

## CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

### I. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN:

#### 1.1/ PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN:

Cho  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

Đặt  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$  sao cho  $b_{ij} = a_{ji}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ), nghĩa là

ma trận B được suy từ A bằng cách viết các dòng (hay cột) của A lần lượt thành các cột (hay dòng) của B.

Ta nói B là *ma trận chuyển vị* của A và ký hiệu  $B = A^t$  ( $t = \text{transposition}$ ).

Đề ý  $(A^t)^t = B^t = A$ . Nếu  $C \in M_n(\mathbf{R})$  thì  $C^t \in M_n(\mathbf{R})$ .

#### Ví dụ:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ có } B = A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R}).$$

Ta có  $b_{13} = a_{31} = 5$ ,  $b_{22} = a_{22} = 0$  và  $b_{41} = a_{14} = -5$ . Đề ý  $(A^t)^t = B^t = A$ .

$$\text{b) } C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } D = C^t = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Ta có  $d_{12} = c_{21} = -7$ ,  $d_{33} = c_{33} = -3$  và  $d_{23} = c_{32} = 6$ . Đề ý  $(C^t)^t = D^t = C$ .

#### 1.2/ PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN:

Cho  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  và  $c \in \mathbf{R}$ . Đặt  $c.A = (ca_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

Ta có  $1.A = A$ ,  $0.A = \mathbf{O}_{m \times n}$ ,  $(-1).A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ .

Đặt  $-A = (-1).A$  và gọi  $-A$  là *ma trận đối* của A.

#### Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ có } \frac{-4}{3}A = \begin{pmatrix} 8/3 & -28/3 & -32/3 & 20/3 \\ -4/3 & 0 & 16/3 & -12 \\ -20/3 & 4 & -8/3 & 8 \end{pmatrix}.$$

### 1.3/ PHÉP CỘNG MA TRẬN:

Cho  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  và  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

Đặt  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  và  $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ .

#### Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 7 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có } A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 17 & -5 \\ -2 & 6 & -6 & 16 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } A - B = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

### 1.4/ TÍNH CHẤT: Cho $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $c, d \in \mathbf{R}$ . Khi đó:

$$\text{a) } c.(d.A) = (c.d).A \quad (c.A)^t = c.A^t \quad (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

b) Phép cộng ma trận giao hoán và kết hợp:

$$B + A = A + B \quad (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$\text{c) } \mathbf{O}_{m \times n} + A = A + \mathbf{O}_{m \times n} = A \quad (-A) + A = A + (-A) = \mathbf{O}_{m \times n}$$

$$\text{d) } (c + d).A = c.A + d.A \quad c.(A \pm B) = c.A \pm c.B$$

#### Ví dụ: Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ . Ta có

$$(-4A)^t = -4A^t \quad (-7)(6A) = [(-7)6]A = -42A$$

$$(5 + 8)A = 5A + 8A \quad (-9)(A + B) = (-9)A + (-9)B$$

### 1.5/ TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA DÒNG VỚI CỘT:

Cho dòng  $U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \in M_{1 \times n}(\mathbf{R})$  và cột  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$ .

Đặt  $U.V = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$  thì  $U.V \in \mathbf{R}$ .

#### Ví dụ:

$$U = (-3 \ 8 \ -6 \ 9 \ 2) \in M_{1 \times 5}(\mathbf{R}) \text{ và } V = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 1}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có } U.V = (-3)7 + 8.0 + (-6)(-5) + 9.1 + 2(-4) = 10 \in \mathbf{R}.$$

### 1.6/ PHÉP NHÂN MA TRẬN:

Cho  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  và  $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$  thỏa điều kiện

(số cột của  $A$ ) =  $n$  = (số dòng của  $B$ ).

Ta quan tâm  $m$  dòng  $A_1, A_2, \dots, A_m$  của  $A$  (mỗi dòng có  $n$  số hạng) và quan tâm  $p$  cột  $B_1, B_2, \dots, B_p$  của  $B$  (mỗi cột có  $n$  số hạng).

