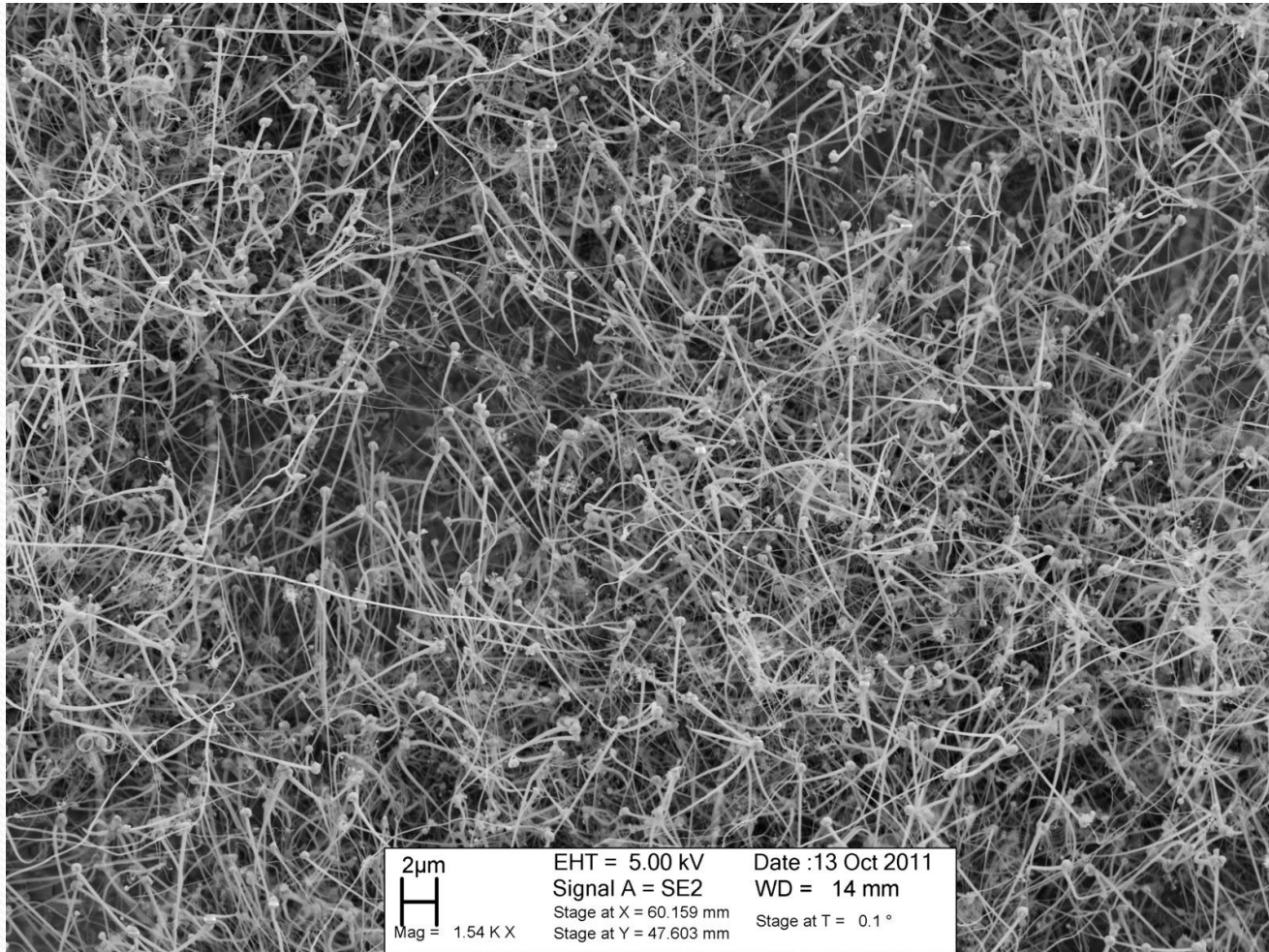


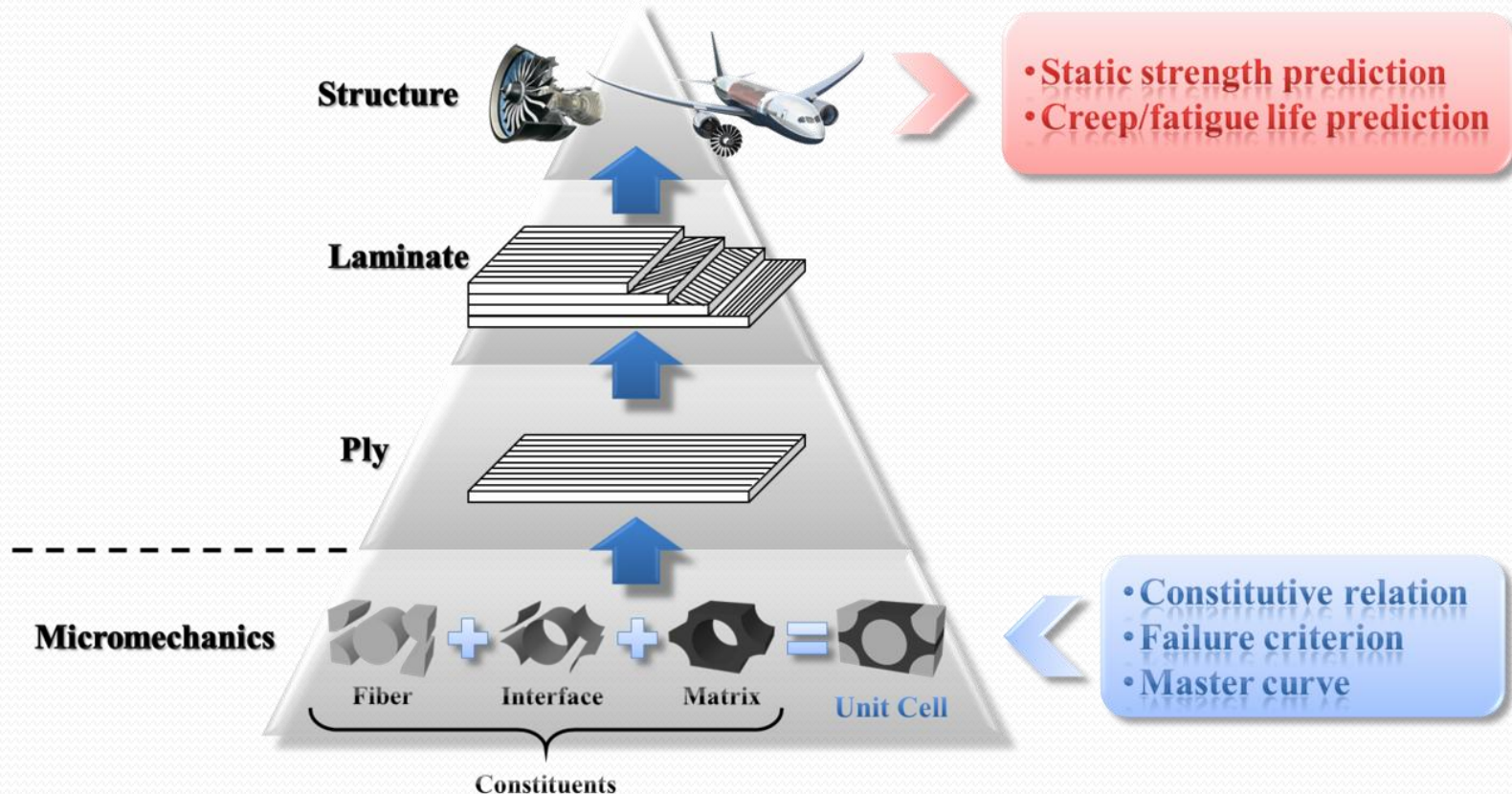
# CHƯƠNG 2

## ỨNG SUẤT

# Khái niệm môi trường liên tục (Continuum)



# Khái niệm môi trường liên tục (Continuum)



# Khái niệm môi trường liên tục (Continuum)

- Kết cấu của vật chất là tập hợp của các hạt phân tử.
- Tuy nhiên, trong nghiên cứu số về ứng xử của vật liệu, người ta xem xét chúng như là một môi trường liên tục.
- Khái niệm môi trường liên tục (continuum) là nền tảng của Cơ học môi trường liên tục (continuum mechanics).
- Các chất rắn, lỏng và khí là các đối tượng có thể được nghiên cứu dưới góc độ môi trường liên tục.
- Dưới góc độ môi trường liên tục, các đại lượng như ứng suất, biến dạng hay chuyển vị được mô tả về mặt toán học là các hàm liên tục từng đoạn theo biến không gian và thời gian.

