

Đề thi học kỳ I khóa 2011: Môn Toán B1

Khoa Vật Lý – Trường ĐHKHTN

Thời gian làm bài: 90 phút

(Được phép sử dụng tài liệu)

1. Khảo sát sự hội tụ của dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \sqrt[n]{n^2}$.

2. Cho dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \sqrt[n]{30 + \sqrt{30 + \cdots + \sqrt{30 + \sqrt{30}}}}$. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giá trị giới hạn của nó.

3. Hãy tính: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x$.

4. Cho $f(x) = x^2 \cos(x)$. Tính $f^{(50)}(x)$.

5. Hãy khai triển hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$ theo lũy thừa nguyên dương của x đến số hạng chứa x^4 với phần dư dạng Peano.

- - - HẾT - - -

Bài 1: Xét dãy $\{b_n\}$, $b_n = \sqrt[n]{n} \geq 1$. Đặt $c_n = b_n - 1 \geq 0$.

$$\Rightarrow b_n = 1 + c_n \leftrightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + c_n \rightarrow n = (1 + c_n)^n = 1 + nc_n + \frac{n(n-1)}{2}c_n^2 + \dots + c_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}c_n^2.$$

$$\Rightarrow 0 \leq c_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

$$\text{Mà } b_n = 1 + c_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + c_n) = 1.$$

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.1 = 1.$$

Vậy dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 1.

Bài 2: Ta có: $5 \leq a_n \leq 6 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{30 + a_n} \leq 6$.

$$\Rightarrow 30 + a_n = a_{n+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 30 + a_{n+1} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}.$$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ 5 \leq a_n \leq 6 \end{array} \right\} \text{ Theo Weierstrass thì } \{a_n\} \text{ hội tụ } \Rightarrow \exists A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A.$$

$$\text{Mặt khác: } 30 + a_n = a_{n+1}^2 \rightarrow A^2 - A - 30 = 0 \leftrightarrow A = -5 \text{ (loại) hay } A = 6 \text{ (nhận).}$$

Vậy dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 6.

Bài 3: (Giới hạn đã cho có dạng 1^∞)

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} - 1 \right)x} = e^A.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} - 1 \right)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2ax}{x+a} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2a}{1+\frac{a}{x}} \right) = -2a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = e^{-2a}.$$

Bài 4: $f(x) = x^2 \cos x$.

$$\text{Áp dụng công thức Leibniz ta có: } (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}. \text{ Với } u = x^2 \text{ và } v = \cos x.$$

$$\text{Ta có: } (x^2)^{(3)} = 0 \rightarrow i = 0; 1; 2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (uv)^{(50)} &= \sum_{i=0}^2 C_{50}^i u^{(i)} v^{(50-i)} = x^2 \cos \left(x + 50 \frac{\pi}{2} \right) + C_{50}^1 2x \cdot \cos \left(x + 49 \frac{\pi}{2} \right) + C_{50}^2 \cdot 2 \cos \left(x + 48 \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -x^2 \cos x - 100x \sin x + 2450 \cos x. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } f^{(50)}(x) = (2450 - x^2) \cos x - 100x \sin x.$$

Bài 5: $f(x) = e^{x-x^2}$. Đặt $X = x - x^2$. Áp dụng công thức Maclaurin với phần dư dạng Peano, ta có:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + o(X^4).$$

$$\Rightarrow e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^2)^2 + \frac{1}{6}(x - x^2)^3 + \frac{1}{24}(x - x^2)^4 + o(x^4).$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

--- HẾT ---

Tranpham