Ta thực hiện *phép nhân ma trận*  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  với  $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$  bằng cách nhân vô hướng mỗi dòng của  $A$  với mỗi cột của  $B$  để được ma trận tích

$C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$  như sau:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \dots & A_1 B_p \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & \dots & A_2 B_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_m B_1 & A_m B_2 & \dots & A_m B_p \end{pmatrix} = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$$

$$\text{với } c_{ik} = (\text{dòng } A_i)(\text{cột } B_k) = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}).$$

Như vậy  $C = A.B = AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$  với  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p$ ).

**Ví dụ:**

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ và } B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có } C = AB = \begin{pmatrix} -28 & 0 & -13 \\ 67 & 7 & -15 \\ -11 & 1 & 13 \end{pmatrix} \text{ và } D = BA = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -7 & -23 \\ 0 & 31 & 45 & -38 \\ -5 & 1 & 11 & 5 \\ -12 & 34 & 70 & -32 \end{pmatrix} \text{ với}$$

$C \in M_3(\mathbf{R})$  và  $D \in M_4(\mathbf{R})$ . Như vậy  $AB \neq BA$ .

### **1.7/ MA TRẬN ĐƠN VỊ:**

*Ma trận đơn vị cấp  $n$*  là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng như sau:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tất cả các hệ số trên đường chéo chính đều bằng 1, bên ngoài đều bằng 0)

**Ví dụ:**

$$I_1 = (1) \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.8/ TÍNH CHẤT:

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ,  $B, C \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ ,  $D \in M_{p \times q}(\mathbf{R})$  và  $c \in \mathbf{R}$ . Khi đó:

- a)  $(AB)D = A(BD) = ABD$  (phép nhân ma trận có *tính kết hợp*).
- b)  $(AB)^t = B^t A^t$  và  $(cA)B = A(cB) = c(AB)$
- c)  $A(B \pm C) = AB \pm AC$  và  $(B \pm C)D = BD \pm CD$   
(phép nhân ma trận *phân phối trái và phải* với các phép cộng trừ ma trận).
- d)  $\mathbf{O}_{k \times m} A = \mathbf{O}_{k \times n}$  và  $A \mathbf{O}_{n \times k} = \mathbf{O}_{m \times k}$ .
- e)  $\mathbf{I}_m A = A$  và  $A \mathbf{I}_n = A$ .

### Ví dụ:

Cho  $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ .

Ta có  $\mathbf{O}_{5 \times 2} A = \mathbf{O}_{5 \times 3}$ ,  $A \mathbf{O}_{3 \times 8} = \mathbf{O}_{2 \times 8}$ ,  $\mathbf{I}_2 A = A$  và  $A \mathbf{I}_3 = A$ .

### 1.9/ GHI CHÚ:

- a) Phép nhân ma trận *không giao hoán*. Nếu  $AB$  và  $BA$  cùng xác định thì không nhất thiết  $BA = AB$ .  
Nếu  $AB = BA$  thì  $A$  và  $B$  là *hai ma trận vuông có cùng kích thước*.
- b) Có thể nhân liên tiếp nhiều ma trận nếu số cột của ma trận đi trước bằng số dòng của ma trận đi sau.
- c) Có thể xảy ra khả năng  
 $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ ,  $A \neq \mathbf{O} \neq B$  nhưng  $AB = \mathbf{O}_{m \times p}$ .

### Ví dụ:

a) Trong Ví dụ của (1.7),  $C = AB \neq D = BA$  vì  $C \in M_3(\mathbf{R})$  và  $D \in M_4(\mathbf{R})$ .

b) Cho  $A \in M_{3 \times 7}(\mathbf{R})$ ,  $B \in M_{7 \times 4}(\mathbf{R})$ ,  $C \in M_{4 \times 1}(\mathbf{R})$  và  $D \in M_{1 \times 8}(\mathbf{R})$ .

Đặt  $E = ABCD$  thì  $E \in M_{3 \times 8}(\mathbf{R})$ .

c) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{3 \times 2}$  và  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{2 \times 3}$  nhưng  $AB = \mathbf{O}_3$ .