# Một số khái niệm

- Sự **thuần nhất** (homogeneous): vật liệu thuần nhất là vật liệu có cùng đặc tính tại mọi điểm.
- Sự **đẳng hướng** (isotropic): vật liệu được gọi là đẳng hướng khi các đặc tính của vật liệu là như nhau theo mọi hướng tại một điểm.
- Sự **bất đẳng hướng** (anisotropic): vật liệu được gọi là bất đẳng hướng khi các đặc tính của vật liệu là phụ thuộc vào hướng tại một điểm.
- **Tỉ trọng**: (density)

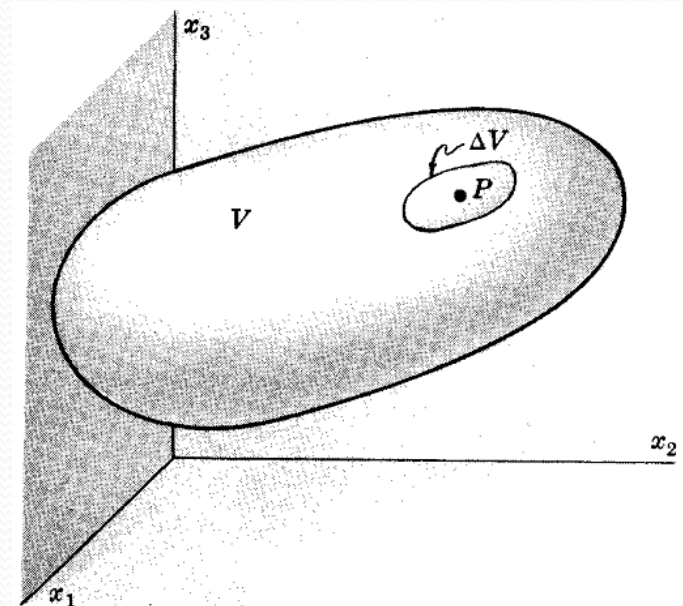
- Tỉ trọng trung bình:

$$\rho_{(av)} = \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (2.1)$$

- Tỉ trọng tại một điểm

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \quad (2.2)$$

$\rho$  là đại lượng vô hướng





# Một số khái niệm

- **Lực thể tích/lực khối** (body force) - vector: lực tác lên tất cả các phần tử của môi trường liên tục, như lực quán tính, trọng lực.

- Ký hiệu:  $b_i$  (lực trên đơn vị khối lượng),  $p_i$  (lực trên đơn vị thể tích).

$$\rho b_i = p_i \quad \text{or} \quad \rho \mathbf{b} = \mathbf{p}$$

- **Lực mặt** (surface force) - vector: lực tác lên bề mặt của phần tử của môi trường liên tục, có thể là một phần bề mặt môi trường liên tục hoặc có thể là một mặt bên trong bất kỳ.

- Ký hiệu:  $f_i$  (lực trên đơn vị diện tích)

# Nguyên lý ứng suất Cauchy. Vector ứng suất

- Xét một môi trường liên tục trong không gian chịu tác dụng bởi các lực mặt  $f_i$  và lực thể tích  $b_i$  (H.2.2).
- $n_i$  là pháp tuyến ngoài tại điểm  $P$  của phần tử diện tích  $\Delta S$  của mặt  $S$ .  $\Delta f_i$  là tổng lực mặt tác dụng lên  $\Delta S$  (nằm trong  $V$ ) bởi phần bên ngoài của  $V$ . Lực phụ thuộc vào việc chọn  $\Delta S$  và  $n_i$ .
- Lưu ý: tổng quát, lực phân bố tương đương với một lực và một moment tại  $P$  (H.2.2)

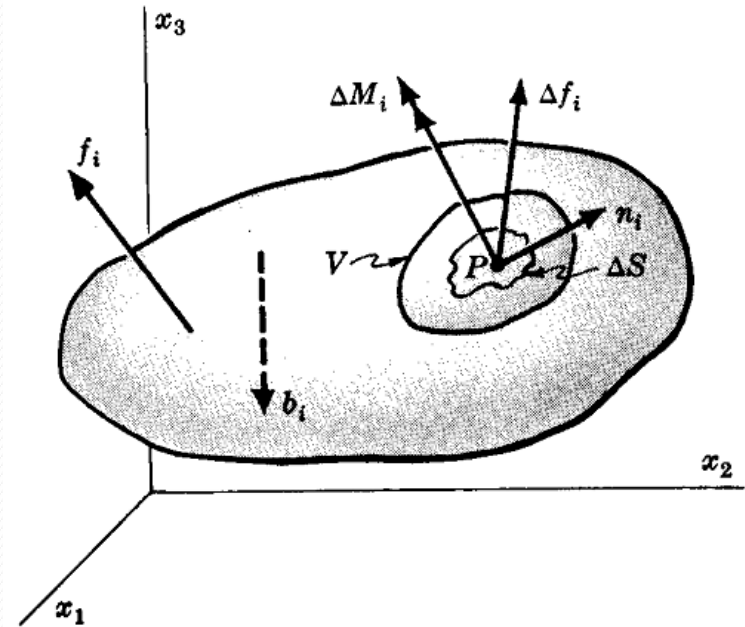


Fig. 2-2

# Nguyên lý ứng suất Cauchy. Vector ứng suất

- Lực trung bình trên đơn vị diện tích:  $\Delta f_i / \Delta S$
- Nguyên lý ứng suất Cauchy: tỉ số  $\Delta f_i / \Delta S$  tiến tới một giới hạn xác định  $df_i / dS$  khi  $\Delta S$  tiến tới 0 tại điểm P, đồng thời moment của  $\Delta f_i$  theo điểm P triệt tiêu. Vector  $df_i / dS$  được gọi là vector ứng suất  $t_i^{(\hat{n})}$ .
- Trường hợp moment không triệt tiêu, sẽ xuất hiện một vector ngẫu lực như H.2.3.
- Vector ứng suất (stress vector) (lực/diện tích)

$$t_i^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{t}^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS}$$

- Vector ứng suất phụ thuộc vào phần tử diện tích được chọn hay phụ thuộc vào **pháp tuyến đơn vị**  $n_i$ .

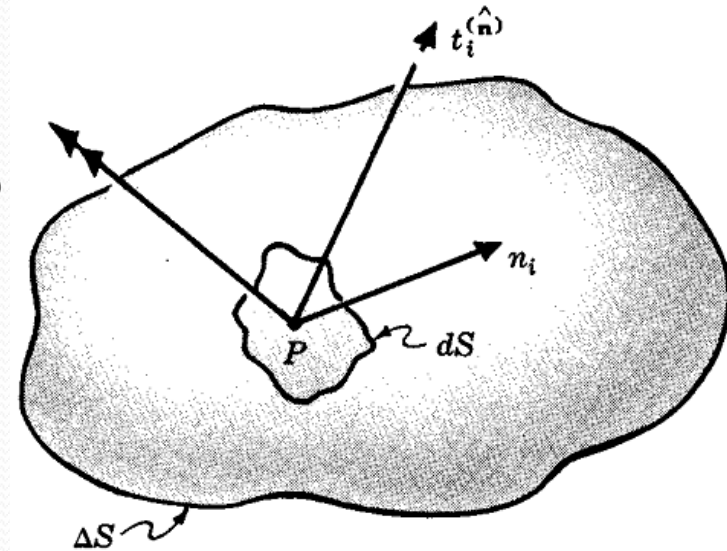


Fig. 2-3



# Nguyên lý ứng suất Cauchy. Vector ứng suất

- Hệ quả: theo định luật 3 Newton (ĐL tác dụng và phản tác dụng) thì

$$-t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})} \quad \text{or} \quad -\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \mathbf{t}^{(-\hat{\mathbf{n}})}$$

# Trạng thái ứng suất tại một điểm. Tensor ứng suất

- Theo nguyên lý ứng suất Cauchy, mỗi vector ứng suất  $t_i^{(\hat{n})}$  sẽ ứng với mỗi vector pháp tuyến đơn vị  $n_i$ . (H.2.3)
- Vậy tổng *tất cả* các cặp có thể có của *vector ứng suất* và *vector pháp tuyến* sẽ xác định *trạng thái ứng suất tại một điểm* (không khả thi).
- Cho vector ứng suất trên mỗi 3 mặt vuông góc nhau tại điểm P. Phép biến đổi tọa độ sẽ được sử dụng để liên hệ vector ứng suất trên một mặt bất kỳ với 3 vector ứng suất đã cho.

