

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

\mathbf{N} là tập hợp các số nguyên không âm và $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

\mathbf{Z} là tập hợp các số nguyên và $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

\mathbf{Q} là tập hợp các số hữu tỉ và $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$.

\mathbf{R} là tập hợp các số thực và $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

I. MA TRẬN:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. Một ma trận thực A có kích thước $(m \times n)$ là một bảng số thực hình chữ nhật có m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hay } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ với } a_{ij} \in \mathbf{R} \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Khi $m = n$ thì $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ là ma trận vuông thực cấp n .

Ký hiệu : $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ là tập hợp các ma trận thực $(m \times n)$.

$M_n(\mathbf{R})$ là tập hợp các ma trận vuông thực cấp n .

Ví dụ:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & 4 & -5 \\ \sqrt[3]{7} & 0 & -1 & \cos 8 \\ -2 & \ln 9 & 6 & -\pi \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ trong đó } a_{14} = -5, a_{33} = 6 \text{ và } a_{21} = \sqrt[3]{7}.$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} 7 & -1/2 & 0 \\ -5/3 & 4 & -9 \\ 6 & -8 & 2/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q}) \text{ trong đó } b_{13} = 0, b_{22} = 4 \text{ và } b_{32} = -8.$$

$$C = (-9 \ 4 \ 0 \ 7 \ -1) \in M_{1 \times 5}(\mathbf{Z})$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbf{N})$$

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Ma trận không là ma trận có tất cả các hệ số bằng 0.

Ký hiệu ma trận không là \mathbf{O} (hiệu ngẫu nhiên kích thước) hay $\mathbf{O}_{m \times n}$ hay \mathbf{O}_n .

Ví dụ:

$$\mathbf{O}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ và } \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1.3/ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i \neq j \leq m$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên dòng* cho ma trận:

a) Hoán vị dòng (i) với dòng (j). Ta ghi $(i) \leftrightarrow (j)$.

b) Nhân dòng (i) với số $c \in \mathbf{R}^*$. Ta ghi $(i) \rightarrow c(i)$.

c) Thê dòng (i) bằng [dòng (i) + c.dòng (j)] với số $c \in \mathbf{R}$. Ta ghi $(i) \rightarrow [(i) + c(j)]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng trên lần lượt

là $(i) \leftrightarrow (j)$, $(i) \rightarrow c^{-1}(i)$ và $(i) \rightarrow [(i) - c(j)]$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -6 & -4 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (1) \leftrightarrow (3).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ -21/4 & 0 & 3/4 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (2) \rightarrow \frac{-3}{4}(2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ 12 & 9 & -8 & 12 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (3) \rightarrow [(3) + 2(2)].$$

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nói trên lần lượt

là $(1) \leftrightarrow (3)$, $(2) \rightarrow \frac{-4}{3}(2)$ và $(3) \rightarrow [(3) - 2(2)]$.

1.4/ SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG DÒNG:

Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Ta nói A và B là *tương đương dòng* với nhau nếu A có thể biến đổi thành B (và ngược lại) bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Ký hiệu $A \sim B$ để chỉ A và B là *tương đương dòng* với nhau.

Quan hệ tương đương dòng là *một quan hệ tương đương* trên $M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix} = B. \text{ Để ý } A \text{ biến thành } B \text{ qua các phép biến đổi sơ cấp trên}$$

dòng liên tiếp $(2) \rightarrow [(2) + 2(1)]$, $(1) \leftrightarrow (3)$, $(1) \rightarrow \frac{-1}{4}(1)$ và $(3) \rightarrow [(3) - 8(1)]$.

Như vậy B lại có thể biến thành A qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng liên tiếp $(3) \rightarrow [(3) + 8(1)]$, $(1) \rightarrow -4(1)$, $(1) \leftrightarrow (3)$ và $(2) \rightarrow [(2) - 2(1)]$. Vậy $A \sim B$.

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. Một hệ phương trình tuyến tính thực với m phương trình và n ẩn số là một hệ phương trình có dạng như sau:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{ với } a_{ij}, b_i \text{ là các số thực cho trước } (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \text{ và}$$

x_1, x_2, \dots, x_n (đều xuất hiện dưới dạng bậc nhất) là n ẩn số thực cần tìm.