## II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ PHÉP NHÂN VÀ LŨY THỪA: Cho  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ .

a) Ta có  $AB \in M_n(\mathbf{R})$ ,  $BA \in M_n(\mathbf{R})$  và *không nhất thiết*  $AB = BA$ .

b) Đặt  $A^0 = \mathbf{I}_n$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = AA$ , ...,  $A^{k+1} = AA^k \quad \forall k \in \mathbf{N}$ .

Ta có  $A^k \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall k \in \mathbf{N}$ .

### Ví dụ:

a) Cho  $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$  và  $K = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ .

Ta có  $HK = \begin{pmatrix} -17 & 25 \\ -30 & 44 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ ,  $KH = \begin{pmatrix} 18 & -8 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$  và  $HK \neq KH$ .

b) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ . Tính  $A^k \quad \forall k \in \mathbf{N}$ .

$$\text{Ta có } A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dự đoán  $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbf{N}$  và kiểm chứng dễ dàng bằng phép qui nạp.

**2.2/ TÍNH CHẤT:** Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$ .

a)  $O_n^k = O_n$  và  $I_n^k = I_n \quad \forall k$  nguyên  $\geq 1$ .

b)  $A^r A^s = A^{r+s}$  và  $(A^r)^s = A^{rs} \quad \forall r, s \in \mathbf{N}$ .

c)  $O_n A = A O_n = O_n$  và  $I_n A = A I_n = A$ .

d) Có thể xảy ra khả năng ( $A \neq O_n$  và  $\exists r$  nguyên  $\geq 2$  thỏa  $A^r = O_n$ ).

**Ví dụ:**

a)  $O_n^{2000} = O_n$  và  $I_n^{3000} = I_n$ .

b)  $\forall A \in M_n(\mathbf{R}), A^9 A^{16} = A^{9+16} = A^{25}$  và  $(A^9)^{16} = A^{9 \times 16} = A^{144}$ .

c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$  và  $A \neq O_3$ . Ta có  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3 = A^3$ .

**2.3/ CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT:**

Cho  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ .

*Đường chéo (chính)* của  $A$  bao gồm các hệ số  $a_{ii} (1 \leq i \leq n)$ .

a)  $A$  là ma trận (đường) chéo nếu các hệ số ở ngoài đường chéo đều bằng 0 và các hệ số của đường chéo thì tùy ý (nghĩa là  $a_{ij} = 0$  khi  $1 \leq i \neq j \leq n$ ).

b)  $A$  là ma trận tam giác trên nếu các hệ số ở phía dưới đường chéo đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là  $a_{ij} = 0$  khi  $1 \leq j < i \leq n$ ).

c)  $A$  là ma trận tam giác dưới nếu các hệ số ở phía trên đường chéo đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là  $a_{ij} = 0$  khi  $1 \leq i < j \leq n$ ).

d)  $A$  là ma trận tam giác trên ngặt nếu  $A$  là ma trận tam giác trên có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là  $a_{ij} = 0$  khi  $1 \leq j \leq i \leq n$ ).

e)  $A$  là ma trận tam giác dưới ngặt nếu  $A$  là ma trận tam giác dưới có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là  $a_{ij} = 0$  khi  $1 \leq i \leq j \leq n$ ).

**Ví dụ:** Các ma trận dạng đặc biệt (ma trận đường chéo, tam giác trên, tam giác dưới, tam giác trên ngặt và tam giác dưới ngặt) :

$$A = \begin{pmatrix} 3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7^* \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4^* & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 9^* & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0^* & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -8^* & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 9 & -5 \\ 0 & 0^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0^* & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0^* & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0^* \end{pmatrix}$$

#### 2.4/ MỆNH ĐỀ:

- a) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *đường chéo* cũng là ma trận *đường chéo*. Các phép toán thực hiện tự nhiên trên đường chéo.
- b) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *tam giác cùng loại* cũng là ma trận *tam giác cùng loại*.

#### Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix}, \quad C + D = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C - D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -2 & -30 & -11 \\ 0 & 72 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & -219 & -84 \\ 0 & 512 & 208 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

**2.5/ MỆNH ĐỀ:** Cho  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $AB = BA$ . Khi đó các hằng đẳng thức trong  $\mathbf{R}$  vẫn có hiệu lực đối với  $A$  và  $B$ .

$$\forall k \geq 2, (AB)^k = A^k B^k, \quad (A + B)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i A^i B^{k-i} \quad \text{và}$$

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$$

**Ví dụ:** Cho  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $AB = BA$ . Khi đó

$$(AB)^4 = ABABABAB = AAAABBBB = A^4 B^4$$

$$A^5 + B^5 = A^5 - (-B)^5 = (A + B)(A^4 - A^3 B + A^2 B^2 - AB^3 + B^4)$$

$$(4A - 5I_n)^3 = (4A)^3 - 3(4A)^2(5I_n) + 3(4A)(5I_n)^2 - (5I_n)^3 \\ = 64A^3 - 240A^2 + 300A - 125I_n$$

**2.6/ GHI CHÚ:** Nếu  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $AB \neq BA$  thì các hằng đẳng thức trong  $\mathbf{R}$  không thể áp dụng cho  $A$  và  $B$ . Các phép tính phải dùng định nghĩa.

**Ví dụ:** Cho  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $AB \neq BA$ . Ta có  
 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$  vì  $(-AB + BA) \neq \mathbf{O}_n$ .  
 $(A \pm B)^2 = (A \pm B)(A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$  vì  
 $(\pm AB \pm BA) \neq \pm 2AB$

### III. SỰ KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG:

#### 3.1/ VẤN ĐỀ:

- a)  $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$ , ta có  $I_n A = A I_n = A$ .  
b) Cho trước  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Có hay không  $A' \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $A'A = AA' = I_n$ ?  
Nếu có thì  $A'$  được xác định ra sao?  
Khi  $n = 1$ , ta trả lời dễ dàng câu hỏi trên: nếu  $a = 0 \in \mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$  thì không có  $a' \in \mathbf{R}$  thỏa  $a'a = aa' = 1$  và ta nói  $a = 0$  là *số không khả nghịch*.  
Nếu  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  thì có  $a' = a^{-1} \in \mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$  thỏa  $a'a = aa' = 1$  và ta nói  $a$  là *số khả nghịch* cũng như ký hiệu  $a^{-1} = a'$  là *số nghịch đảo* của số  $a$ .  
Ta sẽ đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên khi  $n \geq 2$ .

#### 3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ .

- a) Ta nói  $A$  là ma trận *khả nghịch* nếu có  $A' \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $A'A = AA' = I_n$ .  
b)  $A'$  (nếu có) thì *duy nhất* và lúc đó ta ký hiệu  $A' = A^{-1}$  là *ma trận nghịch đảo* của ma trận  $A$ .  
c) Nếu  $A$  *khả nghịch* (có  $A^{-1}$ ) thì ta định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm cho  $A$  như sau:  $A^{-2} = (A^{-1})^2, A^{-3} = (A^{-1})^3, \dots, A^{-k} = (A^{-1})^k \quad \forall k$  nguyên  $\geq 2$ .  
Ta có  $A^m \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall m \in \mathbf{Z}$ . Hơn nữa  $A^r A^s = A^{r+s}, (A^r)^s = A^{rs} \quad \forall r, s \in \mathbf{Z}$ .

#### Ví dụ:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Ta có  $AB = BA = I_3$ . Do đó  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ . Tương tự  $B$  khả nghịch và  $B^{-1} = A$ . Hơn nữa  $A^{-k} = (A^{-1})^k = B^k \quad \forall k$  nguyên  $\geq 2$  và  $A^m \in M_3(\mathbf{R}) \quad \forall m \in \mathbf{Z}$ .  
Ta có  $A^7 A^{-12} = A^{7+(-12)} = A^{-5}$  và  $(A^7)^{-12} = A^{7(-12)} = A^{-84}$ .

#### 3.3/ ĐỊNH LÝ: (nhận diện ma trận khả nghịch)

Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Ta xác định được  $S_A, R_A$  và  $r(A) \leq n$ .