# Trạng thái ứng suất tại một điểm. Tensor ứng suất

- Cho 3 mặt phẳng vuông góc lần lượt với 3 trục tọa độ (gốc tọa độ tại P). Vector ứng suất và vector pháp tuyến tương ứng cho như H.2.4.

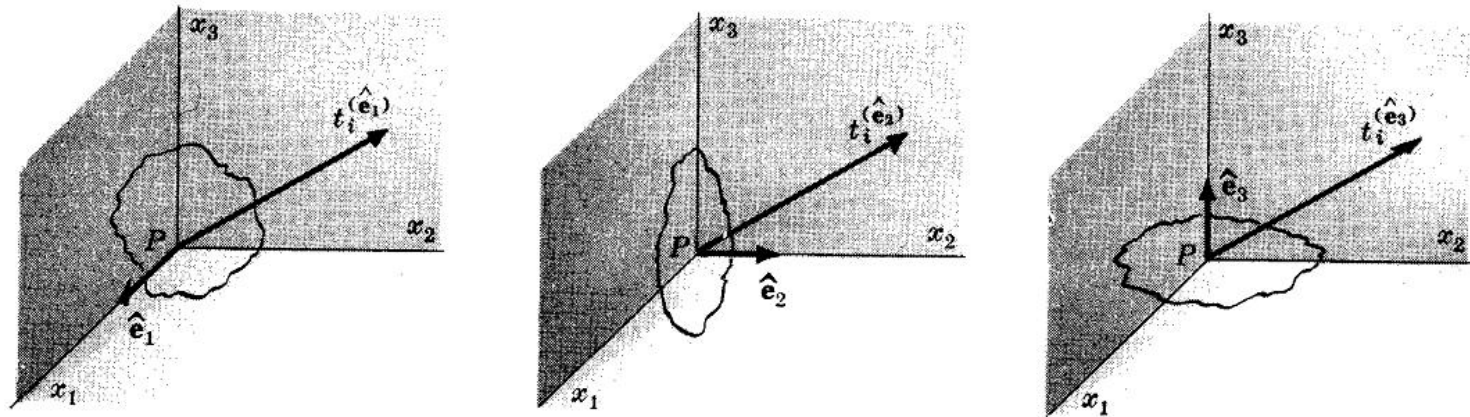


Fig. 2-4

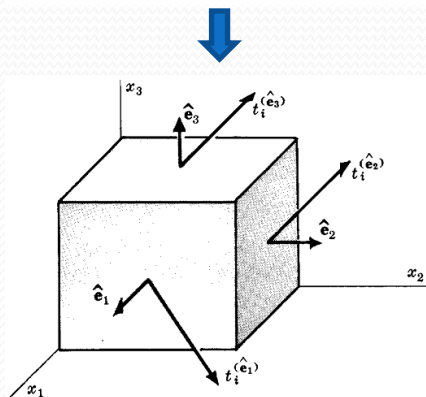


Fig. 2-5

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} &= t_1^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \hat{\mathbf{e}}_3 = t_j^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \hat{\mathbf{e}}_j \\
 \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} &= t_1^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} \hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} \hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} \hat{\mathbf{e}}_3 = t_j^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} \hat{\mathbf{e}}_j \\
 \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} &= t_1^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} \hat{\mathbf{e}}_1 + t_2^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} \hat{\mathbf{e}}_2 + t_3^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} \hat{\mathbf{e}}_3 = t_j^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} \hat{\mathbf{e}}_j
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

# Trạng thái ứng suất tại một điểm. Tensor ứng suất

- Tensor ứng suất (tensor Cartesian bậc 2): chín thành phần của các vector ứng suất

$$t_j^{(\hat{e}_i)} \equiv \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ hay } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ứng suất pháp:  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$

Ứng suất tiếp (cắt):  $(\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32})$

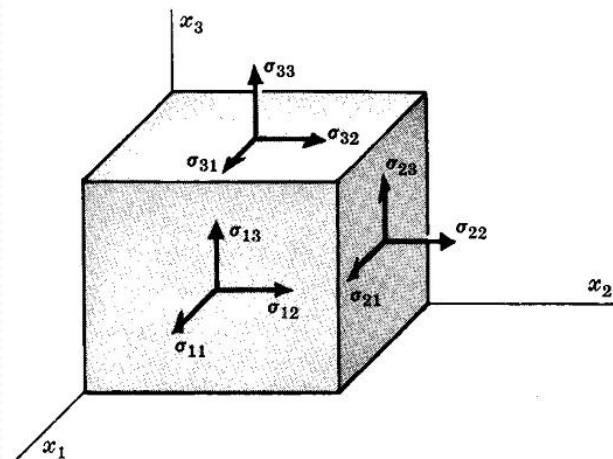


Fig. 2-6

# Trạng thái ứng suất tại một điểm. Tensor ứng suất

- Thành phần ứng suất là dương khi nó tác dụng theo hướng dương của trục tọa độ và tác dụng lên mặt phẳng có pháp tuyến ngoài hướng theo hướng tọa độ dương.
- $\sigma_{ij}$  tác dụng theo hướng của trục tọa độ thứ  $j$  và lên mặt phẳng có pháp tuyến ngoài song song với trục tọa độ thứ  $i$ .

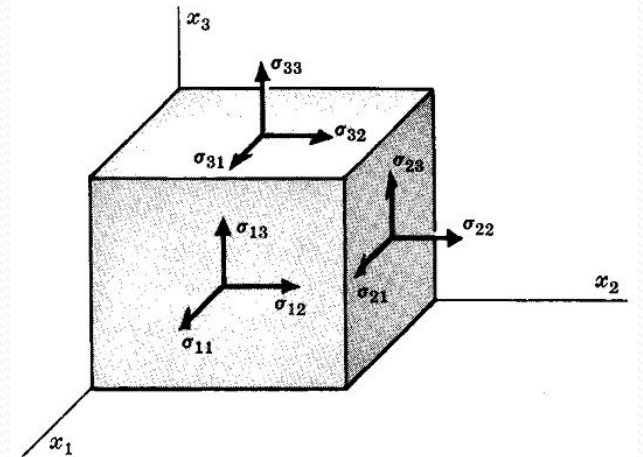


Fig. 2-6



# Mối liên hệ giữa tensor và vector ứng suất

- Xét một tứ diện như H.2.7. Đáy ABC có pháp tuyến ngoài là  $\hat{n}_i$ , ba mặt còn lại vuông góc với các mặt phẳng tọa độ. P là đỉnh tứ diện

$dS$ : diện tích đáy ABC

$dS_i$ : diện tích các mặt còn lại

$$\begin{aligned} dS_i &= dS (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) = \\ &= dS \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{e}}_i) = dS n_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

