

Lê Văn Luyện

email: lvluyn@yahoo.com

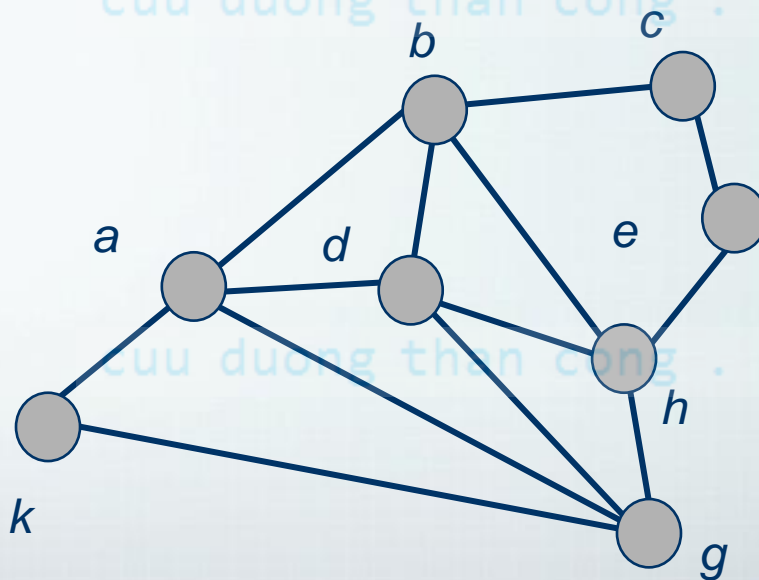
cuu duong than cong . com

# TOÁN RỜI RẠC

■ [www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyn/trr](http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyn/trr)

cuu duong than cong . com

# Đồ thị



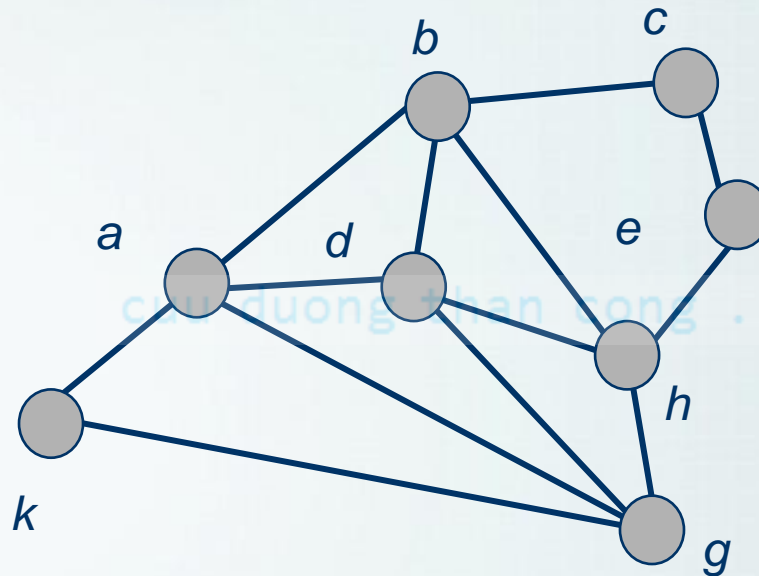
# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

## Định nghĩa đồ thị

**Định nghĩa 1.** Đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$  gồm:

- i)  $V$  là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là **đỉnh** (vertex) của  $G$ .
- ii)  $E$  là tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của  $E$  được gọi là một **cạnh** (edge) của  $G$ . Ký hiệu  $uv$ .

