu  $K_r$  thì  $\gamma(G) \geq r$ .
- Nếu đồ thị  $G$  là một chu trình sơ cấp  $n$  đỉnh thì:
  - $\gamma(G) = 2$  nếu  $n$  chẵn,  $\gamma(G) = 3$  nếu  $n$  lẻ;
  - $\gamma(G) = (n \bmod 2) + 2$ .

## Tô màu đồ thị

### ■ Định lý 1.

- Nếu  $T$  là một cây  $n$  đỉnh với  $n \geq 2$  thì  $\gamma(T) = 2$ .

### ■ Định lý 2.

- Cho  $G$  là đồ thị liên thông có ít nhất 1 cạnh. Khi đó  $\gamma(G) = 2$  khi và chỉ khi  $G$  không chứa chu trình sơ cấp có số cạnh lẻ.

### ■ Định lý 3.

- Cho đồ thị  $G = (X, E)$ . Gọi  $d(G) = \max\{d(x) / x \in X\}$ . Ta có:  $\gamma(G) \leq d(G) + 1$ .

## Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

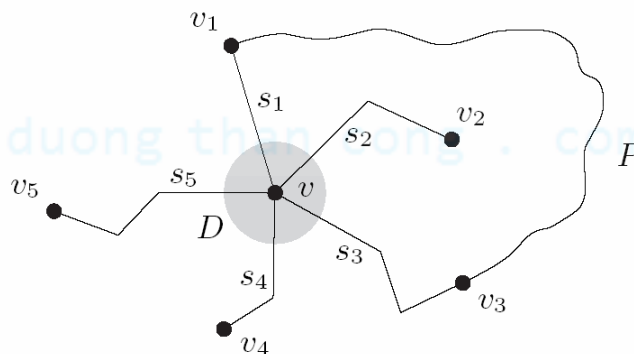
- Lịch sử về giả thuyết 4 màu
- Khoảng 10/1852, giáo sư De Morgan ở trường Đại học Luân Đôn viết thư cho đồng nghiệp của mình là ông Sir William Hamilton để bàn về bài toán: “Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau”.
- Sau đó có nhiều cố gắng của một số nhà toán học để giải bài toán này nhưng đều không đi đến kết quả cuối cùng. Đặc biệt có một lời giải bị sai (phải sau 10 năm mới phát hiện được chỗ không đúng trong lời giải), nhưng lý luận của lời giải này đúng cho “bài toán 5 màu”. Vào năm 1976, ...

Lý Thuyết Đồ Thị - Đồ Thị Phẳng - Khoa CNTT - Đại Học KHTN

19

## Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

- **Định lý 5 màu:** mọi đồ thị phẳng có thể tô bằng 5 màu



Lý Thuyết Đồ Thị - Đồ Thị Phẳng - Khoa CNTT - Đại Học KHTN

20

## Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

- Liên quan giữa giả thuyết 4 màu và sắc số đồ thị phẳng