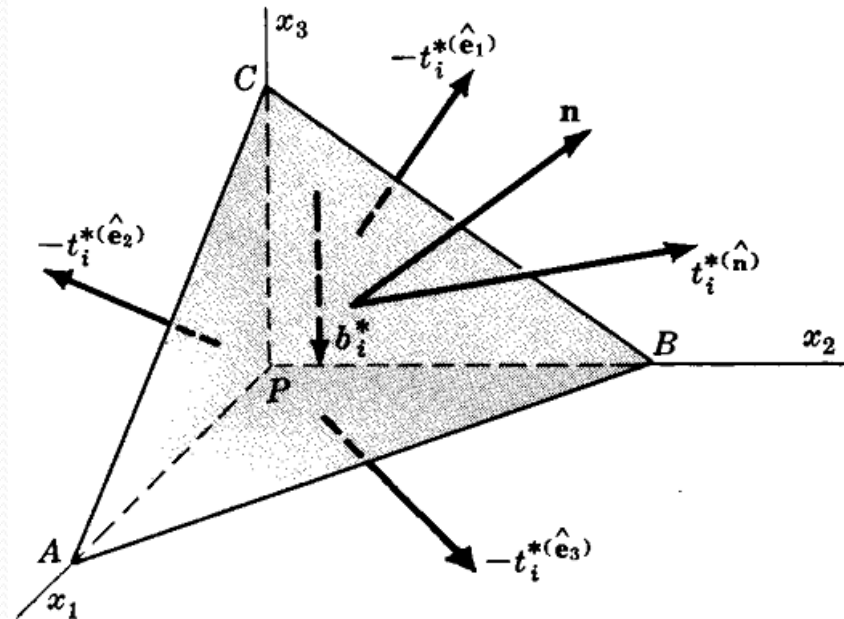


Fig. 2-7

- Cân bằng lực trên phần tử tứ diện (có kể lực thể tích)

$$t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})} dS - t_i^{*(\hat{\mathbf{e}}_1)} dS_1 - t_i^{*(\hat{\mathbf{e}}_2)} dS_2 - t_i^{*(\hat{\mathbf{e}}_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0 \quad (2.10)$$

$-t_i^{*(\hat{\mathbf{e}}_j)}$  : vector ứng suất trên các mặt

$t_i^{*(\hat{\mathbf{n}})}$  : vector ứng suất trên mặt đáy

# Mối liên hệ giữa tensor và vector ứng suất

- Khi thể tích tiến về không, lực thể tích sẽ tiến về không nhanh hơn so với các lực mặt; suy ra

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} dS = t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} n_1 dS + t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} n_2 dS + t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} n_3 dS = t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_j)} n_j dS \quad (2.11)$$

➔  $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_j)} n_j$

Mà  $t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_j)} \equiv \sigma_{ji}$

➔  $t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ji} n_j \quad \text{or} \quad \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.12)$

Dạng ma trận

$$[t_{1j}^{(\hat{\mathbf{n}})}] = [n_{1k}] [\sigma_{kj}] \rightarrow [t_1^{(\hat{\mathbf{n}})}, t_2^{(\hat{\mathbf{n}})}, t_3^{(\hat{\mathbf{n}})}] = [n_1, n_2, n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$t_1^{(\hat{\mathbf{n}})} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}$$

$$t_2^{(\hat{\mathbf{n}})} = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}$$

$$t_3^{(\hat{\mathbf{n}})} = n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}$$

# Cân bằng lực và cân bằng moment. Tensor ứng suất đối xứng

- Một thể tích  $V$  bất kỳ trong môi trường liên tục chịu tác dụng của các lực mặt và các lực khối như trong H.2.8.
- Do cân bằng mà tổng các lực cũng như tổng moment phải bằng không.
- Cân bằng lực:

$$\int_S t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad (2.16)$$

$$\int_S \mathbf{t}^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0$$

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$$

DL Divergence

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0 \quad \text{hay}$$

$$\int_V (\nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b}) dV = 0$$

(2.17)

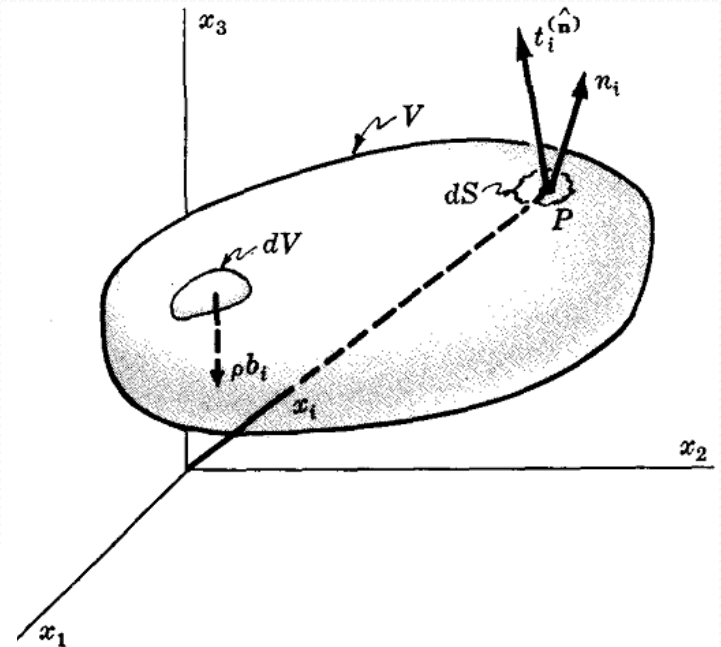


Fig. 2-8

# Cân bằng lực và cân bằng moment. Tensor ứng suất đối xứng

- Cân bằng lực:

$$\int_S t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad (2.16)$$

$$\int_S \mathbf{t}^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0$$

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$$

DL Divergence 

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{hay } \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b}) dV = 0$$

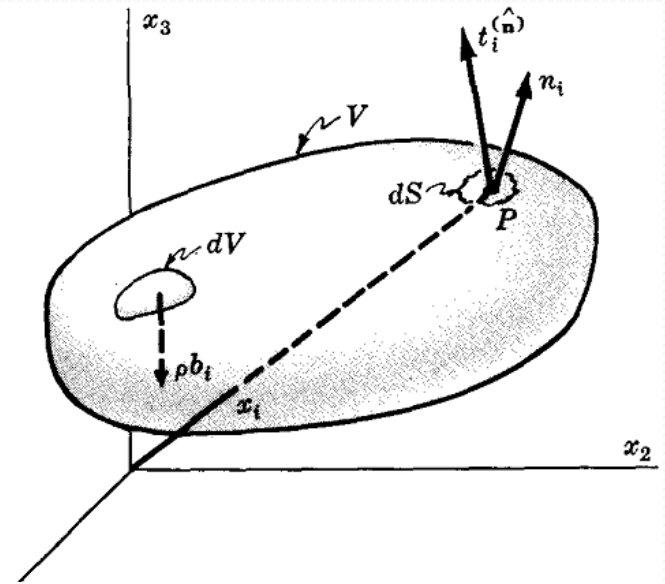


Fig. 2-8

- Vì V bất kỳ nên


$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.18)$$

- Phương trình (2.18) được gọi là **phương trình cân bằng**.


# Cân bằng lực và cân bằng moment. Tensor ứng suất đối xứng

- Cân bằng moment theo gốc tọa độ (giả sử không có ngẫu lực)


$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{\mathbf{n}})} dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= 0 \\ \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ji} n_j$   
  
 ĐL Divergence

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad \text{or} \quad \int_V \Sigma_v dV = 0 \quad (2.20)$$

V bất kỳ  


$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad \text{or} \quad \Sigma_v = 0$$


 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.22)$

Như vậy, tensor ứng suất là một tensor đối xứng.



# Cân bằng lực và cân bằng moment. Tensor ứng suất đối xứng

➤ Phương trình cân bằng:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0$$

(2.24)

# Quy luật biến đổi ứng suất

## ➤ Cosin chỉ phương

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$x'_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$x'_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

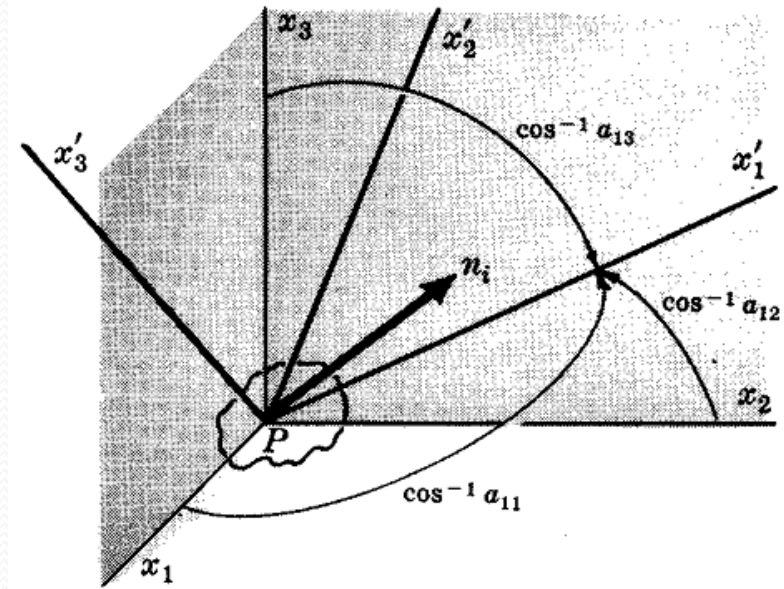


Fig. 2-9

(2.25)

