

CHƯƠNG V

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

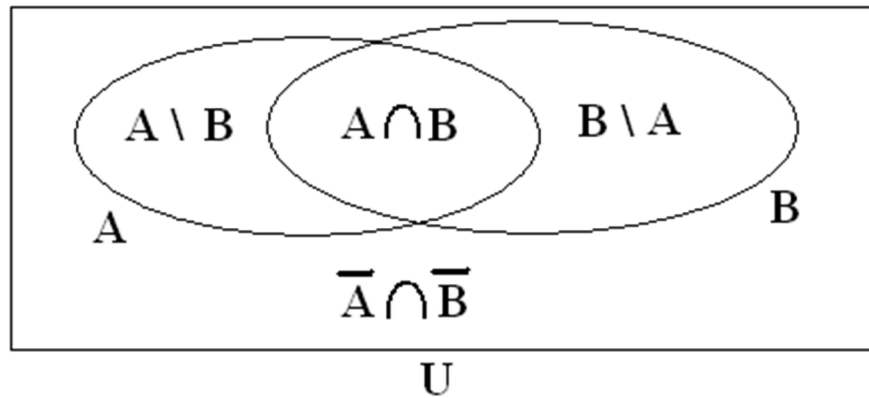
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỒ VENN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B và U thỏa $A, B \subset U$ (U gọi là *tập hợp vũ trụ*). $\bar{A} = U \setminus A$ và $\bar{B} = U \setminus B$ lần lượt là phần bù của A và B trong U . Khi đó :

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$

b) Từ $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B)$, ta suy ra

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A \cup B| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$



Ví dụ:

a) Lớp học U có 120 sinh viên trong đó có 90 sinh viên học tiếng Đức, 70 sinh viên học tiếng Pháp và 55 sinh viên học cả tiếng Đức và tiếng Pháp.

Đặt $A = \{x \in U \mid x \text{ học tiếng Đức}\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ học tiếng Pháp}\}$ thì

$A \cap B = \{x \in U \mid x \text{ học tiếng Đức và tiếng Pháp}\}.$

Số sinh viên trong lớp L học ít nhất một ngoại ngữ (Đức hay Pháp) là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 90 + 70 - 55 = 105.$$

Số sinh viên trong lớp L không học cả tiếng Đức lẫn tiếng Pháp là

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| = 120 - (90 + 70) + 55 = 15.$$

b) Có bao nhiêu dãy số gồm 10 chữ số khác nhau trong hệ thập phân sao cho chữ số đầu ≤ 7 và chữ số cuối ≥ 3 (chẳng hạn như dãy 6913852704) ?

Đặt U là tập hợp các dãy số gồm 10 chữ số khác nhau trong hệ thập phân,

$A = \{ x \in U \mid x \text{ có chữ số đầu } \geq 8 \}$ và $B = \{ x \in U \mid x \text{ có chữ số cuối } \leq 2 \}$ thì

$A \cap B = \{ x \in U \mid x \text{ có chữ số đầu } \geq 8 \text{ và có chữ số cuối } \leq 2 \}$ và

$A \cup B = \{ x \in U \mid x \text{ có chữ số đầu } \geq 8 \text{ hay có chữ số cuối } \leq 2 \}$.

Ta có $|U| = 10!$, $|A| = 2.9!$, $|B| = 3.9!$ và $|A \cap B| = 2.3.8!$.

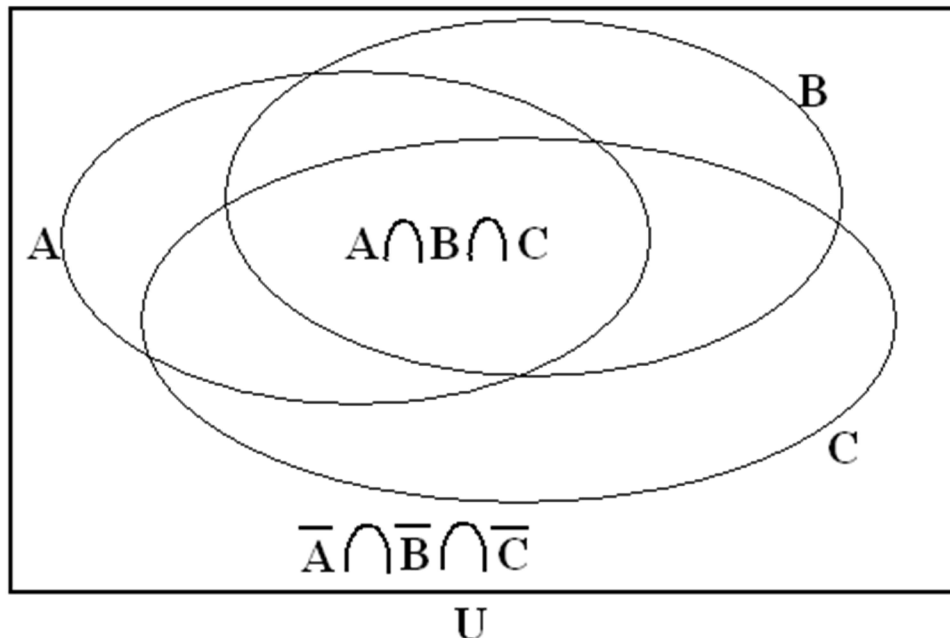
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5.9! - 6.8! = 5(362880) - 6(40320) = 1572480$.