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

- a)  $A$  *khả nghịch*.  
b)  $S_A$  có các hệ số trên đường chéo đều  $\neq 0$ .  
c)  $R_A = I_n$ .  
d)  $r(A) = n$ .

#### 3.4/ HỆ QUẢ: (nhận diện ma trận không khả nghịch)

Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Ta xác định được  $S_A, R_A$  và  $r(A) \leq n$ .

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

- a)  $A$  *không khả nghịch*.  
b)  $S_A$  có ít nhất một hệ số 0 trên đường chéo.  
c)  $R_A \neq I_n$ .  
d)  $r(A) < n$ .

**Ví dụ:**

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1^* & 2 \\ 0 & 0 & -13^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 5 \\ 0 & 1^* & -2 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow R_A = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \end{pmatrix} = I_3$$

Bảng 1: (2)  $\rightarrow$  (2) + (1), (1)  $\rightarrow$  (1) - (3), (3)  $\rightarrow$  (3) - 2(1).

Bảng 2: (3)  $\rightarrow$  (3) - 4(2). Bảng 3: (1)  $\rightarrow$  (1) + (2), (2)  $\rightarrow$  - (2).

Bảng 4: (3)  $\rightarrow$  -13<sup>-1</sup>(3), (1)  $\rightarrow$  (1) - 5(3), (2)  $\rightarrow$  (2) + 2(3).

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17 & 51 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow S_B = \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17^* & 51 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R_B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$$

Bảng 1: (1)  $\rightarrow$  (1) - (3), (2)  $\rightarrow$  (2) + 5(1), (3)  $\rightarrow$  (3) - 2(1).

Bảng 2: (3)  $\rightarrow$  (3) + (5/17)(2). Bảng 3: (2)  $\rightarrow$  17<sup>-1</sup>(2), (1)  $\rightarrow$  (1) - 3(2).

Ta thấy A khả nghịch (để ý các hệ số trên đường chéo của  $S_A$  đều  $\neq 0$ ,  $R_A = I_3$  và  $r(A) = 3$ ) và B không khả nghịch (để ý có hệ số = 0 trên đường chéo của  $S_B$ ,  $R_B \neq I_3$  và  $r(B) = 2 < 3$ ).

**3.5/ ĐỊNH LÝ:** (tìm ma trận nghịch đảo cho ma trận khả nghịch)

Cho A khả nghịch  $\in M_n(\mathbf{R})$  (nghĩa là  $R_A = I_n$ ).

Nếu các phép biến đổi sơ cấp trên dòng  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  biến A thành  $R_A = I_n$  thì chính các phép biến đổi đó, theo đúng thứ tự, sẽ biến  $I_n$  thành  $A^{-1}$ .

Cụ thể như sau:

Nếu  $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k = R_A = I_n$  (dùng các phép biến đổi  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ ) thì  $I_n \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k = A^{-1}$  (cũng dùng các phép biến đổi  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ )

**3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO:**

Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Ta thường kiểm tra A khả nghịch và tìm  $A^{-1}$  cùng một lúc theo sơ đồ sau (phương pháp Gauss – Jordan):

$(A | I_n) \rightarrow (A_1 | B_1) \rightarrow (A_2 | B_2) \rightarrow \dots \rightarrow (A_k | B_k)$  trong đó  $A_k = R_A$ .

(dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  biến A thành  $R_A$ )

Nếu  $R_A \neq I_n$  thì A không khả nghịch.

Nếu  $R_A = I_n$  thì A khả nghịch và  $A^{-1} = B_k$ .

**Ví dụ:**

Xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -11 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$



$$(B | I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 10 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Bảng 1:  $(2) \rightarrow (2) + 2(1), (3) \rightarrow (3) - 3(1)$ .

Bảng 2:  $(1) \rightarrow (1) - 2(2), (3) \rightarrow (3) + (2)$ .