## ➤ Ma trận biến đổi

$$\mathbf{A} = a_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$$

## ➤ Phép biến đổi tọa độ cho vector ứng suất (tensor bậc 1)

$$t'_i(\hat{\mathbf{n}}) = a_{ij} t_j(\hat{\mathbf{n}}) \quad \text{or} \quad \mathbf{t}'(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$$

## ➤ Phép biến đổi tọa độ cho tensor ứng suất (tensor bậc 2)

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\Sigma}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_c$$

# Quy luật biến đổi ứng suất

➤ Dạng ma trận:

○ Vector ứng suất

$$[t'_{i1}^{(\hat{n})}] = [a_{ij}][t_{j1}^{(\hat{n})}] \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} t'_1{}^{(\hat{n})} \\ t'_2{}^{(\hat{n})} \\ t'_3{}^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1{}^{(\hat{n})} \\ t_2{}^{(\hat{n})} \\ t_3{}^{(\hat{n})} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

○ Tensor ứng suất

$$[\sigma_{ij}] = [a_{ip}][\sigma_{pq}][a_{qj}] \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

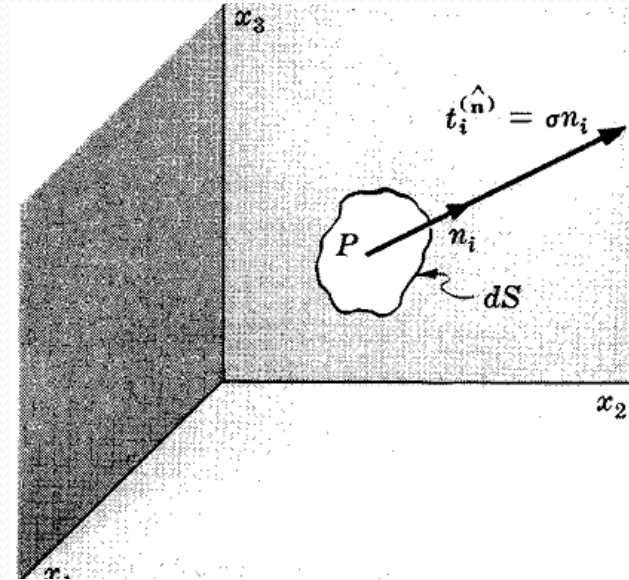
# Ứng suất chính. Bất biến ứng suất.

- Hướng chính: hướng mà theo đó vector ứng suất và vector pháp tuyến là cộng tuyến. Nghĩa là

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma n_i \quad \text{or} \quad \mathbf{t}^{(\hat{n})} = \sigma \hat{\mathbf{n}} \quad (2.35)$$

$\sigma$ : giá trị ứng suất chính (vô hướng).

$$\begin{aligned} t_i^{(\hat{n})} &= \sigma_{ji} n_j \\ \xrightarrow{\quad} & (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) n_j = 0 \quad \text{or} \quad (\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{I} \sigma) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.36) \\ n_i &= \delta_{ij} n_j \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \end{aligned}$$



- (2.36) là bài toán trị riêng, vector riêng. Ấn của bài toán là các cosin chỉ phương (hướng chính) và giá trị ứng suất chính.

# Ứng suất chính. Bất biến ứng suất.

- Phương trình đặc trưng:

$$\sigma^3 - I_{\Sigma}\sigma^2 + II_{\Sigma}\sigma - III_{\Sigma} = 0 \quad (2.38)$$

trong đó

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii} = \text{tr } \Sigma \quad (2.39)$$

$$II_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) \quad (2.40)$$

$$III_{\Sigma} = |\sigma_{ij}| = \det \Sigma \quad (2.41)$$

là các bất biến thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

- Nghiệm của (2.38) là ba ứng suất chính  $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$
- Ứng với mỗi ứng suất chính, ta tìm được hướng chính bằng cách giải phương trình

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0 \quad \text{or} \quad (\Sigma - \sigma_{(k)}I) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.42)$$

Lưu ý: - Vì tensor ứng suất *đối xứng* nên các giá trị *ứng suất chính* đều là **thực**.

- Nếu các ứng suất chính là *phân biệt* thì các hướng chính sẽ *trực giao* nhau.



# Ứng suất chính. Bất biến ứng suất.

- Khi sử dụng các hướng ứng suất chính, thì ma trận ứng suất là một ma trận chéo

$$[\sigma_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

trong đó ký hiệu bằng chữ La Mã ám chỉ các giá trị ứng suất chính có thứ tự, nghĩa là  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ .

- Trong không gian ứng suất chính, tức là không gian có các trục là các hướng chính và có độ đo đơn vị là vector ứng suất  $(t_1^{(\hat{n})}, t_2^{(\hat{n})}, t_3^{(\hat{n})})$  (H.2.12), một vector ứng suất bất kỳ  $t_i^{(\hat{n})}$  có các thành phần theo (2.12) là

$$t_1^{(\hat{n})} = \sigma_{(1)} n_1, \quad t_2^{(\hat{n})} = \sigma_{(2)} n_2, \quad t_3^{(\hat{n})} = \sigma_{(3)} n_3 \quad (2.45)$$

$$(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(t_1^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(1)})^2} + \frac{(t_2^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(2)})^2} + \frac{(t_3^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(3)})^2} = 1 \quad (2.46)$$

Như vậy các vector ứng suất phải thỏa mãn phương trình elipsoid (Lamé stress ellipsoid)

# Các giá trị ứng suất trượt cực đại và cực tiểu

- Nếu vector ứng suất  $t_i^{(\hat{n})}$  được phân tích thành 2 thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến (cắt) của phần tử diện tích  $dS$ , thì độ lớn của chúng cho bởi

$$\text{Ứng suất pháp} \quad \sigma_N = t_i^{(\hat{n})} n_i = \mathbf{t}^{(\hat{n})} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2.33)$$

$$\text{Ứng suất tiếp} \quad \sigma_S^2 = t_i^{(\hat{n})} t_i^{(\hat{n})} - \sigma_N^2 \quad (2.47)$$

- Sự phân tích trên được cho trong H.2.13 trong không gian ứng suất chính với các giá trị ứng suất chính  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$
- Từ (2.12)

$$\begin{aligned} t_i^{(\hat{n})} &= \sigma_{ji} n_j \\ t_1^{(\hat{n})} &= \sigma_I n_1 \\ \rightarrow t_2^{(\hat{n})} &= \sigma_{II} n_2 \\ t_3^{(\hat{n})} &= \sigma_{III} n_3 \end{aligned} \quad (2.48)$$

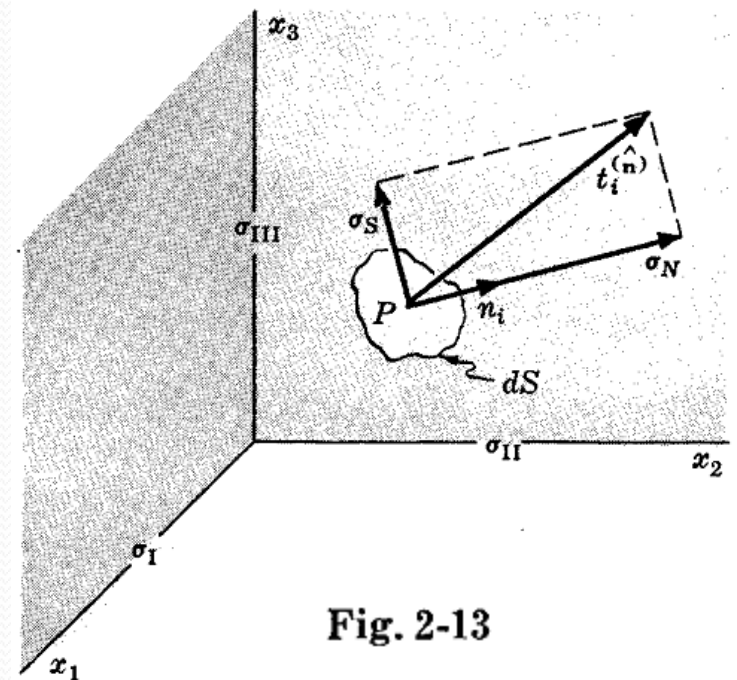


Fig. 2-13

# Các giá trị ứng suất trượt cực đại và cực tiểu

➤ Từ (2.33)