Số dãy số cần tìm là $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| = |U| - |A \cup B|$
 $= 10! - 1572480 = 3628800 - 1572480 = 2056320$.

1.2/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp hữu hạn A, B, C và U thỏa $A, B, C \subset U$ (U gọi là tập hợp vũ trụ). \bar{A}, \bar{B} và \bar{C} lần lượt là phần bù của A, B và C trong U . Khi đó

a) $|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

b) Do $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C)$ nên $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - |A \cup B \cup C|$
 $= |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$.



Ví dụ:

a) Đoàn du lịch U có 380 người trong đó có 190 người biết tiếng Anh, 170 người biết tiếng Đức, 150 người biết tiếng Ý, 70 người biết tiếng Anh và Đức, 60 người biết tiếng Anh và Ý, 50 người biết tiếng Đức và Ý và 20 người biết cả ba thứ tiếng. Đặt $A = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Anh}\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Đức}\}$, $C = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Ý}\}$. Do đó $A \cap B = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Anh và Đức}\}$, $A \cap C = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Anh và Ý}\}$, $B \cap C = \{x \in U \mid x \text{ biết tiếng Đức và Ý}\}$, $A \cap B \cap C = \{x \in U \mid x \text{ biết cả ba thứ tiếng Anh, Đức và Ý}\}$ và $A \cup B \cup C = \{x \in U \mid x \text{ biết ít nhất một trong ba thứ tiếng Anh, Đức, Ý}\}$. Ta có

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$
$$= (190 + 170 + 150) - (70 + 60 + 50) + 20 = 350.$$

Số người trong đoàn du lịch U không biết cả ba thứ tiếng Anh, Đức và Ý là

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 380 - 350 = 30.$$

b) $\forall a \in \mathbf{R}$, $[a]$ là số nguyên lớn nhất $\leq a$. Ta nói $[a]$ là phần nguyên non của a .

$\forall n, k \in \mathbf{N}^*$, số lượng các số nguyên dương $\leq n$ mà chia hết cho k là $[n/k]$.

Ta có k nguyên tố cùng nhau với $360 = 2^3 3^2 5^1 \Leftrightarrow k$ không chia hết cho 2, 3 và 5.

$U = \{k \in \mathbf{N} \mid 1 \leq k \leq 1000\}$, $A = \{k \in U \mid k : 2\}$, $B = \{k \in U \mid k : 3\}$, $C = \{k \in U \mid k : 5\}$,

$A \cap B = \{k \in U \mid k : 6\}$, $A \cap C = \{k \in U \mid k : 10\}$, $B \cap C = \{k \in U \mid k : 15\}$ và

$A \cap B \cap C = \{k \in U \mid k : 30\}$. Ta có $|U| = 1000$, $|A| = [1000/2] = 500$,

$|B| = [1000/3] = 333$, $|C| = [1000/5] = 200$, $|A \cap B| = [1000/6] = 166$,

$|A \cap C| = [1000/10] = 100$, $|B \cap C| = [1000/15] = 66$, $|A \cap B \cap C| = [1000/30] = 33$.

Số lượng số nguyên dương ≤ 1000 mà nguyên tố cùng nhau với 360 là $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| =$

$= |U| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| = 266$.

$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 734$.

II. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ TỔNG QUÁT:

2.1/ **ĐỊNH LÝ:** Cho tập hợp (vũ trụ) U hữu hạn chứa các tập hợp con A_1, A_2, \dots và A_n .

Đặt $S_1 = \sum_{i=1}^n |A_i|$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$, $S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, \dots , $S_n = |\bigcap_{i=1}^n A_i|$. Khi đó

a) $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} S_i = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n$.

b) Từ $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$, ta suy ra

$$|\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}| = |U| - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} S_i = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n.$$

Ví dụ:

a) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x + y + z + t = 20$ (*) thỏa
 $x \leq 5, y \leq 6, z \leq 7$ và $t \leq 8$.

Đặt $U = \{ \text{các nghiệm nguyên không âm của (*)} \}$, $A = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \geq 6 \}$,

$B = \{ (x, y, z, t) \in U \mid y \geq 7 \}$, $C = \{ (x, y, z, t) \in U \mid z \geq 8 \}$ và $D = \{ (x, y, z, t) \mid t \geq 9 \}$.

