

Chương 3 . KHÔNG GIAN VECTO

Đặt $V = \mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$.

Cho $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là các phần tử của \mathbb{R}^n , r là số thực tùy ý.

Ta định nghĩa các phép toán:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$rx = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n).$$

Các phép toán này có các tính chất sau đây

➤ Chương 3. Không gian vector

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V;$
- 2) $\exists \theta \in V : x + \theta = \theta + x = x, \forall x \in V;$
- 3) $\forall x \in V, \exists (-x) \in V : (-x) + x = x + (-x) = \theta;$
- 4) $x + y = y + x, \forall x, y \in V;$
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R};$
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};$
- 7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};$
- 8) $1.x = x, \forall x \in V.$

Trong đó, $\theta \in V$ được gọi là ***vector không***.

1.2. Không gian vector con (*Vectorial subspace*)

▪ Định nghĩa

Cho kgvt V , tập $W \subset V$ được gọi là *không gian vector con* của V nếu W cũng là một kgvt.

▪ Định lý

Cho kgvt V , tập $W \subset V$ là kgvt con của V nếu:

$$\forall x, y \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ thì } (x + \lambda y) \in W.$$

VD 2.

- Tập $W = \{\theta\}$ là kgvt con của mọi kgvt V .
- Tập $W = (\alpha, 0, \dots, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}$ là kgvt con của \mathbb{R}^n .

§2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa

Trong kgvt V , xét n vector u_i ($i = 1, \dots, n$).

Khi đó:

- Tổng $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

được gọi là một **tổ hợp tuyến tính** của n vector u_i .

- Hệ gồm n vector $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ được gọi là **độc lập tuyến tính** (viết tắt là **đlitt**) nếu:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \theta \text{ thì } \lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

➤ Chương 3. Không gian vector

- Hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ không là độc lập tuyến tính thì được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính*** (viết tắt là *pttt*).

VD 1. Trong \mathbb{R}^2 , xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 2 vector:

$$A = \{u_1 = (1; -1), u_2 = (2; 3)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 (1; -1) + \lambda_2 (2; 3) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ A là độc lập tuyến tính.

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 2. Trong \mathbb{R}^3 , xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 3 vector:
 $B = \{u_1 = (-1; 3; 2), u_2 = (2; 0; 1), u_3 = (0; 6; 5)\}.$

Giải. Ta có:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_3 = 0 \quad (\text{I}). \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ (I) có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

➤ Chương 3. Không gian vector

$$\text{Do } A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) < 3,$$

nên hệ phương trình (I) có nghiệm không tầm thường.

Vậy hệ B là phụ thuộc tuyến tính.

2.2. Định lý

Hệ gồm n vector là *pttt* khi và chỉ khi tồn tại một vector là tổ hợp tuyến tính của $n - 1$ vector còn lại.

Nghĩa là:

$$u_j = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + \lambda_{j+1} u_{j+1} + \dots + \lambda_n u_n.$$

cuu duong than cong . com

▪ Hệ quả

- Hệ có *vector không* thì phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu có một bộ phận của hệ *pttt* thì hệ *pttt*.

2.3. Hệ vector trong \mathbb{R}^n

Xét m vector $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = \overline{1, m}$ trong \mathbb{R}^n .

Ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ được gọi là **ma trận dòng** của hệ m vector $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

VD 6. Hệ $\{u_1 = (1; -1; -2), u_2 = (4; 2; -3)\}$

có ma trận dòng là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

▪ Định lý

Trong \mathbb{R}^n , cho hệ gồm m vector $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ có ma trận dòng là A .

Khi đó:

- Hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r(A) = m$.
- Hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $r(A) < m$.

▪ Hệ quả

- Trong \mathbb{R}^n , hệ có nhiều hơn n vector thì *pttt*.
- Trong \mathbb{R}^n , hệ n vector *đltt* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

VD 7. Xét sự *đl*tt hay *pt*tt của các hệ vector:

a) $B_1 = \{(-1; 2; 0), (2; 1; 1)\};$

b) $B_2 = \{(-1; 2; 0), (1; 5; 3), (2; 3; 3)\}.$

Giải

a) Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Vậy hệ B_1 độc lập tuyến tính.

b) Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 < 3.$$

cuu duong than cong . com

Vậy hệ B_2 phụ thuộc tuyến tính.

cuu duong than cong . com

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 8. Trong \mathbb{R}^3 , tìm điều kiện m để hệ sau là *pttt*:
 $\{(-m; 1; 1), (1 - 4m; 3; m + 2)\}.$