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} n_i = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow \sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \quad (2.49)$$

$$t_1^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_I n_1$$

$$(2.48) \quad t_2^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{II} n_2$$

$$t_3^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{III} n_3$$

$$(2.49) \quad \sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

thay

$$(2.47) \quad \sigma_S^2 = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} - \sigma_N^2$$

$$\Rightarrow \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \quad (2.50)$$

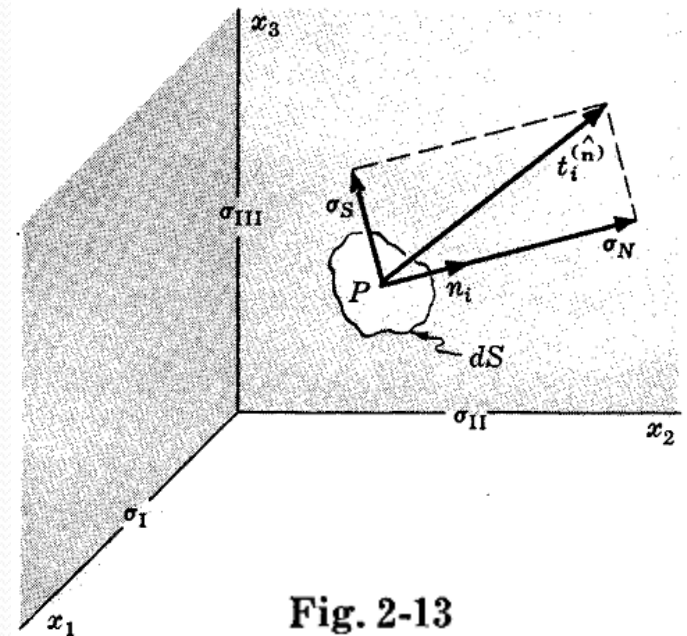


Fig. 2-13

# Các giá trị ứng suất trượt cực đại và cực tiểu

- Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm giá trị cực đại và cực tiểu của  $\sigma_s$
- Xét hàm số

$$F = \sigma_s^2 - \lambda n_i n_i \quad (2.51)$$

trong đó  $\lambda$  là nhân tử Lagrange.  $F$ , hàm theo cosin chỉ hướng, đạt cực trị khi  $\partial F / \partial n_i = 0$

$$n_1 \{ \sigma_I^2 - 2\sigma_I(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \} = 0 \quad (2.52a)$$

$$n_2 \{ \sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II}(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \} = 0 \quad (2.52b)$$

$$n_3 \{ \sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III}(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \} = 0 \quad (2.52c)$$

với điều kiện

$$n_i n_i = 1$$

Giải hệ trên xác định các cosin chỉ hướng và nhân tử Lagrange ứng với các cực trị của ứng suất trượt.

# Các giá trị ứng suất trượt cực đại và cực tiểu

## ➤ Tập điểm cực trị thứ nhất

$$n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0; \quad \text{for which } \sigma_s = 0 \quad (2.53a)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0; \quad \text{for which } \sigma_s = 0 \quad (2.53b)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1; \quad \text{for which } \sigma_s = 0 \quad (2.53c)$$

Trong (2.53), giá trị ứng suất tiếp đạt cực tiểu. Đồng thời do ứng suất tiếp triệt tiêu trên các mặt chính, nên các hướng ở (2.53) là các hướng chính.

## ➤ Tập điểm cực trị thứ hai

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}; \quad \sigma_s = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2 \quad (2.54a)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}; \quad \sigma_s = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2 \quad (2.54b)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = 0; \quad \sigma_s = (\sigma_I - \sigma_{II})/2 \quad (2.54c)$$

Trong (2.54b), giá trị ứng suất tiếp đạt cực đại trên mặt phẳng chia đôi góc giữa hai hướng ứng suất chính cực đại và cực tiểu.



# Vòng tròn ứng suất Mohr

- Vòng tròn ứng suất Mohr là lược đồ dùng để biểu diễn trạng thái ứng suất tại một điểm trong không gian ba chiều bằng hình học hai chiều => tiện lợi.
- Các trục tọa độ được chọn là các hướng ứng suất chính tại điểm P như H.2.14. Ứng suất chính được giả thiết là phân biệt và có thứ tự

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (2.55)$$

- Vector ứng suất có các thành phần pháp tuyến và trượt thỏa

$$(2.56) \quad \sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$(2.57) \quad \sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

- Điều kiện  $n_i n_i = 1$

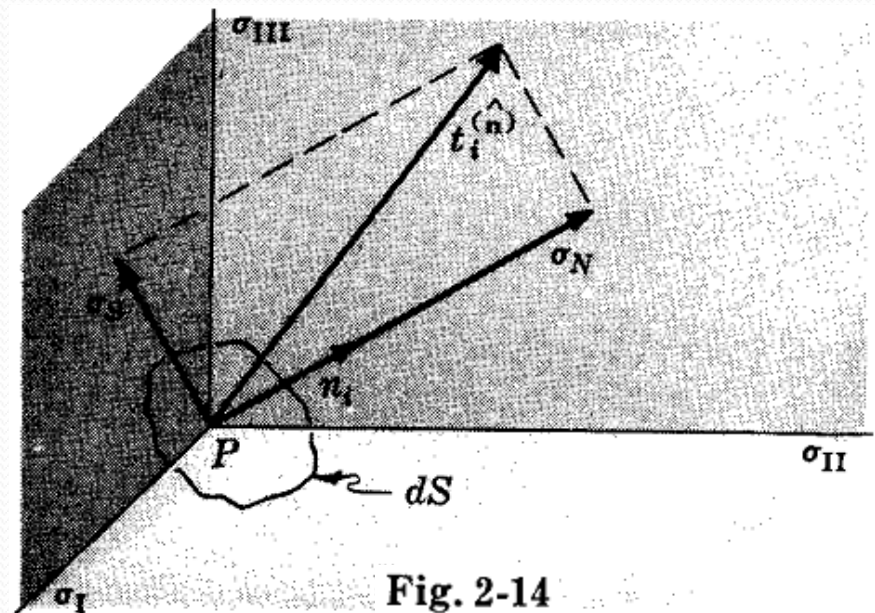


Fig. 2-14

# Vòng tròn ứng suất Mohr

➤ Giải (2.56) và (2.57) theo cosin chỉ hướng với điều kiện trên ta được

$$(n_1)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \quad (2.58a)$$

$$(n_2)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \quad (2.58b)$$

$$(n_3)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \quad (2.58c)$$

Từ:

$$\left. \begin{aligned} (n_1)^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \geq 0 \\ \sigma_I - \sigma_{II} &> 0 \\ \sigma_I - \sigma_{III} &> 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2 \geq 0 \\ &\quad (2.59) \end{aligned}$$

# Vòng tròn ứng suất Mohr

- Với (2.58a) các điểm ứng suất trong mặt phẳng ( $\sigma_N, \sigma_S$ ) nằm trên hoặc bên ngoài đường tròn

$$[\sigma_N - (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2]^2 \quad (2.60)$$

- Tương tự với (2.58b) và (2.58c)

- (2.58b), ứng suất nằm trên hoặc bên trong đường tròn

$$[\sigma_N - (\sigma_{III} + \sigma_I)/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{III} - \sigma_I)/2]^2 \quad (2.62)$$