Đặt $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B = (b_i)_{1 \leq i \leq m} \in M_{m \times 1}(\mathbf{R})$ và $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$ thì

hệ (*) được viết gọn thành các dạng $AX = B$ hoặc $(A | B)$ (ma trận X hiểu ngầm).

Ví dụ:

Xét hệ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 8x_3 - 7x_4 - 3x_1 = 0 \\ 9x_2 - 6x_3 + x_4 + 2x_1 = -4 \end{cases}$. Hệ trên được viết gọn thành $AX = B$ hoặc $(A | B)$ với

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 8 & -7 \\ 2 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

2.2/ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC:

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$ (*) đã nêu trong (2.1).

Ta nói bộ $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ là một nghiệm của (*) nếu tất cả các phương trình của (*) đều thỏa khi thế $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots$ và $x_n = c_n$.

Ví dụ:

Xét hệ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -22 \\ -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$. Ta có $(-2, 0, 3, 1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

2.3/ MỆNH ĐỀ: (số lượng nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thực)

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$.

Có đúng một trong 3 trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ vô nghiệm b) Hệ có nghiệm duy nhất c) Hệ có vô số nghiệm

Ví dụ:

a) Phương trình $0x = 5$ vô nghiệm. Phương trình $2x = -6$ có nghiệm duy nhất $x = -3$.
Phương trình $0x = 0$ có vô số nghiệm (x thực tùy ý).

b) Hệ $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 9x - 21y = 4)$ vô nghiệm.

Hệ $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 4x - 5y = -7)$ có nghiệm duy nhất $(x = 2, y = 3)$.

Hệ $(-3x + 7y = 15 \text{ \& } 6x - 14y = -30)$ có vô số nghiệm với một ẩn tự do là x hoặc y

Ghi kết quả: $[x \text{ thực tùy ý, } y = (3x + 15)/7]$ hoặc $[y \text{ thực tùy ý, } x = (7y - 15)/3]$.

2.4/ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

(hay HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH ĐỒNG CẤP):

Xét hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất* $AX = O$ (có vế phải triệt tiêu).

Hệ này có ít nhất *một nghiệm tầm thường* là $(x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0)$.

Do đó có đúng một trong 2 trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ có *nghiệm duy nhất* (chính là nghiệm tầm thường) b) Hệ có *vô số nghiệm*

Ví dụ:

a) Hệ $(9x + 7y = 0 \text{ \& } 4x - 5y = 0 \text{ \& } 3x + 8y = 0)$ có nghiệm duy nhất $(x = 0, y = 0)$.

b) Hệ $(5x + 8y - 4z = 0)$ có vô số nghiệm với hai ẩn tự do là (x, y) hoặc (x, z) hoặc (y, z) .

Ta ghi kết quả theo một trong 3 dạng sau : $[x, y \in \mathbf{R}, z = (5x + 8y)/4]$ hoặc

$[x, z \in \mathbf{R}, y = (4z - 5x)/8]$ hoặc $[y, z \in \mathbf{R}, x = (4z - 8y)/5]$.

III. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

3.1/ MỆNH ĐỀ:

a) Nếu hai hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ và $CX = D$ có các ma trận $(A | B)$ và $(C | D)$ *trùng nhau* thì hai hệ trên là *trùng nhau* (nghĩa là hai hệ trên có cùng một tập hợp nghiệm).

b) Suy ra trong quá trình giải một hệ phương trình tuyến tính, ta có thể *sử dụng tùy ý các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* mà không làm thay đổi tập hợp nghiệm của nó.

3.2/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM DUYNHẤT:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 4 ẩn số x, y, z và t :

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array} : \text{nghiệm duy nhất } (x = 1, y = 2, z = -1, t = -2)$$

Bảng 1: $(2) \rightarrow (2) + 2(1)$, $(3) \rightarrow (3) - 3(1)$, $(4) \rightarrow (4) - 2(1)$

Bảng 2: $(2) \rightarrow (2) + (3)$, $(1) \rightarrow (1) - 2(2)$, $(3) \rightarrow (3) + 4(2)$, $(4) \rightarrow (4) + 7(2)$