Ta có $|U| = K_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$, $|A| = K_4^{14} = C_{17}^3 = 680$, $|B| = 560$, $|C| = 455$, $|D| = 364$,

$$|A \cap B| = K_4^7 = C_{10}^3 = 120, |A \cap C| = 84, |A \cap D| = |B \cap C| = 56, |B \cap D| = 35,$$

$$|C \cap D| = 20, |A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |A \cap C \cap D| = 0$$

và $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. Do đó $S_1 = |A| + |B| + |C| + |D| = 2059$,

$$S_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| = 371,$$

$$S_3 = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D| = 0 \text{ và } S_4 = 0.$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D} = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \leq 5, y \leq 6, z \leq 7 \text{ và } t \leq 8 \},$$

$$A \cup B \cup C \cup D = \{ (x, y, z, t) \in U \mid x \geq 6 \text{ hay } y \geq 7 \text{ hay } z \geq 8 \text{ hay } t \geq 9 \}.$$

Ta có số nghiệm cần tìm là $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 83$.

Ngoài ra, $|A \cup B \cup C \cup D| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 1688$.

b) Tính số cách rút 4 lá bài từ bộ bài có 52 lá (mỗi dạng *cơ*, *chuồn*, *rô*, *bích* có 13 lá bài tương ứng) sao cho chỉ có tối đa 3 dạng xuất hiện trong 4 lá bài được rút.
Suy ra số cách rút 4 lá bài từ bộ bài có 52 lá sao cho có đủ 4 dạng xuất hiện trong 4 lá bài được rút.

Đặt U là tập hợp các cách rút 4 lá bài (từ bộ bài có 52 lá),

$A_1 = \{\text{cách rút 4 lá bài không có lá cơ}\}$, $A_2 = \{\text{cách rút 4 lá bài không có lá chuồn}\}$,

$A_3 = \{\text{cách rút 4 lá bài không có lá rô}\}$ và $A_4 = \{\text{cách rút 4 lá bài không có lá bích}\}$.

Ta có $|U| = C_{52}^4 = 270725$, $|A_i| = C_{39}^4 = 82251$ ($1 \leq i \leq 4$), $|A_i \cap A_j| = C_{26}^4 = 14950$

($1 \leq i < j \leq 4$), $|A_i \cap A_j \cap A_k| = C_{13}^4 = 715$ ($1 \leq i < j < k \leq 4$), $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

$$S_1 = \sum_{i=1}^4 |A_i| = 329004, S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| = 89700, S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 2860, S_4 = 0.$$

Số cách rút 4 lá bài chỉ có tối đa 3 dạng là $|\bigcup_{i=1}^4 A_i| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 242.164$.

Số cách rút 4 lá bài có đủ 4 dạng là $|\bigcap_{i=1}^4 \overline{A_i}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 28.561$.

c) Cho các tập hợp X và Y với $|X| = 7$ và $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ($|Y| = 4$).

Tính số ánh xạ *toàn ánh* và số ánh xạ *không toàn ánh* từ X vào Y .

Đặt U là tập hợp các ánh xạ từ X vào Y , $A_i = \{f: X \rightarrow Y \mid y_i \notin f(X)\}$ ($1 \leq i \leq 4$).

Ta có $|U| = 4^7 = 16384$, $|A_i| = 3^7 = 2187$ ($1 \leq i \leq 4$), $|A_i \cap A_j| = 2^7 = 128$

($1 \leq i < j \leq 4$), $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^7 = 1$ ($1 \leq i < j < k \leq 4$), $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

$$S_1 = \sum_{i=1}^4 |A_i| = 8748, S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| = 768, S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 4 \text{ và } S_4 = 0.$$

Số ánh xạ *không toàn ánh* từ X vào Y là $|\bigcup_{i=1}^4 A_i| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 7.984$.

Số ánh xạ *toàn ánh* từ X vào Y là $|\bigcap_{i=1}^4 \overline{A_i}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 8.400$.

2.2/ ĐỊNH LÝ: Cho tập hợp (vũ trụ) U hữu hạn chứa các tập hợp con A_1, A_2, \dots và A_n .

Khi đó, $\forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta có

a) Số phần tử của U thuộc về *đúng* m *tập hợp* (trong số các tập A_1, A_2, \dots và A_n)

$$\text{là } N_m = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m+i}^i S_{m+i} = S_m - C_{m+1}^1 S_{m+1} + C_{m+2}^2 S_{m+2} + \dots + (-1)^{n-m} C_n^{n-m} S_n.$$

b) Số phần tử của U thuộc về *ít nhất* m *tập hợp* (trong số các tập A_1, A_2, \dots và A_n)

$$\text{là } N_m^* = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{m-1+i}^i S_{m+i} = S_m - C_m^1 S_{m+1} + C_{m+1}^2 S_{m+2} + \dots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} S_n.$$

Ví dụ:

a) Tính số chuỗi tứ phân (mỗi ký tự dùng các chữ số 0, 1, 2, 3) có độ dài 6 mà chứa đúng ba chữ số 2. Tính số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa ít nhất ba chữ số 2.