Ta thấy  $R_B \neq I_3$  nên  $B$  không khả nghịch.

$$(A | I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array} \right).$$

Bảng 1:  $(1) \rightarrow (1) - (2), (2) \rightarrow (2) - 2(1), (3) \rightarrow (3) + 7(1)$ .

Bảng 2:  $(3) \rightarrow (3) + 4(2), (2) \rightarrow (2) + 3(3)$ .

Bảng 3:  $(1) \rightarrow (1) - 3(2), (3) \rightarrow (3) - 2(2)$ .

Bảng 4:  $(1) \rightarrow (1) - 2(3), (2) \rightarrow (2) + 3(3), (3) \rightarrow -(3)$ .

Do  $R_A = I_3$  nên  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$ .

Thử lại, ta thấy  $A^{-1}A = I_3$  hay  $AA^{-1} = I_3$ .

**3.7/ MỆNH ĐỀ:** Cho  $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$ . Khi đó

a) Nếu  $A$  khả nghịch thì

\*  $A^{-1}$  cũng khả nghịch và  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

\*  $A^t$  cũng khả nghịch và  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

\*  $cA$  ( $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ) cũng khả nghịch và  $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$ .

\*  $A^r$  ( $r \in \mathbf{Z}$ ) cũng khả nghịch và  $(A^r)^{-1} = A^{-r}$ .

b)  $AB$  khả nghịch  $\Leftrightarrow (A$  và  $B$  đều khả nghịch). Lúc đó  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

$AB$  không khả nghịch  $\Leftrightarrow (A$  hay  $B$  không khả nghịch).

c)  $(A_1A_2 \dots A_k)$  khả nghịch  $\Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_k$  đều khả nghịch).

Lúc đó  $(A_1A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$ .

$(A_1A_2 \dots A_k)$  không khả nghịch  $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, A_j$  không khả nghịch.

**Ví dụ:**

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  khả nghịch và  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ . Suy ra

\*  $A^{-1}$  cũng khả nghịch và  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

\*  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  cũng khả nghịch và  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ .

\*  $\frac{-5}{2}A$  cũng khả nghịch và  $(\frac{-5}{2}A)^{-1} = \frac{-2}{5}A^{-1}$ .

\*  $A^{-4}$  cũng khả nghịch và  $(A^{-4})^{-1} = A^4$ .

b)  $H = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$  và  $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  khả nghịch có  $H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$  và  $K^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ .

$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$  không khả nghịch (để ý  $R_H = R_K = I_2$  và  $R_L = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$ ).

Ta có  $HK = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -19 & -15 \end{pmatrix}$  khả nghịch và  $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -19 & -14 \end{pmatrix}$ .

Ta có  $KH = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  khả nghịch và  $(KH)^{-1} = H^{-1}K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Các ma trận  $HKL, KHL, HLK, KLH, LHK$  và  $LKH$  đều không khả nghịch.

### 3.8/ **MỆNH ĐỀ:** (nhận diện 2 ma trận đều khả nghịch và là nghịch đảo của nhau)

Cho  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ . Các phát biểu sau là tương đương với nhau:

a)  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ .

b)  $B$  khả nghịch và  $B^{-1} = A$ .

c)  $AB = I_n$ .

d)  $BA = I_n$ .

#### **Ví dụ:**

a) Cho  $P \in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $P^5 = \mathbf{O}_n$ .

Đặt  $A = (I_n - P)$  và  $B = (I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$ .

Chứng minh  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ .

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh  $AB = I_n$  là xong. Ta có

$$AB = (I_n - P)(I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$$

$$= I_n + P + P^2 + P^3 + P^4 - (P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5) = I_n - P^5 = I_n - \mathbf{O}_n = I_n.$$

b) Cho  $H, K \in M_n(\mathbf{R})$  sao cho  $C = (I_n + HK)$  khả nghịch. Chứng minh

$D = (I_n + KH)$  cũng khả nghịch và  $D^{-1} = E$  trong đó  $E = (I_n - KC^{-1}H)$ .

