

BÀI TẬP THUẬT TOÁN TỐI ƯU

Bài 1 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 5y^2) + x + y$.

- (a) Chứng minh f là hàm lồi.
- (b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên \mathbb{R}^2 .
- (c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (0, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên.
- (d) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (0, 0)$, ta được một dãy $\{(x^k, y^k)\}$. Hãy tìm số k nhỏ nhất sao cho

$$f(x^k, y^k) - f(x^*, y^*) \leq 10^{-2}.$$

Bài 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - c^\top x$, trong đó $A = \text{diag}(1, 5, 25)$ là ma trận đường chéo và $c = (-1, -1, -1)$.

- (a) Chứng minh f là hàm lồi.
- (b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên \mathbb{R}^2 .
- (c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (0, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên.

Bài 3. Cho 2 ánh xạ $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x - y)^2, \quad g(x, y) = (x + y)^2 + (-2x + y + 1)^2$$

- (a) Chứng minh f, g là các hàm lồi.
- (b) Tìm các cực tiểu f, g trên \mathbb{R}^2 .
- (c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (0, 0)$, giá trị của hàm f hay hàm g sẽ hội tụ về giá trị tối ưu nhanh hơn?

Bài 4. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}y^2$, với $a \geq 1$.

Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (a, 1)$, bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh bước lặp thứ k sẽ là

$$(x^k, y^k) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k (a, (-1)^k a).$$

Bài 5. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \frac{1}{2}(-2x + y)^2 + y^4$. Xác định hướng Newton tại điểm $x = (1, 2)$.

Bài 6. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = (x - y)^2 + (2x + y - 3)^2$.

- (a) Chứng minh f là hàm lồi.
- (b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên \mathbb{R}^2 .
- (c) Bằng thuật toán Newton với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (0, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên để được (x^1, y^1) . Có nhận xét gì về điểm (x^1, y^1) ?

Bài 7. Bằng thuật toán pure Newton (hướng soát $t = 1$), với điểm xuất phát tự chọn, hãy xây dựng một dãy lặp x^k để tìm cực tiểu của bài toán sau

$$\text{Min } f(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad \text{s.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Hãy cho biết x^k có hội tụ toàn phương về điểm cực tiểu hay không?

Bài 8. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4.$$

- (a) Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên \mathbb{R}^2 .
- (b) Bằng thuật toán pure Newton, xuất phát từ điểm $(x^0, y^0) = (-1, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên để được (x^1, y^1) .

Bài 9. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad 2x - y - 1 \leq 0.$$

- (a) Chứng minh (P) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.
- (b) Bằng điều kiện KKT tìm nghiệm tối ưu x^* của (P).
- (c) Xây dựng bài toán hàm chặn cho bài toán (P), tìm nghiệm $x^*(t)$ của bài toán hàm chặn. Chứng minh $x^*(t) \rightarrow x^*$ khi $t \rightarrow 0^+$.

Bài 10. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad x_1 - x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

- (a) Chứng minh (P) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.
- (b) Bằng điều kiện KKT tìm nghiệm tối ưu x^* của (P).
- (c) Xây dựng bài toán hàm chặn cho bài toán (P), tìm nghiệm $x^*(t)$ của bài toán hàm chặn. Chứng minh $x^*(t) \rightarrow x^*$ khi $t \rightarrow 0^+$.

Bài 11. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad x \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Chứng minh (P) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.
- (b) Bằng điều kiện KKT tìm nghiệm tối ưu x^* của (P).
- (c) Xây dựng bài toán hàm chặn cho bài toán (P), tìm nghiệm $x^*(t)$ của bài toán hàm chặn. Chứng minh $x^*(t) \rightarrow x^*$ khi $t \rightarrow 0^+$.

Bài 12. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \geq -1, \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Bằng các phương pháp đã biết, hãy tìm nghiệm tối ưu x^* của (P).
- (b) Xây dựng bài toán hàm chẵn cho bài toán (P), tìm nghiệm $x^*(t)$ của bài toán hàm chẵn. Chứng minh $x^*(t) \rightarrow x^*$ khi $t \rightarrow 0^+$.

Bài 13. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Bằng các phương pháp đã biết, hãy tìm nghiệm tối ưu x^* của (P).
- (b) Xây dựng bài toán hàm chẵn cho bài toán (P), tìm nghiệm $x^*(t)$ của bài toán hàm chẵn. Chứng minh $x^*(t) \rightarrow x^*$ khi $t \rightarrow 0^+$.

Bài 14. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 \quad \text{s.t.} \quad 1 - x^2 - xy = 0$$

- (a) Chứng minh điều kiện Mangasarian-Fromovitz thỏa.
- (b) Giải hệ KKT, tìm các ứng viên nghiệm
- (c) Tìm nghiệm của bài toán trên.

Bài 15. Xét bài toán sau

$$(P) \quad \text{Min} \quad xy \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Giải hệ KKT, tìm các ứng viên nghiệm
- (b) Tìm nghiệm của bài toán trên.

CHÚC CÁC EM ÔN TẬP THI TỐT !

GV: TS. Nguyễn Minh Tùng

Email: nmtung@hcmus.edu.vn