Bảng 3: $(4) \rightarrow (4) - (3)$, $(3) \rightarrow -18^{-1}(3)$, $(1) \rightarrow (1) - 7(3)$, $(2) \rightarrow (2) + 2(3)$

Bảng 4: $(4) \rightarrow 18^{-1}(4)$, $(1) \rightarrow (1) + 2(4)$, $(2) \rightarrow (2) - 3(4)$, $(3) \rightarrow (3) + 2(4)$

3.3/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÔ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số x, y, z, t và u :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u \\ \hline 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array} \rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | -4): \text{vô nghiệm.} \end{array}$$

Bảng 1: $(4) \rightarrow (4) - (1)$, $(1) \rightarrow (1) - (2)$, $(2) \rightarrow (2) - 2(3)$, $(3) \rightarrow (3) - (1)$

Bảng 2: $(2) \leftrightarrow (3)$

Bảng 3: $(1) \rightarrow (1) - 2(2)$, $(3) \rightarrow (3) + 7(2)$, $(4) \rightarrow (4) + 3(2)$

Bảng 4: $(3) \rightarrow (3) - 2(4)$

3.4/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ VÔ SỐ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và x_5 :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array} \\ \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} : \text{các cột (3) và (5) không biến đổi được.} \end{array}$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do:

$x_3 = a$, $x_5 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x_1 = (7b - 6a + 5)/6$, $x_2 = (6a - 5b - 5)/6$, $x_4 = (b + 2)/3$

Bảng 1: $(2) \rightarrow (2) - (1)$, $(3) \rightarrow (3) - 4(1)$, $(4) \rightarrow (4) - 2(1)$

Bảng 2: $(3) \rightarrow (3) - 3(2)$, $(4) \rightarrow (4) + (2)$, $(2) \rightarrow -2^{-1}(2)$, $(1) \rightarrow (1) - (2)$

Bảng 3: $(3) \rightarrow 9^{-1}(3)$, $(4) \rightarrow (4) - 12(3)$, $(1) \rightarrow (1) + 2(3)$, $(2) \rightarrow (2) + (3)$

3.5/ CÁC CỘT CHUẨN (có m DÒNG):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{m-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \end{pmatrix}.$$

3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN:

(GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH):

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $(A | B)$ có m phương trình và n ẩn số.

Ta thực hiện các bước sau đây:

- * Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột chuẩn* E_1, E_2, E_3, \dots trong A (từ trái qua phải). Việc *chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :
 - Khi xây dựng E_k , *không làm thay đổi* các cột E_1, E_2, \dots, E_{k-1} đã có trước đó.
 - Nếu cột đang xét không thể chuẩn hóa thành E_k thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
 - Sau khi xây dựng xong E_k , phải tiến hành ngay việc xây dựng E_{k+1} nếu được.
- * Quá trình chuẩn hóa các cột sẽ *kết thúc* khi gặp sự *mâu thuẫn* hoặc khi đã *chuẩn hóa xong cột cuối* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào.
- * Khi kết thúc quá trình chuẩn hóa các cột của A , có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:
 - a) Trường hợp 1: Ta gặp sự *mâu thuẫn* khi đang chuẩn hóa [nghĩa là gặp một dòng có dạng $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ a)$ với $a \neq 0$. Dòng này là hệ quả của hai dòng nào đó có sự *tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải*]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.
 - b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được n *cột chuẩn liên tiếp* E_1, E_2, \dots, E_n trong A mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất* bằng cách dùng các *phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ *trên xuống dưới* của hệ cuối cùng trong quá trình chuẩn hóa để tính lần lượt các ẩn từ *trái qua phải*.
 - c) Trường hợp 3: Ta xây dựng được k *cột chuẩn* E_1, E_2, \dots, E_k ($k < n$) trong A *xen kẽ với* $(n - k)$ *cột khác không chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào. Khi đó hệ có *vô số nghiệm* với $(n - k)$ *ẩn tự do* như sau :
 - * Các ẩn ứng với các *cột không chuẩn hóa được* là các *ẩn tự do* lấy giá trị thực tùy ý.
 - * Các ẩn còn lại (ứng với các *cột chuẩn hóa được*) được tính theo các ẩn tự do dựa theo các *phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ *trên xuống dưới* của hệ cuối cùng trong quá trình chuẩn hóa.