Đặt U là tập hợp các chuỗi tứ phân có độ dài 6 ($|U| = 4^6 = 4096$),

$A_i = \{ \text{các chuỗi tứ phân có độ dài 6 có chữ số ở vị trí thứ } i \text{ là } 2 \} \ (1 \leq i \leq 6)$.

Ta có $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4^3 = 64 \ (1 \leq i < j < k \leq 6)$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 4^2 = 16 \ (1 \leq i < j < k < r \leq 6)$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r \cap A_s| = 4^1 = 4 \ (1 \leq i < j < k < r < s \leq 6)$ và

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 1$.

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 64 C_6^3 = 1280, S_4 = \sum_{1 \leq i < j < k < r \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 16 C_6^4 = 240,$$

$$S_5 = \sum_{1 \leq i < j < k < r < s \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r \cap A_s| = 24 \text{ và } S_6 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 1.$$

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa đúng ba chữ số 2 là

$$N_3 = S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^2 S_5 - C_6^3 S_6 = 1280 - 4(240) + 10(24) - 20(1) = 540.$$

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa ít nhất ba chữ số 2 là

$$N_3^* = S_3 - C_3^1 S_4 + C_4^2 S_5 - C_5^3 S_6 = 1280 - 3(240) + 6(24) - 10(1) = 694.$$

Số chuỗi tứ phân có độ dài 6 chứa không quá hai chữ số 2 là $4.096 - 694 = 3.402$.

b) Có 5 lá thư (có nội dung khác nhau) được xếp ngẫu nhiên vào 5 phong bì có ghi sẵn 5 địa chỉ khác nhau cần gửi (mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư). Tính số cách xếp mà không có lá thư nào bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gửi. Tính số cách xếp mà có đúng 3 lá thư bỏ đúng vào các phong bì có địa chỉ cần gửi. Tính số cách xếp mà có ít nhất 3 lá thư bỏ đúng vào các phong bì có địa chỉ cần gửi.

Đặt U là tập hợp các cách xếp 5 lá thư vào 5 phong bì đã nói trên,

$A_i = \{\text{cách xếp 5 lá thư vào 5 phong bì mà lá thư thứ } i \text{ gửi đúng địa chỉ}\} (1 \leq i \leq 5).$

Ta có $|U| = 5! = 120, |A_i| = 4! = 24 (1 \leq i \leq 5), |A_i \cap A_j| = 3! = 6 (1 \leq i < j \leq 5),$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2! = 2 (1 \leq i < j < k \leq 5), |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$ và

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 1! = 1 (1 \leq i < j < k < r \leq 5).$

$$S_1 = \sum_{i=1}^5 |A_i| = 120, S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| = 60, S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 20,$$

$$S_4 = \sum_{1 \leq i < j < k < r \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| = 5 \text{ và } S_5 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1.$$

Số cách xếp mà không có lá thư nào bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gửi là

$$|\bigcap_{i=1}^5 \overline{A_i}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = 44.$$

Số cách xếp mà có đúng ba lá thư bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gửi là

$$N_3 = S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^2 S_5 = 20 - 4(5) + 10(1) = 10.$$

Số cách xếp mà có ít nhất ba lá thư bỏ đúng vào phong bì có địa chỉ cần gửi là

$$N_3^* = S_3 - C_3^1 S_4 + C_4^2 S_5 = 20 - 3(5) + 6(1) = 11.$$

III. ĐA THỨC QUÂN XE:

3.1/ KHÁI NIỆM: Trên bàn cờ vua (hay cờ tướng), mỗi quân cờ có một trong hai màu trắng và đen (hoặc xanh và đỏ, ...). Trong đó *quân Xe* là một quân cờ quan trọng và mỗi loại màu có hai quân Xe. Quân Xe có thể “ ăn ” bất kỳ một quân cờ khác màu nào ở trên cùng một hàng hay một cột (nếu không có một quân cờ khác ngăn trở).

Một số bài toán đếm được đưa về dạng “ *tính số cách đặt k quân Xe trên một bảng (tất nhiên hai quân Xe bất kỳ không ở trên cùng một hàng hay một cột của bàn cờ)* ”.

3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Xét $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ và $S_n = \{\sigma \mid \sigma : I_n \rightarrow I_n \text{ là song ánh}\} (n \geq 1)$.

a) Mỗi $\sigma \in S_n$ xem như là *một phép hoán vị trên n phần tử của I_n* . Mỗi $\sigma \in S_n$ được xem như cách đặt n quân Xe (cùng màu) vào các ô có tọa độ $(i, \sigma(i))$ với $1 \leq i \leq n$ của một bảng có $n \times n$ ô vuông (hiển nhiên không có hai quân xe nào cùng hàng hay cùng cột vì $i \neq j \Leftrightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$ khi $1 \leq i, j \leq n$).

b) Nếu $\sigma \in S_n$ có $\sigma(i) = k_i$ ($1 \leq i \leq n$) thì ta viết đơn giản $\sigma = (k_1 k_2 \dots k_n)$.