Giải. Ta có: $A = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 - 4m & 3 & m + 2 \end{pmatrix}.$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 3 & 1 - 4m & m + 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1 - m & m - 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ *pttt* $\Leftrightarrow r(A) < 2 \Leftrightarrow m = 1.$

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 9. Trong \mathbb{R}^3 , tìm điều kiện m để hệ sau là *đltt*:
 $\{(m; 1; 1), (1; m; 1), (1; 1; m)\}.$

Giải. Ta có: $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$

Hệ *đltt* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

VD 10. Trong \mathbb{R}^4 , cho 4 vector:

$$u_1 = (1; -1; 0; 1), \quad u_2 = (m; m; -1; 2),$$

$$u_3 = (0; 2; 0; m), \quad u_4 = (2; 2; -m; 4).$$

Điều kiện m để u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4 ?

Giải. Do u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4 nên

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 thỏa:

$$u_1 = au_2 + bu_3 + cu_4.$$

Suy ra hệ:

$$\begin{cases} ma + 2c = 1 \\ ma + 2b + 2c = -1 \\ -a - mc = 0 \\ 2a + mb + 4c = 1 \end{cases} \quad \text{có nghiệm không tầm thường.}$$

➤ Chương 3. Không gian vector

$$\text{Ta có: } A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ m & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 2 & m & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array} \right)$$

➤ Chương 3. Không gian vector

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 - m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - 2m & 1 + m \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 - m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m^3 + m^2 - 4m + 2 \end{array} \right).$$

➤ Chương 3. Không gian vector

Vậy để u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4 thì:

$$r(A) = r \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 + 2m^2 - 8m + 4 = 0 \\ 2 - m^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \vee m = -1 \pm \sqrt{3}.$$

.....

cuu duong than cong . com

§3. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KGVT TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

3.1. Cơ sở của không gian vector

▪ Định nghĩa

Trong kgvt V , hệ n vector $F = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ được gọi là một **cơ sở** (*basic*) của V nếu hệ F là *đltt* và mọi vector của V đều được biểu diễn tuyến tính qua F .

cuu duong than cong . com

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 1. Trong \mathbb{R}^2 , xét hệ $F = \{u_1 = (1; -1), u_2 = (0; 1)\}$.

Ta có: hệ F là độc lập tuyến tính.

Mặt khác, xét vector tùy ý $x = (a; b) \in \mathbb{R}^2$ ta có:

$$x = au_1 + (a + b)u_2.$$

Vậy hệ F là 1 cơ sở của \mathbb{R}^2 .

VD 2. Trong \mathbb{R}^3 , xét hệ 2 vector:

$$B = \{u_1 = (1; 0; 0), u_2 = (0; 1; 0)\}.$$

Ta có: $\alpha u_1 + \beta u_2 \neq (1; 1; 1), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ B không phải là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

VD 3.

- Trong \mathbb{R}^n , hệ n vector:

$$E = \{e_i = (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in}), i = 1, 2, \dots, n\}$$

trong đó: $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$, $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$

được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

▪ Chú ý

Một không gian vector có thể có nhiều cơ sở và số vector (hữu hạn) trong các cơ sở là không đổi.

3.2. Số chiều của không gian vector

▪ Định nghĩa

Số vector có trong 1 cơ sở bất kỳ của không gian vector V được gọi là *số chiều* (*dimension*) của V .

Ký hiệu là: $\dim V$.

cuu duong than cong . com

▪ Chú ý

- Trong \mathbb{R}^n , mọi hệ gồm n vector *đltt* đều là cơ sở.
- Số chiều của kgvt có thể vô hạn. Trong chương trình, ta chỉ xét những kgvt hữu hạn chiều.

3.3. Tọa độ của vector

a) Định nghĩa

Trong kgvt V , cho cơ sở $F = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Vector $x \in V$ tùy ý có biểu diễn tuyến tính một cách

duy nhất qua cơ sở F là $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$.

Ta nói x có **tọa độ đối với cơ sở F** là $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$.

Ký hiệu là: $[x]_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n)^T$.

➤ Chương 3. Không gian vector

▪ Quy ước

Ta viết tọa độ của vector x đối với cơ sở chính tắc E trong \mathbb{R}^n là $[x]$ hoặc viết dưới dạng $x = (\alpha_1; \dots; \alpha_n)$.