3.7/ ĐIỀU KIỆN CHUẨN HÓA CỦA MỘT CỘT:

Ta muốn chuẩn hóa cột $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ thành $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (số 1^* ở vị trí dòng k).

- a) Nếu $u_k = u_{k+1} = \dots = u_m = 0$ thì U không thể chuẩn hóa thành E_k .
(không sử dụng u_1, u_2, \dots, u_{k-1} để tạo 1^* cho E_k vì cần bảo toàn E_1, E_2, \dots, E_{k-1} đã có trước đó. Còn u_k, u_{k+1}, \dots, u_m không thể để tạo 1^* cho E_k được).
- b) Nếu có ít nhất một hệ số $\neq 0$ trong các số u_k, u_{k+1}, \dots, u_m thì U có thể chuẩn hóa thành E_k (hệ số $\neq 0$ tự chia cho chính nó để tạo 1^* cho E_k . Dùng 1^* đó để tạo các hệ số 0 cho E_k . Nếu 1^* đó nằm ở dòng thứ j với $j \neq k$ thì ta hoán vị các dòng (j) và (k) với nhau).

Ví dụ:

a) Ta muốn chuẩn hóa các cột $U = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ thành E_4 .

U không thể chuẩn hóa thành E_4 được (vì $u_4 = u_5 = u_6 = 0$).

V có thể chuẩn hóa thành E_4 được (vì có $v_5 = 7 \neq 0$) bằng các phép biến đổi

$(5) \rightarrow (5) + 2(6), (1) \rightarrow (1) - 2(5), (3) \rightarrow (3) + 8(5), (6) \rightarrow (6) + 3(5)$ và $(4) \leftrightarrow (5)$.

b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (4 ẩn x, y, z, t) vô nghiệm:

$$(A | B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 9 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1) : \text{sự mâu thuẫn và hệ vô nghiệm.}$$

Dòng (3) và (4) có sự tỉ lệ không tương thích ở vế trái và vế phải : $(4) \rightarrow (4) + \frac{3}{2}(3)$

c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (3 ẩn x, y, z) có nghiệm duy nhất:

$$(A | B) \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1^* & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1^* & 0 & -\ln 3 \\ 0 & 0 & 1^* & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{nghiệm duy nhất } (x = \sqrt{2}, y = -\ln 3, z = 4/9).$$

d) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (9 ẩn x_1, x_2, \dots, x_9) có vô số nghiệm:

$$(A | B) \rightarrow \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline 1^* & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & \sin 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & -4 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 6 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline E_1 & E_2 & & & E_3 & & E_4 & E_5 & & \end{array}$$

Các cột (3), (4), (6), (9) không chuẩn hóa được và hệ có vô số nghiệm với 4 ẩn tự do:

$$x_3 = a, x_4 = b, x_6 = c, x_9 = d, (a, b, c, d \in \mathbf{R}, x_1 = 5a - 8b - 7d,$$

$$x_2 = -2a + 3b - 9c + \sin 8, x_5 = 4c + d - \sqrt{3}, x_7 = \pi \text{ và } x_8 = -6d - \frac{4}{7}.$$

3.8/ VÍ DỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC CÓ THAM SỐ:

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính với 3 ẩn số x, y, z theo tham số thực m

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{E_1} \begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ \hline \end{array} (*)$$

Bảng 1: (2) \rightarrow (2) - (3), (3) \rightarrow (3) - (1), (4) \rightarrow (4) - m(1)

a) Nếu $m = 1$ thì hệ tương đương với một phương trình là $x + y + z = 1$.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do ($y, z \in \mathbf{R}, x = 1 - y - z$).

b) Nếu $m \neq 1$, ta tiếp tục biến đổi hệ (*):

$$\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{E_1} \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & m \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2(1-m) & 1-m^2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{E_1, E_2} \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) \\ \hline \end{array}$$

Khi $1 \neq m \neq -3$ thì hệ vô nghiệm.

Khi $m = -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất ($x = y = z = -1$).