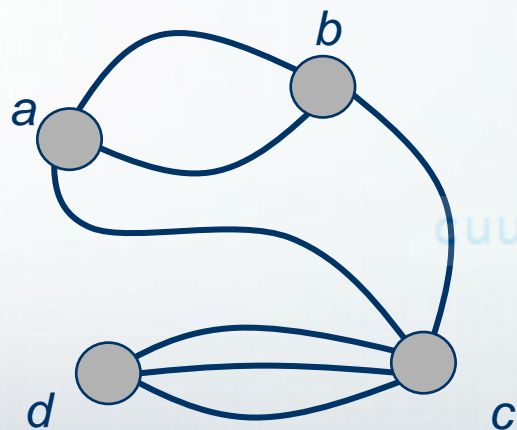
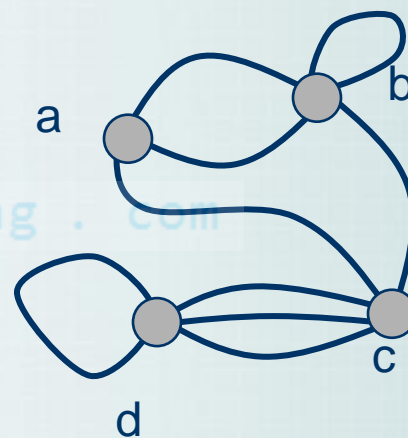
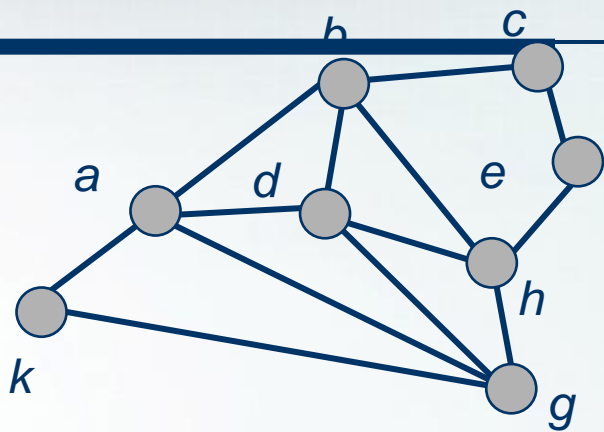
# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



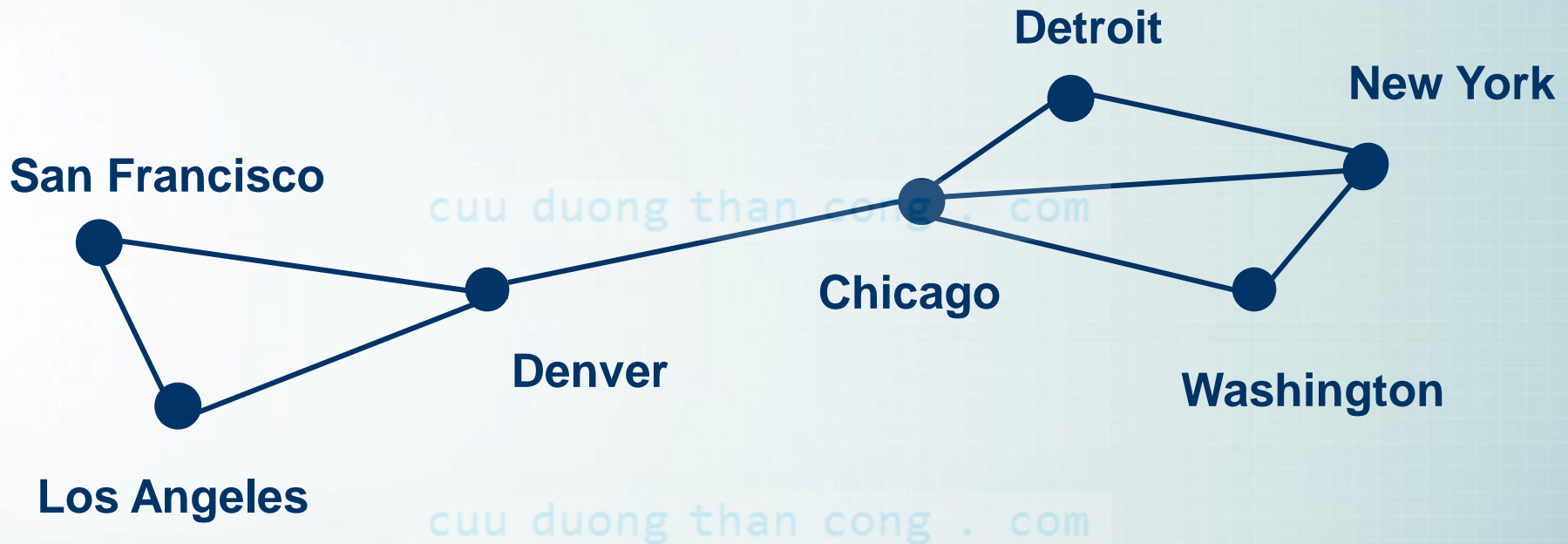
# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

## Chú ý

- ❖ Ta nói cạnh  $uv$  nối  $u$  với  $v$ , cạnh  $uv$  *kề* với  $u, v$ .
- ❖ Nếu  $uv \in E$  thì ta nói đỉnh  $u$  *kề* đỉnh  $v$ .
- ❖ Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song*.
- ❖ Cạnh  $uu$  có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.
- ❖ **Định nghĩa 2.** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là *đồ thị đơn vô hướng*.