VD 5. Trong \mathbb{R}^2 , cho $x = (3; -5)$ và 1 cơ sở:

$$B = \{u_1 = (2; -1), u_2 = (1; 1)\}. \text{ Tìm } [x]_B?$$

Giải. Gọi $[x]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ta có:

$$x = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

➤ Chương 3. Không gian vector

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Vậy $[x]_B$ là $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 7. Trong \mathbb{R}^2 , cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1; 0), u_2 = (0; -1)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = (2; -1), v_2 = (1; 1)\}.$$

Cho biết $[x]_{B_2}$ là $(1; 2)$. Hãy tìm $[x]_{B_1}$?

Giải. Gọi $x = (a; b)$, $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad [x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow x = v_1 + 2v_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = (4; 1). \end{aligned}$$

➤ Chương 3. Không gian vector

$$\bullet [x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Vậy $[x]_{B_1}$ là $(4; -1)$.

b) Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

▪ Ma trận chuyển cơ sở

Trong kgvt V , cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_i\}, B_2 = \{v_i\}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Ma trận $[v_1]_{B_1} [v_2]_{B_1} \dots [v_n]_{B_1}$ được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ B_1 sang B_2 .

Ký hiệu là: $P_{B_1 \rightarrow B_2}$.

Đặc biệt

Trong \mathbb{R}^n , ta có:

$$P_{E \rightarrow B_1} = [u_1] [u_2] \dots [u_n]$$

(ma trận cột của các vector trong B_1).

▪ Công thức đổi tọa độ

$$[x]_{B_1} = P_{B_1 \rightarrow B_2} \cdot [x]_{B_2}.$$

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 8. Trong \mathbb{R}^3 , cho hai cơ sở B_1 và B_2 .

Cho biết $P_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ và $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tìm tọa độ của vector v trong cơ sở B_2 ?

Giải. Ta có:

$$[v]_{B_2} = P_{B_2 \rightarrow B_1} [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[v]_{B_2}$ là $(5; 11; -6)$.

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 9. Tìm ma trận chuyển cơ sở $P_{B_1 \rightarrow B_2}$ trong VD 7.

Giải. Gọi $[v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $[v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ta có:

$$\bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } P_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

➤ Chương 3. Không gian vector

■ Định lý

Trong kgvt V , cho 3 cơ sở B_1, B_2 và B_3 . Khi đó:

$$\bullet P_{B_i \rightarrow B_i} = I_n \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\bullet P_{B_1 \rightarrow B_3} = P_{B_1 \rightarrow B_2} \cdot P_{B_2 \rightarrow B_3};$$

$$\bullet P_{B_1 \rightarrow B_2} = P_{B_2 \rightarrow B_1}^{-1}.$$

■ Hệ quả

Trong \mathbb{R}^n , ta có:

$$P_{B_1 \rightarrow B_2} = P_{B_1 \rightarrow E} P_{E \rightarrow B_2} = P_{E \rightarrow B_1}^{-1} P_{E \rightarrow B_2}.$$

VD 10. Dựa vào hệ quả, giải lại VD 7.

Giải. Ta có:

$$\bullet P_{B_1 \rightarrow B_2} = P_{E \rightarrow B_1}^{-1} P_{E \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet [x]_{B_1} = P_{B_1 \rightarrow B_2} \cdot [x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

§4. KHÔNG GIAN SINH BỞI HỆ VECTOR

4.1. Định nghĩa

Trong kgvt V cho hệ gồm m vector $S = \{u_1, \dots, u_m\}$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là *không gian con sinh bởi S* .

Ký hiệu là: $\langle S \rangle$ hoặc $\text{span}S$.

4.2. Hệ vector trong \mathbb{R}^n

Trong kgvt \mathbb{R}^n , xét hệ $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ ta có:

$$\langle S \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gọi A là ma trận dòng m vector của S .

Khi đó:

- $\dim \langle S \rangle = r(A)$ và $\dim \langle S \rangle \leq n$.
- Nếu $\dim \langle S \rangle = k$ thì mọi hệ con gồm k vector *đltt* của S đều là cơ sở của $\langle S \rangle$.

➤ Chương 3. Không gian vector

VD 1. Trong \mathbb{R}^3 , cho hệ vector:

$$S = \{u_1 = (1; 0; -1), u_2 = (0; 1; -1)\}.$$

Hãy tìm dạng tọa độ của vector $v \in \langle S \rangle$?

Giải. Ta có $v \in \langle S \rangle$, nên:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha; \beta; -\alpha - \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

cuu duong than cong . com

VD 2. Trong \mathbb{R}^4 , cho hệ vector:

$$S = \{(1; 2; 3; 4), (2; 4; 9; 6), (1; 2; 5; 3), (1; 2; 6; 3)\}.$$

Tìm số chiều của không gian sinh $\langle S \rangle$?

Giải. Ta có:

$$\dim \langle S \rangle = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$