- (2.58c), ứng suất nằm trên hoặc bên ngoài đường tròn

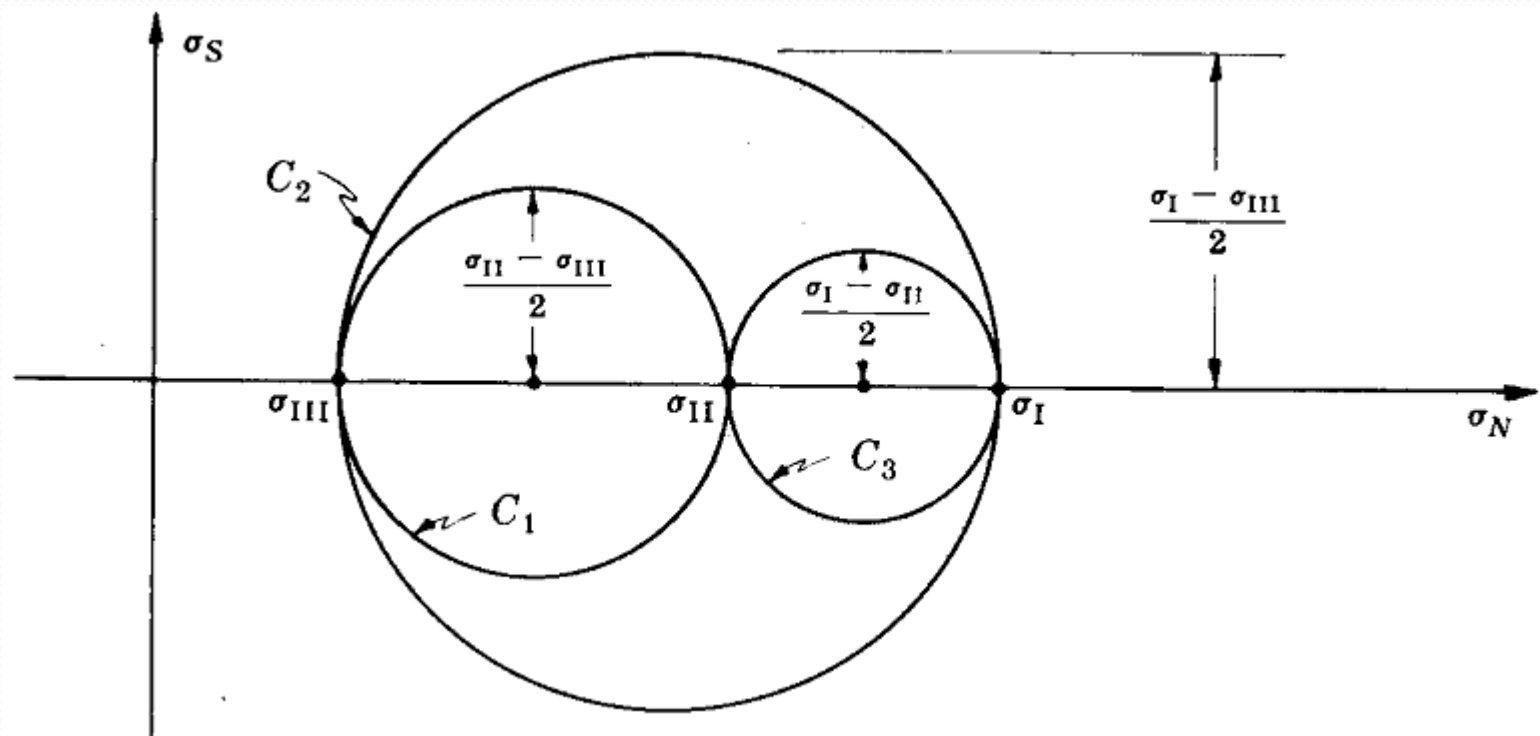
$$[\sigma_N - (\sigma_I + \sigma_{II})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_I - \sigma_{II})/2]^2 \quad (2.64)$$

# Vòng tròn ứng suất Mohr

$$[\sigma_N - (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2]^2 \quad C1$$

$$[\sigma_N - (\sigma_{III} + \sigma_I)/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{III} - \sigma_I)/2]^2 \quad C2$$

$$[\sigma_N - (\sigma_I + \sigma_{II})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_I - \sigma_{II})/2]^2 \quad C3$$



# Vòng tròn ứng suất Mohr

- Trạng thái ứng suất được thể hiện bên trong phần diện tích giới hạn bởi các vòng tròn Mohr trong cho trong H.2.15.
- Lược đồ cũng cho thấy giá trị ứng suất trượt cực đại là  $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$

# Vòng tròn ứng suất Mohr

## ➤ Biểu diễn trạng thái ứng suất bằng vòng tròn Mohr

- Mọi quan hệ giữa lược đồ Mohr và trạng thái ứng suất được thiết lập thông qua việc xem xét H.2.16.
- Pháp tuyến  $n_i$  tại điểm Q trên mặt cầu ABC mô phỏng pháp tuyến với phần tử diện tích  $dS$  tại điểm P.
- Điểm Q được xác định bởi các cung KD, GE, FH.
- Các thành phần ứng suất cho điểm Q bất kỳ có thể được xác định theo H.2.16.

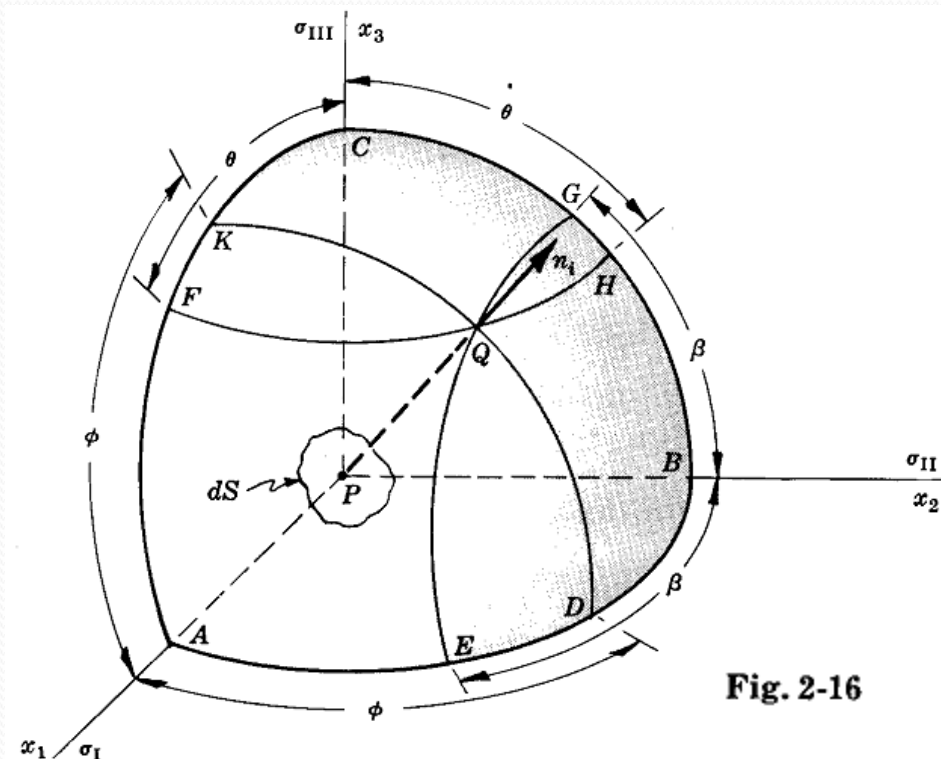


Fig. 2-16



# Vòng tròn ứng suất Mohr

- Biểu diễn trạng thái ứng suất bằng vòng tròn Mohr
  - Xác định điểm e nằm trên  $C_3$  bằng cách vẽ đường nối từ tâm với góc đo là  $2\beta$
  - Lưu ý: góc không gian vật lý gấp đôi góc trong không gian ứng suất.
  - Tương tự các điểm g, h và f cũng được xác định trên H.2.17