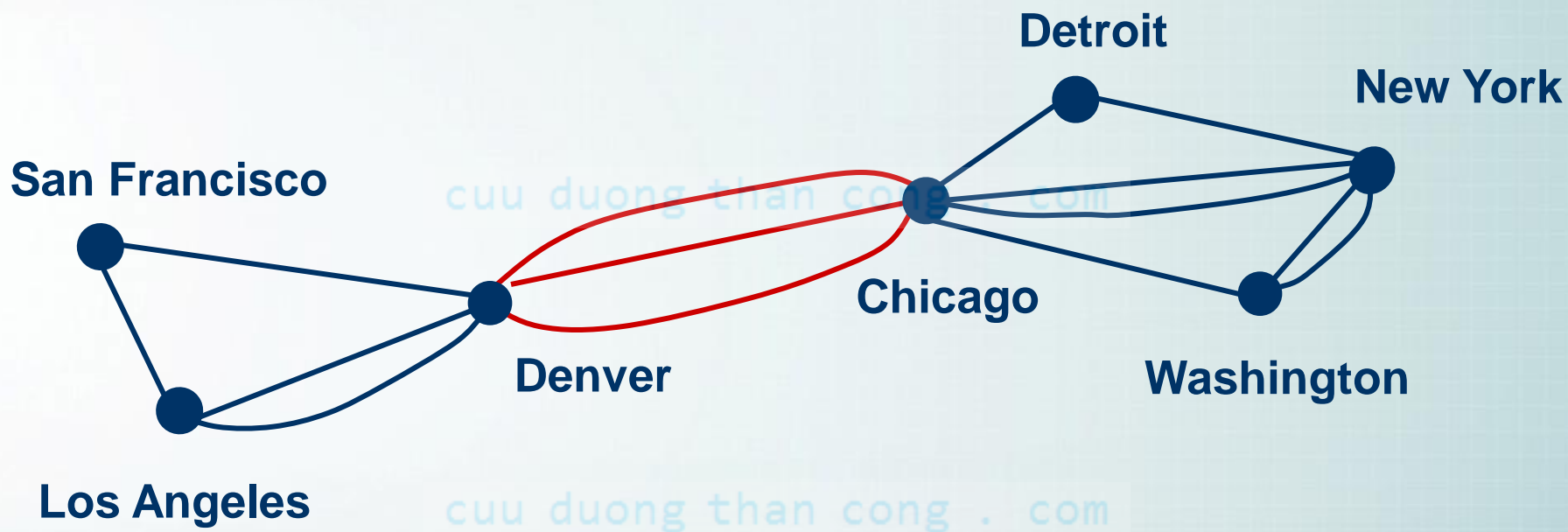


# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



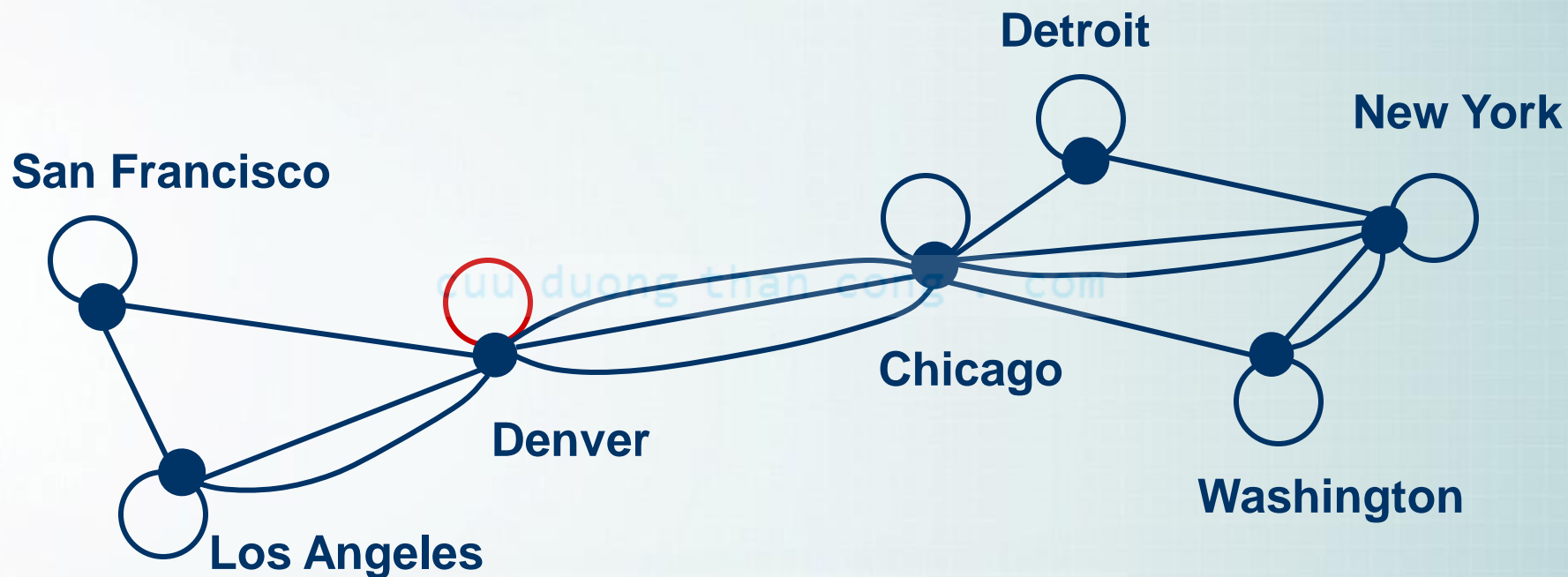


# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản





# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

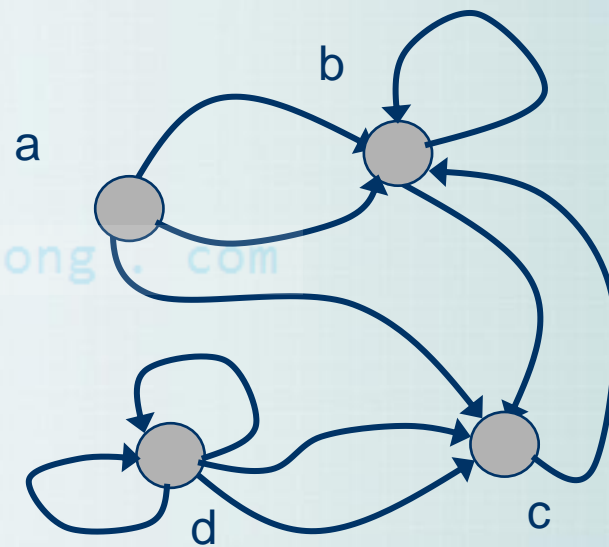