Bảng 1: (3) \rightarrow (3) + (2), (4) \rightarrow (4) - (2), (2) \rightarrow (1 - m)⁻¹(2), (1) \rightarrow (1) - (2)

Bảng 2: (4) \rightarrow (4) + 2(3), (3) \rightarrow (m - 1)⁻¹(3), (1) \rightarrow (1) - 2(3), (2) \rightarrow (2) + (3)

3.9/ CÁC CỘT BÁN CHUẨN (có m DÒNG):

Dạng tổng quát của các cột bán chuẩn có m dòng là

$$F_1 = \begin{pmatrix} a^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} b \\ c^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, F_{m-1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1}^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_m = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m^* \end{pmatrix} \text{ trong đó}$$

$a^*, c^*, f^*, \dots, u_{m-1}^*, v_m^*$ là các số thực tùy ý $\neq 0$ và

$b, d, e, \dots, u_1, u_2, \dots, u_{m-2}, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ là các số thực tùy ý.

Các cột chuẩn (có m dòng) chính là các cột bán chuẩn (có m dòng) đặc biệt.

Ví dụ: Một số cột bán chuẩn có 5 dòng :

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{5}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} -\ln 6 \\ 0 \\ \sqrt[3]{4} \\ -4/7^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 8/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sin 9^* \end{pmatrix}$$

3.10/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS (GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH):

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $(A | B)$ có m phương trình và n ẩn số.

Phương pháp Gauss có *những sự tương tự nhất định* với phương pháp Gauss – Jordan nhưng ta xây dựng *các cột bán chuẩn* (thay vì *cột chuẩn*). Điều kiện để một cột *bán chuẩn* hóa được y hệt như điều kiện *chuẩn hóa được* (xem 3.7).

Phương pháp Gauss được thực hiện cụ thể như sau :

- * Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột bán chuẩn* F_1, F_2, F_3, \dots trong A (từ trái qua phải). Việc *bán chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :
 - Khi xây dựng F_k , *không làm thay đổi* các cột F_1, F_2, \dots, F_{k-1} đã có trước đó.
 - Nếu cột đang xét không thể bán chuẩn hóa thành F_k thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
 - Sau khi xây dựng xong F_k , phải tiến hành ngay việc xây dựng F_{k+1} nếu được.
- * Quá trình chuẩn hóa các cột sẽ *kết thúc* khi *gặp sự mâu thuẫn* hoặc khi đã *bán chuẩn hóa xong cột cuối* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn* nào.
- * Khi kết thúc quá trình bán chuẩn hóa các cột của A , có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:

b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm (các ẩn là x, y, z, t):

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array} \xrightarrow{F_1} \begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array} \xrightarrow{F_1 \quad F_2} \begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 3) : \text{hệ vô nghiệm.}$

Bảng 1: $(3) \rightarrow (3) + 2(2), (1) \rightarrow (1) + 2(2), (2) \rightarrow (2) + 2(1), (4) \rightarrow (4) + 7(1)$

Bảng 2: $(3) \rightarrow (3) - 4(2), (4) \rightarrow (4) + 3(2)$

Bảng 3 : $(4) \rightarrow (4) + 2(3)$

c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm (các ẩn là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5):

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array} \xrightarrow{F_1} \begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array} \xrightarrow{F_1 \quad F_2} \begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} : \text{các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.}$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $x_4 = a, x_5 = b (a, b \in \mathbf{R}), x_3 = (2a - b + 2)/3,$
 $x_2 = (x_3 - 2b - 7)/2 = (2a - 7b - 19)/6, x_1 = x_2 - 3x_3 + 2a + 4 = (2a - b - 7)/6$

Bảng 1: $(2) \rightarrow (2) - 3(1), (3) \rightarrow (3) + (4), (4) \rightarrow (4) + 2(1)$

Bảng 2: $(3) \rightarrow (3) - 5(2), (4) \rightarrow (4) - 2(2)$

Bảng 3 : $(3) \rightarrow 2^{-1}(3), (4) \rightarrow (4) - (3)$

IV. HẠNG CỦA MA TRẬN:

4.1/ DẠNG BẬC THANG VÀ DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

a) Bán chuẩn hóa tối đa các cột của A , ta được ma trận $S_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (biến đổi Gauss). Trong S_A , các dòng không tầm thường (dòng $\neq \mathbf{0}$) nằm phía trên các dòng $\mathbf{0}$ và số hạng $\neq 0$ đầu tiên của các dòng chính là số hạng có đánh dấu * của các cột bán chuẩn. Ta nói S_A là dạng bậc thang của A hay ma trận rút gọn theo dòng của A . Dạng bậc thang S_A của A không duy nhất.