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh  $DE = I_n$  là xong. Ta có

$$DE = (I_n + KH)(I_n - KC^{-1}H) = I_n + KH - KC^{-1}H - KHKC^{-1}H$$

$$= I_n + KH - K(I_n + HK)C^{-1}H = I_n + KH - KCC^{-1}H = I_n + KH - KH = I_n.$$

### 3.9/ **LIÊN HỆ GIỮA TÍNH KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG VÀ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:**

Cho hệ phương trình tuyến tính  $AX = B$  với  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $B \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$ .

a) Nếu  $A$  khả nghịch thì hệ trên có nghiệm duy nhất.

Nếu  $A$  không khả nghịch thì hệ trên vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

b) Suy ra: Nếu  $A$  khả nghịch thì hệ  $AX = \mathbf{O}$  có nghiệm duy nhất là  $X = \mathbf{O}$ .

Nếu  $A$  không khả nghịch thì hệ  $AX = \mathbf{O}$  có vô số nghiệm.

#### **Ví dụ:** Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbf{R}).$$

$$\begin{aligned}
 AX = B &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & u \\ -2 & 0 & -3 & v \\ 2 & 1 & 3 & w \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & u \\ 0 & 1 & 0 & v+w \\ 0 & -3 & -1 & w-2u \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & u-2v-2w \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & -1 & 3v+4w-2u \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 4v+6w-3u \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & 1^* & 2u-3v-4w \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Bảng 1: (2)  $\rightarrow$  (2) + (3), (3)  $\rightarrow$  (3) - 2(1).

Bảng 2: (1)  $\rightarrow$  (1) - 2(2), (3)  $\rightarrow$  (3) + 3(2).

Bảng 3: (1)  $\rightarrow$  (1) + 2(3), (3)  $\rightarrow$  - (3).

Do  $R_A = I_3$  nên A khả nghịch và hệ  $AX = B$  có nghiệm duy nhất

( $x_1 = 4v + 6w - 3u$ ,  $x_2 = v + w$ ,  $x_3 = 2u - 3v - 4w$ )  $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$ .

Suy ra hệ  $AX = \mathbf{O}$  ( $u = v = w = 0$ ) có nghiệm duy nhất ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ).

$$CX = B \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & u \\ 2 & 2 & 2 & v \\ -1 & -3 & 1 & w \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 3 & u \\ 0 & 4 & -4 & v-2u \\ 0 & -4 & 4 & u+w \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & (v+2u)/4 \\ 0 & 1^* & -1 & (v-2u)/4 \\ 0 & 0 & 0 & -u+v+w \end{array} \right)$$

Bảng 1: (2)  $\rightarrow$  (2) - 2(1), (3)  $\rightarrow$  (3) + (1).

Bảng 2: (3)  $\rightarrow$  (3) + (2), (2)  $\rightarrow 4^{-1}(2)$ , (1)  $\rightarrow$  (1) + (2).

Do  $R_C \neq I_3$  nên C không khả nghịch.

Nếu  $v + w - u \neq 0$  thì hệ  $CX = B$  vô nghiệm.

Nếu  $v + w - u = 0$  thì hệ  $CX = B$  có vô số nghiệm với một ẩn tự do

[  $x_3 = a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $x_1 = -2a + (v + 2u)/4$ ,  $x_2 = a + (v - 2u)/4$  ]  $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$ .

Suy ra hệ  $CX = \mathbf{O}$  ( $u = v = w = 0$ ) có vô số nghiệm với một ẩn tự do

[  $x_3 = a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $x_1 = -2a$ ,  $x_2 = a$  ].

## IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN:

### 4.1/ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG DỤNG MA TRẬN KHẢ NGHỊCH:

Cho các ma trận khả nghịch  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $C \in M_m(\mathbf{R})$ .

a) Phương trình  $AX = B$  ( $B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$  và ma trận ẩn  $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ )

Ta có  $AX = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$  (nghiệm duy nhất)

Đặc biệt  $AX = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$  (nghiệm duy nhất tầm thường).

b) Phương trình  $XA = B$  ( $B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$  và ma trận ẩn  $X \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ )

Ta có  $XA = B \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$  (nghiệm duy nhất)