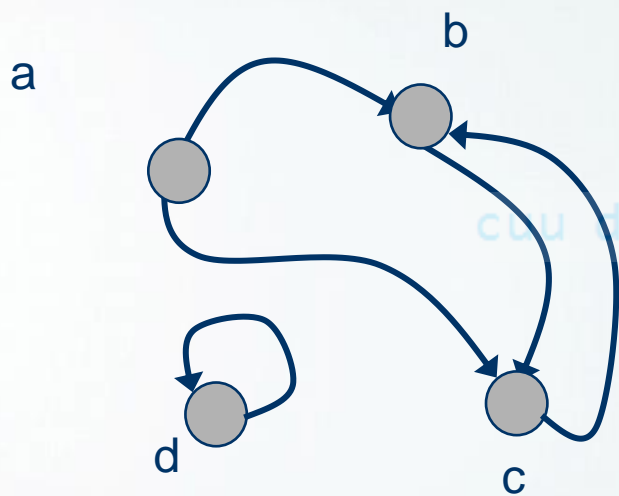
## Định nghĩa 3

Đồ thị **có hướng**  $G=(V,E)$  gồm:

i)  $V$  là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là **đỉnh** của  $G$ .

ii)  $E$  là tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của  $E$  được gọi là một **cung** (cạnh) của  $G$ . Ký hiệu  $uv$ .