Ví dụ: $\sigma \in S_4$ có $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$ được ghi gọn là $\sigma = (3241)$.

σ được xem như cách đặt 4 quân Xe (cùng màu) vào các ô có các tọa độ lần lượt là $(1, 3), (2, 2), (3, 4)$ và $(4, 1)$ của một bảng có 4×4 ô vuông như sau :

	1	2	3	4
1			•	
2		•		
3				•
4	•			

3.3/ ĐỊNH NGHĨA: Cho các tập hợp con bất kỳ $X_1, X_2, \dots, X_n \subset I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Đặt $P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i (1 \leq i \leq n)\}$. Tập X_i gọi là *vị trí cấm của i* ($1 \leq i \leq n$). Ta gọi mỗi $\sigma \in P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ là *một phép hoán vị trên n phần tử với các vị trí cấm tương ứng X_1, X_2, \dots và X_n* .

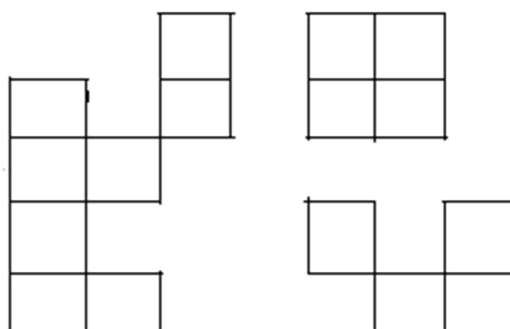
Ví dụ: $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có các tập con $X_1 = \{2, 5\}, X_2 = \{4\}, X_3 = \emptyset, X_4 = \{1, 5\}$ và $X_5 = \{2, 3, 4\}$. Ta có $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(i) \notin X_i (1 \leq i \leq 5)\}$. Việc tìm $|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)|$ tương đương với việc tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô trong một bảng 5×5 dưới đây và không được xếp các quân vào các ô bị cấm có đánh dấu (tất nhiên không có hai quân Xe nào cùng hàng hoặc cùng cột) :

	1	2	3	4	5
1		•			•
2				•	
3					
4	•				•
5		•	•	•	

3.4/ ĐỊNH NGHĨA: Một bàn cờ được hiểu là một tập hợp con khác \emptyset gồm một số ô vuông nào đó của một bảng gồm $p \times q$ ô vuông ($p, q \geq 1$).

Ví dụ:

a) Bàn cờ sau là một số ô vuông của một bảng 5×7 :



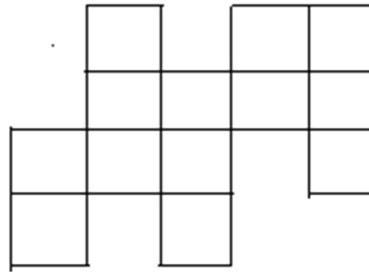
b) Ta cần xếp 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi người một việc khác nhau) với các yêu cầu: A không làm việc 1 và 3, B không làm việc 1, C không làm việc 4 và D không làm việc 2, 4 và 5.

Ta biểu diễn 4 người và 5 việc trên một bảng 4×5 như sau :

	1	2	3	4	5
A	•		•		
B	•				
C				•	
D		•		•	•

Việc xếp 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 chính là việc xếp 4 quân Xe vào bảng trên nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu (hai quân Xe

bất kỳ không cùng hàng hay cùng cột). Xóa các ô cấm, ta được bàn cờ sau:



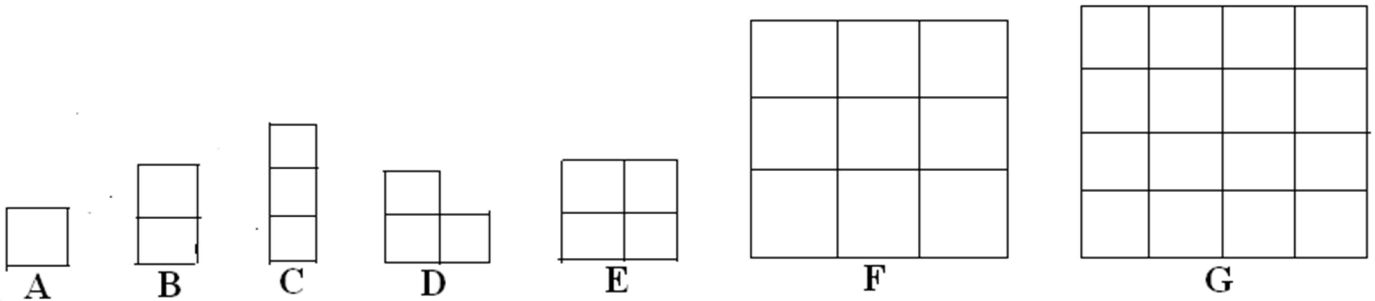
3.5/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $1 \leq k \leq m$ và C là một bàn cờ có m ô.

