

ĐỀ THI HỌC KỲ II KHÓA 2010

Môn Toán B2 – Khoa Vật Lý

Thời gian làm bài: 90 phút

Thí sinh được phép sử dụng tài liệu

Câu 1: Cho $u = x^2 + 2xy + 3y^2 + 3x + 2y + 1$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Câu 2: Khảo sát cực trị của hàm số $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ với n biến x_1, x_2, \dots, x_n bị ràng buộc bởi điều kiện $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$, ($a_i \neq 0, i = \overline{1, n}$)

Câu 3: Tính tích phân:

$$\iiint_{(V)} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz ; \quad (V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Câu 4: Hãy tính cường độ điện trường $E(r)$ sinh ra bởi một quả cầu đặc tích điện đều có bán kính R và điện tích Q . Vẽ đồ thị mô tả sự phụ thuộc của $E(r)$ vào $r \in [0, +\infty)$ và cho nhận xét.

Câu 5: Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là hàm liên tục và (C) là đường cong khép kín trơn từng khúc thì

$$\oint_{(C)} f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

--- HẾT ---

Câu 1: $u = x^2 + 2xy + 3y^2 + 3x + 2y + 1$.

$$* \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 3.$$

$$* \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 6y + 2.$$

$$* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2.$$

$$* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6.$$

$$* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2.$$

Câu 2: Xét hàm Lagrange:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

Điều kiện cần để có cực trị (nếu có):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-2}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} \\ x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}) \rightarrow \begin{matrix} M(x_i) \text{ là điểm dừng} \\ \text{với } x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} \end{matrix}$$

Điều kiện đủ:

$$\begin{cases} d^2F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\ \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{a_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n dx_i^2 > 0 \end{cases} \rightarrow d^2F = 2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 > 0 \rightarrow M(x_i) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

$$\text{Do đó: } u_{\min} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} \text{ tại } x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Câu 3:

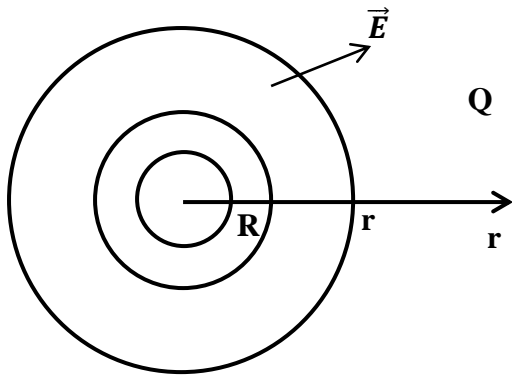
$$I = \iiint_{(V)} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz ; \quad (V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Sử dụng hệ trục tọa độ cầu tổng quát: $(V) \rightarrow (V'): r \leq 1$.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad |J| = abc r^2 \sin \theta$$

$$\rightarrow I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = abc \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{4} = \pi abc.$$

Câu 4:



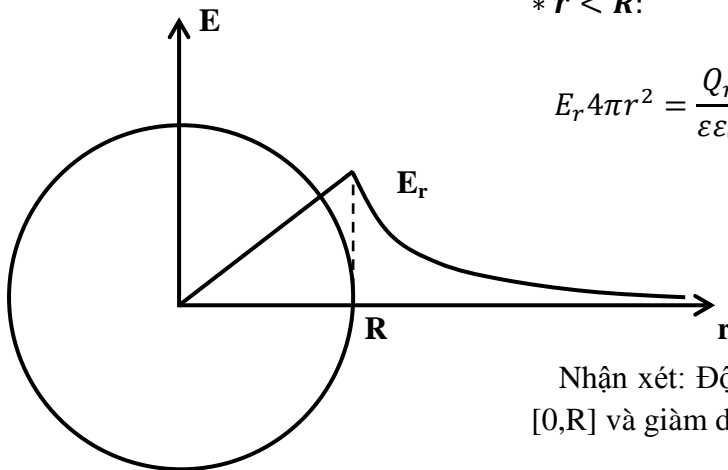
* $r \geq R$:

$$\oint_{(S^+)} \vec{E} d\vec{s} = \iiint_{(V)} dN \vec{E} dv \quad (\text{Oshogradsky - Gauss})$$

$$= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho dv = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0}.$$

$$\rightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \rightarrow \vec{E}_{(r)} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

* $r < R$:



$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_r}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\frac{r^3}{R^3} Q}{\epsilon \epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{r}{R^3} \rightarrow \vec{E}_{(r)} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}.$$

Nhận xét: Độ lớn cường độ điện trường $E(r)$ tăng tuyến tính khi $r \in [0, R]$ và giảm dần khi $r \in (R, +\infty)$.

Câu 5:

$$I = \oint_{(C)} f(x^2 + y^2)(x dx + y dy). \quad \text{Sử dụng công thức Green ta được:}$$

$$I = \pm \iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial [f(x^2 + y^2)]}{\partial x} \cdot y - \frac{\partial [f(x^2 + y^2)]}{\partial y} \cdot x \right\} dx dy = \pm \iint_{(S)} \left[y \frac{\partial f(x^2 + y^2)}{\partial x} - x \frac{\partial f(x^2 + y^2)}{\partial y} \right] dx dy$$

$$= \pm \iint_{(S)} [y \cdot f'(2x) - x \cdot f'(2y)] dx dy = \pm 2 \iint_{(S)} [y \cdot f(x) - x \cdot f(y)] dx dy = \pm 2 \iint_{(S)} [f(yx) - f(xy)] dx dy = 0.$$

--- HẾT ---

Ivanpham