b) Chuẩn hóa tối đa các cột của A , ta được ma trận $R_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (biến đổi Gauss - Jordan). Trong R_A , các dòng không tầm thường (dòng $\neq \mathbf{O}$) nằm phía trên các dòng \mathbf{O} và số hạng $\neq 0$ đầu tiên của các dòng chính là số 1^* của các cột chuẩn. Ta nói R_A là dạng bậc thang rút gọn của A hay ma trận rút gọn theo dòng từng bậc của A . Dạng bậc thang R_A của A là duy nhất.
 R_A là một dạng đặc biệt của S_A .

4.2/ HẠNG CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và các dạng S_A và R_A của A .

Đặt $r(A) = (\text{hạng của } A) = \text{số dòng không tầm thường (dòng } \neq \mathbf{O}) \text{ của } S_A (\text{hay } R_A)$
 hay $r(A) = (\text{hạng của } A) = \text{số cột (bán) chuẩn hiện diện trong } R_A (\text{hay } S_A)$.

Ta có $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Khi $A = \mathbf{O}_{m \times n}$ thì $r(A) = 0$. Khi $A \neq \mathbf{O}_{m \times n}$ thì $r(A) \geq 1$.

Ví dụ: Xét $A \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1, F_2} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1, F_2, F_3} S_A \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1, E_2} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A$$

Ta có $r(A) = 3$ vì S_A (hay R_A) có 3 dòng không tầm thường (3 dòng $\neq \mathbf{O}$).

Ta có $r(A) = 3$ vì R_A (hay S_A) có 3 cột (bán) chuẩn.

$$0 \leq r(A) = 3 \leq \min\{m = 4, n = 5\} = 4.$$

Bảng 1: $(2) \rightarrow (2) + 2(1), (3) \rightarrow (3) + (4), (4) \rightarrow (4) + 3(1)$

Bảng 2: $(4) \rightarrow (4) - 2(2), (2) \rightarrow -5^{-1}(2), (3) \rightarrow (3) - (2)$

Bảng 3: $(4) \rightarrow (4) + 3(3)$

Bảng 4: $(1) \rightarrow (1) + 3(2), (1) \rightarrow -(1)$

Bảng 5: $(1) \rightarrow (1) + (3), (3) \rightarrow -2^{-1}(3), (2) \rightarrow (2) + (3)$

4.3/ ĐỊNH LÝ KRONECKER – CAPELLI:

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có m phương trình và n ẩn số.

Đặt $\bar{A} = (A | B) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbf{R})$. Ta gọi \bar{A} là ma trận bổ sung của hệ $(A | B)$.

Ta có $r(A) = k \leq n$ và $[r(\bar{A}) = r(A) \text{ hay } r(\bar{A}) = r(A) + 1]$.

a) Nếu $r(\bar{A}) = r(A) + 1$ thì hệ $(A | B)$ vô nghiệm.

b) Nếu $r(\bar{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

c) Nếu $r(\bar{A}) = r(A) = k < n$ thì hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $(n - k)$.

Ví dụ:

- a) Hệ $AX = B$ trong (3.2) có $r(\bar{A}) = r(A) = n = 4$ nên hệ có nghiệm duy nhất.
- b) Hệ $AX = B$ trong (3.3) có $r(\bar{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ vô nghiệm.
- c) Hệ $AX = B$ trong (3.4) có $r(\bar{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$ nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $(n - k) = (5 - 3) = 2$.
- d) Hệ $AX = B$ trong (3.8) :
- * Khi $m = 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = k = 1 < n = 3$ nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $(n - k) = (3 - 1) = 2$.
 - * Khi $m = -3$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất.
 - * Khi $-3 \neq m \neq 1$ thì $r(\bar{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ vô nghiệm.
- e) Các hệ $AX = B$ trong **Ví dụ** của (3.10) được khảo sát một cách tương tự.
-