Đặt $r_k(C)$ là số cách xếp k quân Xe (cùng màu) trên bàn cờ C (tất nhiên hai quân Xe bất kỳ không cùng hàng hay cùng cột).

Đa thức quân xe của bàn cờ C được định nghĩa là $R(C, x) = \sum_{k=0}^m r_k(C) x^k$.

Đề ý $r_0(C) = 1$, $r_1(C) = m$ và $1 \leq \deg R(C, x) \leq m$. Hơn nữa việc hoán vị hai dòng (hoặc hai cột) của một bàn cờ sẽ không làm thay đổi đa thức quân Xe của bàn cờ.

Ví dụ: Tìm đa thức quân xe của các bàn cờ A, B, C, D, E, F và G dưới đây:



$R(A, x) = 1 + x$, $R(B, x) = 1 + 2x$, $R(C, x) = 1 + 3x$, $R(D, x) = 1 + 3x + x^2$ và

$R(E, x) = 1 + 4x + 2x^2$ (lần lượt có 1 và 2 cách đặt hai quân Xe vào D và E).

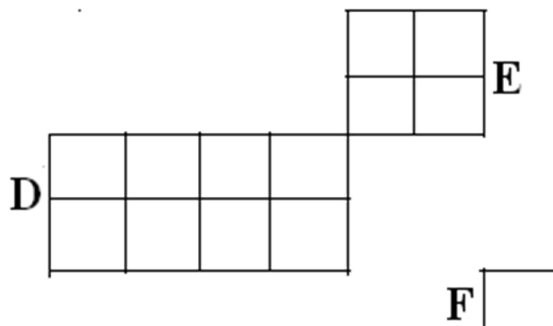
$R(F, x) = 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3$ (Khi xếp 2 quân Xe, ta có $C_3^2 = 3$ cách chọn hàng cho chúng. Với mỗi cách chọn hàng, quân 1 có 3 cách chọn cột và quân 2 có 2 cách chọn cột. Do đó $r_2(F) = 3 \times 3 \times 2 = 18$. Khi xếp 3 quân Xe, ta có $C_3^3 = 1$ cách chọn hàng cho chúng. Với mỗi cách chọn hàng, quân 1 có 3 cách chọn cột, quân 2 có 2 cách chọn cột và quân 3 có 1 cách chọn cột. Do đó $r_3(F) = 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$).

$$R(G, x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4 \text{ [lý luận tương tự như } R(F, x) \text{].}$$

3.6/ ĐỊNH NGHĨA: Cho các tập hợp con A và B khác \emptyset của bàn cờ C .

Ta nói A và B là *rời nhau* nếu không có ô nào của A cùng hàng hay cùng cột với một ô khác của B . Tương tự cho trường hợp các tập con *rời nhau từng đôi một* của bàn cờ C .

Ví dụ: Các tập con D, E, F rời nhau từng đôi một của bàn cờ C :



3.7/ MỆNH ĐỀ: Nếu bàn cờ C là *phần hội của các tập hợp con* A và B rời nhau thì $R(C, x) = R(A, x) \cdot R(B, x)$. Kết quả tương tự cho trường hợp các tập con *rời nhau từng đôi một* của bàn cờ C .

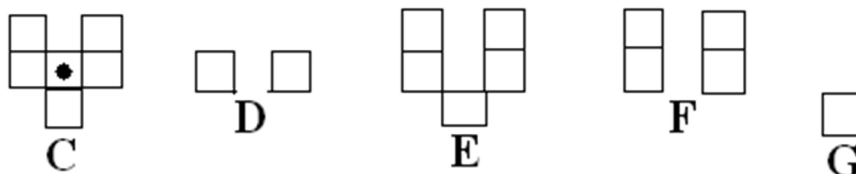
Ví dụ: Ta xem lại các tập con D, E, F rời nhau từng đôi một của bàn cờ C ở trên.

$$\text{Ta có } R(C, x) = R(D, x) \cdot R(E, x) \cdot R(F, x) = (1 + 8x + 12x^2)(1 + 4x + 2x^2)(1 + x).$$

3.8/ MỆNH ĐỀ: Xét Δ là một ô tùy ý của bàn cờ C . Gọi D là bàn cờ có từ C bằng cách *xóa hàng và cột chứa* Δ . Gọi E là bàn cờ có từ C bằng cách *xóa ô* Δ .

$$\text{Khi đó } R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x).$$

Ví dụ: a) Cho các bàn cờ C, D, E, F và G như sau :