Đặc biệt  $XA = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = \mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O}$  (nghiệm duy nhất tầm thường).

c) Phương trình  $AXC = B$  ( $B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$  và ma trận ẩn  $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ )

Ta có  $AXC = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$  (duy nhất)

Đặc biệt  $AXC = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O}$  (nghiệm duy nhất tầm thường)

**Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ khả nghịch và ta có } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \text{ khả nghịch và ta có } C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } AX = B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } AX = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = A^{-1}B = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } XC = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 23 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } XC = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = \mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } CXA = E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$X = C^{-1}EA^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 7 \\ -35 & 17 & 16 \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -21 & -31 \\ -37 & -54 & -73 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } CXA = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$X = C^{-1}\mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 4.2/ PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT:

Xét phương trình ma trận tổng quát  $f(X) = \mathbf{O}$  với  $X$  là ma trận  $n \times n$  và  $f$  là một hàm theo  $X$ .

Ta xác định kích thước  $(m \times n)$  của  $X$  và đặt

$X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  bao gồm  $mn$  ẩn số thực  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ).

Viết  $f(X) = \mathbf{O}$  thành một hệ phương trình thực theo  $mn$  ẩn số thực  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ). Nếu hệ này giải được (chẳng hạn nó là một hệ phương trình tuyến tính) thì ta tìm được các ma trận  $X$  thỏa phương trình ma trận đã cho.

**Ví dụ:** Giải các phương trình ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (X^t \text{ là ma trận chuyển vị của } X) \text{ và } Y^2 = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } X^t \in M_{3 \times 2}(\mathbf{R}) \text{ nên } X \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R}). \text{ Đặt } X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ và } X^t = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}, \text{ ta có}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 6 \\ 3x + y - 4z = -1 \\ 2u - 3v + 5w = -5 \\ 3u + v - 4w = 2 \end{cases}$$

Ta có hai hệ phương trình tuyến tính [ hệ (I) theo x, y, z và hệ (II) theo u, v, w ] và có thể giải chung trong cùng một bảng ma trận như sau (vì ma trận hệ số ở vế trái của hai hệ trùng nhau) :

$$\left( \begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 3 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 6 & -5 \\ \hline u & v & w & & \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 4 & -9 & -7 & 7 \\ 0 & -11 & 23 & 20 & -19 \\ \hline u & v & w & & \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 0 & -7/11 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1^* & -23/11 & -20/11 & 19/11 \\ \hline u & v & w & & \end{array} \right)$$

Bảng 1 : (1)  $\rightarrow$  (1) - (2), (2)  $\rightarrow$  (2) - 2(1).

Bảng 2 : (2)  $\rightarrow$   $-11^{-1}$ (2), (1)  $\rightarrow$  (1) - 4(2).

Hệ (I) :  $z \in \mathbf{R}$ ,  $x = (7z + 3)/11$ ,  $y = (23z - 20)/11$

Hệ (II) :  $w \in \mathbf{R}$ ,  $u = (7w + 1)/11$ ,  $v = (23w + 19)/11$

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm  $X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7z+3 & 23z-20 & 11z \\ 7w+1 & 23w+19 & 11w \end{pmatrix}$  với  $z, w \in \mathbf{R}$

$$b) Y \in M_2(\mathbf{R}). \text{ Đặt } Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \text{ ta có } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 0(PT1) \\ y(x+t) = 0(PT2) \\ z(x+t) = 0(PT3) \\ t^2 + yz = 0(PT4) \end{cases}$$

Từ (PT 2), ta xét

\* Nếu  $y = 0$  : từ (PT1) và (PT4), ta có  $x = t = 0$ . Lúc này (PT 3) cũng thỏa với  $z \in \mathbf{R}$ .

\* Nếu  $y$  thực tùy ý  $\neq 0$  :  $t = -x$  (PT 2),  $z = -x^2/y$  (PT 1) với  $x$  thực tùy ý. Lúc này (PT 3) và (PT 4) cũng thỏa.

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm như sau :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \text{ và } Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix} \text{ với } x, y, z \in \mathbf{R} (y \neq 0).$$