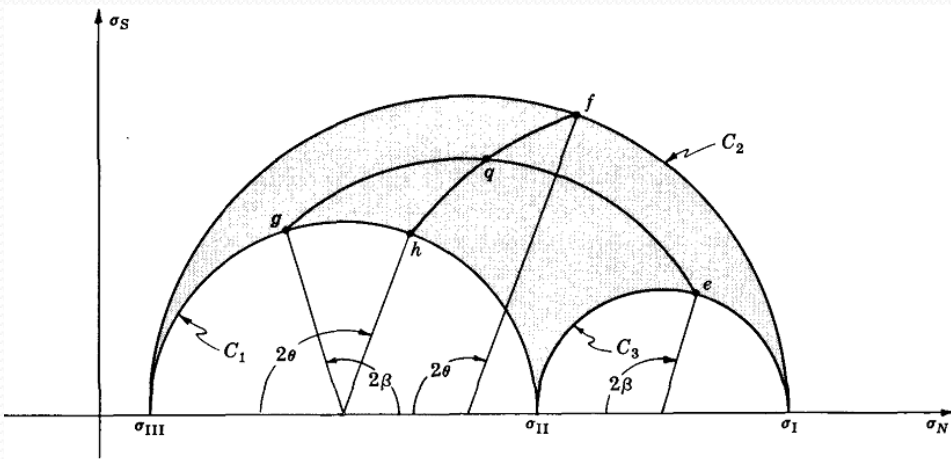


Fig. 2-17

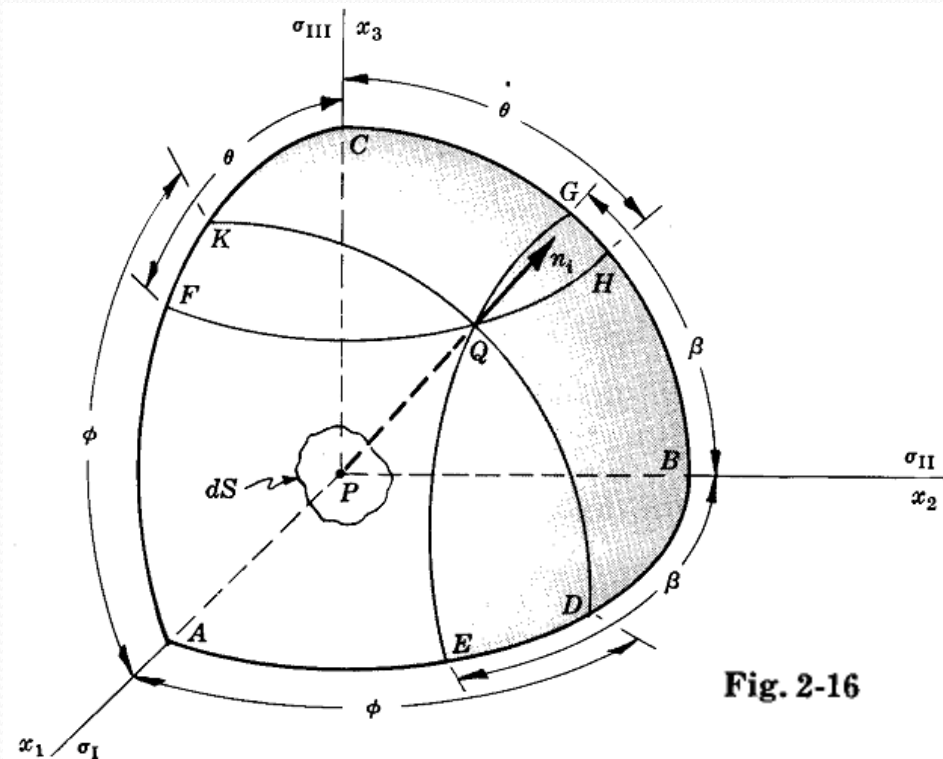


Fig. 2-16

# Vòng tròn ứng suất Mohr

- Biểu diễn trạng thái ứng suất bằng vòng tròn Mohr
  - Phần giao giữa các cung ge và hf đại diện cho các thành phần  $\sigma_N$  và  $\sigma_S$  của vector ứng suất trên mặt phẳng có pháp tuyến  $n_i$  tại Q như H.2.16.

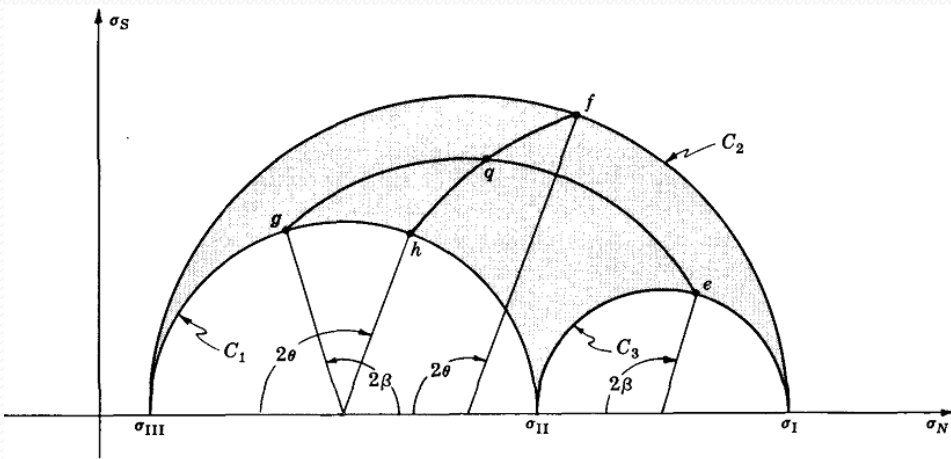


Fig. 2-17

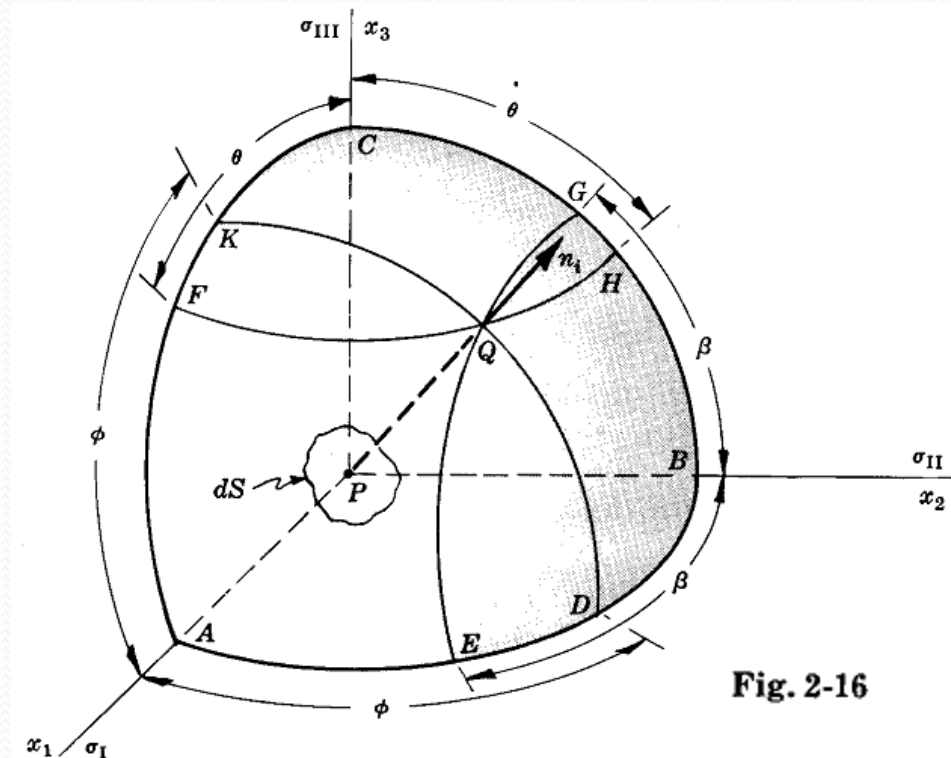


Fig. 2-16

# Tensor ứng suất cầu và lệch

- Tensor bất kỳ

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 + s_{ij} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \sigma_M \mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}_D \quad (2.70)$$

- Tensor ứng suất cầu

$$\boldsymbol{\Sigma}_M = \sigma_M \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

$\sigma_M = -p = \sigma_{kk}/3$  ứng suất pháp trung bình

- Tensor ứng suất lệch

$$\boldsymbol{\Sigma}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

# Tensor ứng suất cầu và lệch

- Các hướng chính của tensor ứng suất lệch  $s_{ij}$  trùng với hướng chính của tensor ứng suất  $\sigma_{ij}$ . Do đó, ứng suất lệch chính bằng với

$$s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M \quad (2.71)$$

- Phương trình đặc trưng của tensor ứng suất lệch là

$$s^3 + II_{\Sigma_D}s - III_{\Sigma_D} = 0 \quad \text{or} \quad s^3 + (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)s - s_I s_{II} s_{III} = 0 \quad (2.72)$$