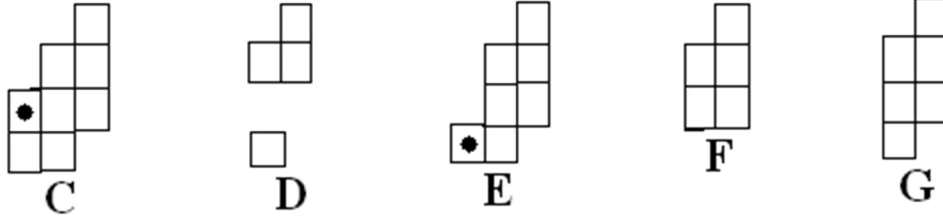


Trong C , chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có

$$R(C, x) = xR(D, x) + R(E, x) = x(1 + 2x) + R(F, x) \cdot R(G, x) \text{ [} F \text{ và } G \text{ rời nhau trong } E \text{]}$$

$$= x(1 + 2x) + (1 + 4x + 2x^2)(1 + x) = 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3.$$

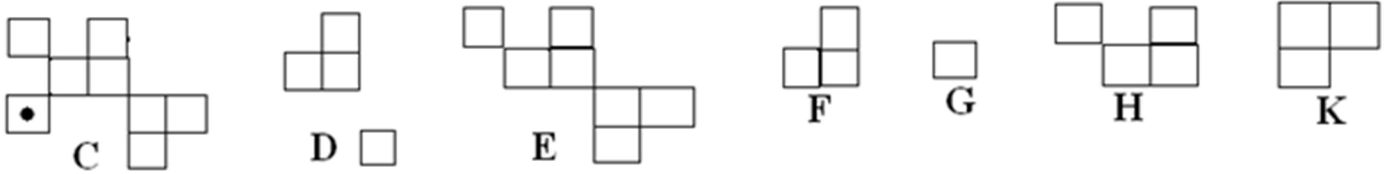
b) Cho các bàn cờ C, D, E, F và G như sau :



Trong C và E, chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có

$$\begin{aligned} R(C, x) &= xR(D, x) + R(E, x) = x(1 + 4x + 3x^2) + [xR(F, x) + R(G, x)] = \\ &= x(1 + 4x + 3x^2) + [x(1 + 5x + 4x^2) + (1 + 6x + 7x^2)] = 1 + 8x + 16x^2 + 7x^3. \end{aligned}$$

c) Cho các bàn cờ C, D, E, F, G, H và K như sau :



Trong C, chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có F và G rời nhau trong D. Tương tự, H và K rời nhau trong E. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} R(C, x) &= xR(D, x) + R(E, x) = xR(F, x).R(G, x) + R(H, x).R(K, x) \\ &= x(1 + 3x + x^2)(1 + x) + (1 + 4x + 3x^2)(1 + 3x + x^2) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4. \end{aligned}$$

3.9/ ĐỊNH LÝ: Cho các tập hợp con bất kỳ $X_1, X_2, \dots, X_n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$).

Đặt $P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i (1 \leq i \leq n) \}$.

Gọi C là bàn cờ được tạo ra từ các ô bị cấm liên quan đến X_1, X_2, \dots, X_n . Khi đó

$$|P(X_1, X_2, \dots, X_n)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! r_k(C).$$

Ví dụ:

a) $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \emptyset$

và $X_5 = \{2, 5\}$. Ta có $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(i) \notin X_i (1 \leq i \leq 5) \}$.

Tìm $|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)|$ bằng cách tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô

trong bàn cờ 5×5 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :

	1	2	3	4	5
1			•	•	
2					•
3	•		•	•	
4					
5		•			•

Lần lượt hoán vị (dòng 1 với dòng 4) và (cột 1 với cột 5) , ta có bảng mới sau:

	1	2	3	4	5
1					
2	•				
3			•	•	•
4			•	•	
5	•	•			

Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới. Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau A và B như sau :

•		
•	•	

A

•	•	•
•	•	

B

$$R(C, x) = R(A, x).R(B, x) = (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$$

$$|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)| = \sum_{k=0}^5 (-1)^k (5-k)! r_k(C) = 5! - 8.4! + 20.3! - 17.2! + 4.1! = 18.$$

- b) Ta cần tính số cách xếp 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 việc 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi người một việc khác nhau) với các yêu cầu: A không làm việc 2 và 5, B không làm việc 5, C không làm việc 3 và D không làm việc 1, 3 và 4.
- Ta thêm vào “ người ảo E ” (người này có thể làm bất kỳ việc nào trong 5 việc nói trên). Như vậy ta tính số cách xếp 5 người A, B, C, D, E vào 5 việc 1,

2, 3, 4, 5 (mỗi người một việc khác nhau), nghĩa là tính $|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)|$ với $X_1 = \{2, 5\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{3\}$, $X_4 = \{1, 3, 4\}$ và $X_5 = \emptyset$. Như vậy ta cần tính số cách xếp 5 quân Xe vào các ô trong bảng 5×5 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :

	1	2	3	4	5
A		•			•
B					•
C			•		
D	•		•	•	
E					

Hoán vị cột 1 với cột 5, ta có bảng mới như sau:

	1	2	3	4	5
A	•	•			
B	•				
C			•		
D			•	•	•
E					

Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới. Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau A và B như sau :



$$R(C, x) = R(A, x).R(B, x) = (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4.$$

$$|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)| = \sum_{k=0}^5 (-1)^k (5-k)! r_k(C) = 5! - 7.4! + 15.3! - 10.2! + 2.1! = 24.$$

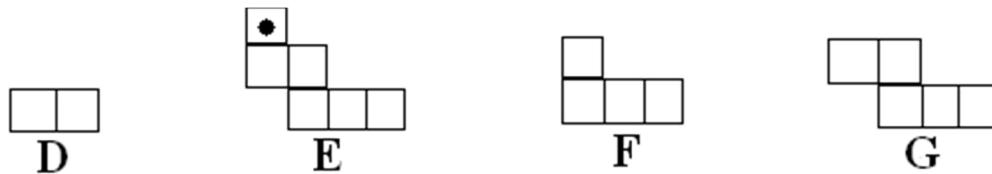
c) Cho $H = \{a, b, c, d\}$ và $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tính số đơn ánh $f: H \rightarrow K$ thỏa

$f(a) \notin \{1, 2\}$, $f(b) \notin \{3\}$, $f(c) \notin \{3, 4\}$ và $f(d) \notin \{4, 5, 6\}$.

Đặt $H' = H \cup \{u, v\}$. Mỗi đơn ánh $f: H \rightarrow K$ có thể mở rộng thành 2 song ánh f_1 và f_2 [có 2 cách xác định ảnh cho $f(u)$ và $f(v)$]. Số đơn ánh cần tìm sẽ bằng nửa số song ánh $g: H' \rightarrow K$ thỏa $g(a) \notin \{1, 2\}$, $g(b) \notin \{3\}$, $g(c) \notin \{3, 4\}$ và $g(d) \notin \{4, 5, 6\}$. Việc tìm số song ánh g nói trên tương đương với việc tính $|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)|$ với $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{3, 4\}$, $X_4 = \{4, 5, 6\}$ và $X_5 = X_6 = \emptyset$. Như vậy ta cần tính số cách xếp 6 quân Xe vào các ô trong bảng 6×6 dưới đây nhưng phải tránh các ô bị cấm có đánh dấu :

	1	2	3	4	5	6
f(a)	•	•				
f(b)			•			
f(c)			•	•		
f(d)				•	•	•
f(u)						
f(v)						

Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm trên bàn cờ mới. Ta thấy C được tạo bởi hai bàn cờ rời nhau D và E dưới đây. Trong E , chọn Δ là ô được đánh dấu.



$$\begin{aligned} \text{Ta có } R(C, x) &= R(D, x) \cdot R(E, x) = R(D, x) [xR(F, x) + R(G, x)] = \\ &= (1 + 2x) [x(1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 5x^2)] = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 4x^4. \end{aligned}$$

$$|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)| = \sum_{k=0}^6 (-1)^k (6-k)! r_k(C) = 6! - 8.5! + 21.4! - 20.3! + 4.2! = 152.$$

Như vậy số đơn ánh cần tìm sẽ là $(152 / 2) = 76$.

Ghi chú:

* Khi tìm đa thức quân Xe của một bàn cờ, ta thường phân tích nó thành các bàn cờ

chỉ có hai dòng hay hai cột để dễ dàng tính trực tiếp đa thức quân Xe của chúng.

* Các bài toán trong **3.9** vẫn có thể giải bằng *nguyên lý bù trừ* (tuy khá rườm rà).

Ta giải a) chẳng hạn. Đặt $A_1 = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(1) = 3 \text{ hay } 4\}$, $A_2 = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(2) = 5\}$,

$A_3 = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(3) = 1, 3 \text{ hay } 4\}$, $A_4 = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(5) = 2 \text{ hay } 5\}$ và $U = S_5$.

Ta có $|U| = 5! = 120$, $|A_1| = |A_4| = 2 \cdot 4! = 48$, $|A_2| = 4! = 24$, $|A_3| = 3 \cdot 4! = 72$,

$|A_1 \cap A_2| = 2 \cdot 3! = 12$, $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = 4 \cdot 3! = 24$, $|A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 3! = 18$,

$|A_2 \cap A_4| = 3! = 6$, $|A_3 \cap A_4| = 6 \cdot 3! = 36$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4 \cdot 2! = 8$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 2 \cdot 2! = 4$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 8 \cdot 2! = 16$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 3 \cdot 2! = 6$,

và $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4 \cdot 1! = 4$.

Suy ra $S_1 = \sum_{i=1}^4 |A_i| = 192$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| = 120$, $S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 34$ và

$S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4$.

Do đó $|P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)| = \left| \bigcap_{i=1}^5 \overline{A_i} \right| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 18$.