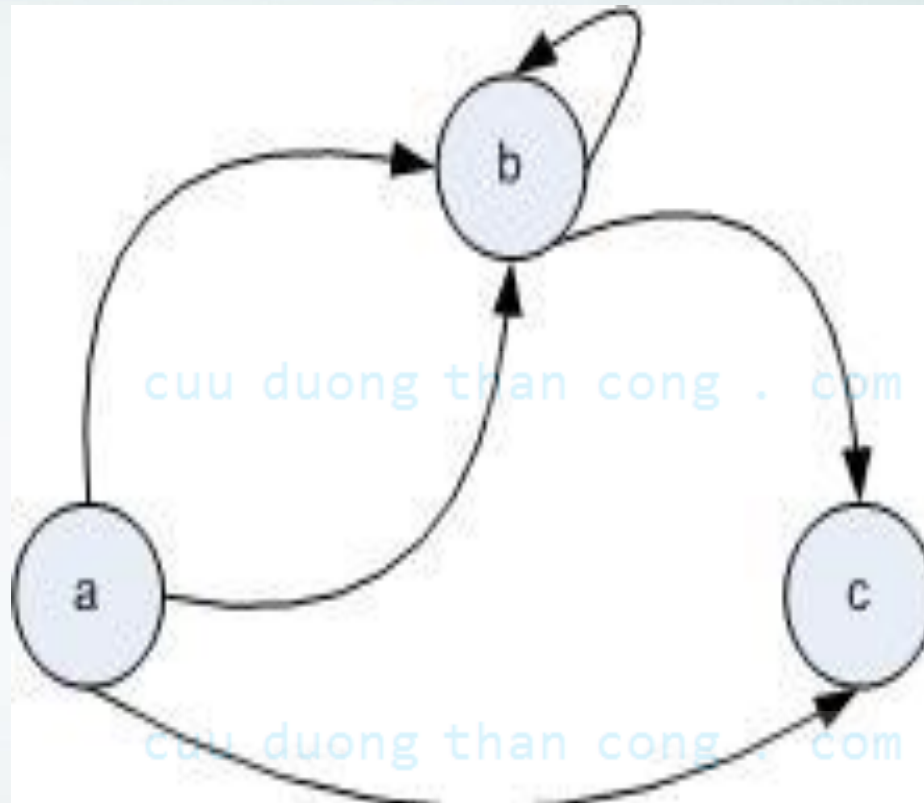
Ta nói cung  $uv$  đi từ  $u$  đến  $v$ , cung  $uv$  kề với  $u,v$

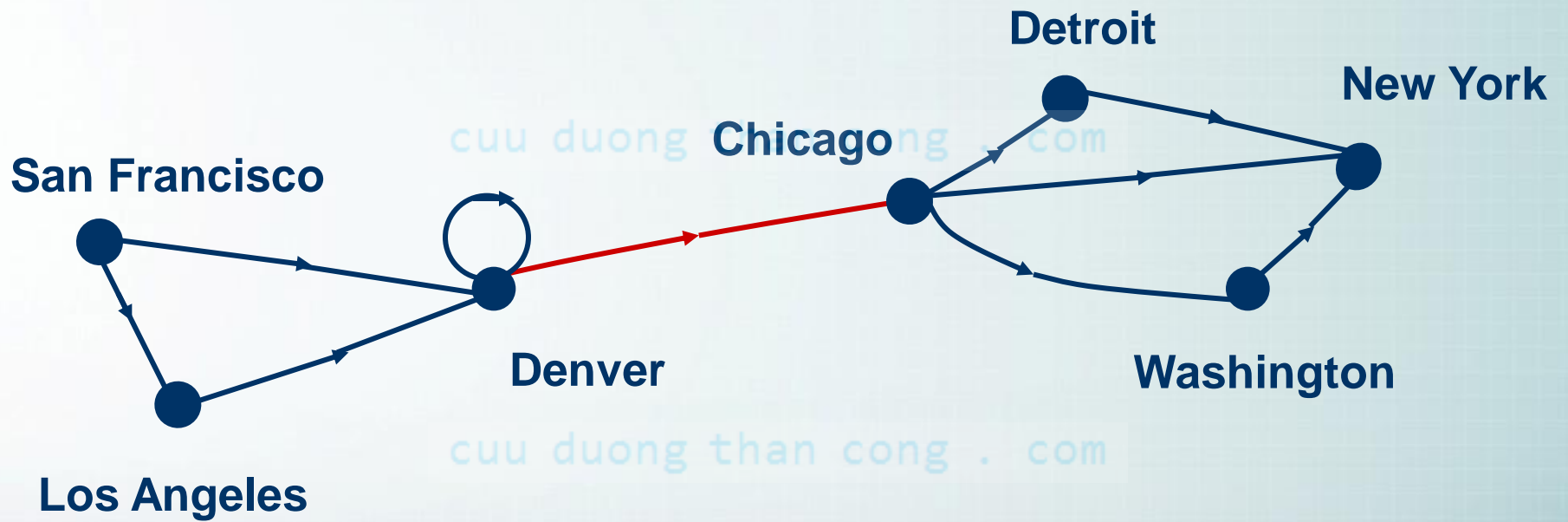


# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

## Chú ý

- ❖ Nếu  $uv$  là một cung thì ta nói:
  - Đỉnh  $u$  và  $v$  **kề nhau**.
  - Đỉnh  $u$  gọi là đỉnh **đầu** (gốc), đỉnh  $v$  là đỉnh **cuối** (ngọn) của cung  $uv$ . Đỉnh  $v$  là đỉnh **sau** của đỉnh  $u$ .
- ❖ Hai cung có cùng gốc và ngọn gọi là cung **song song**.
- ❖ Cung có điểm gốc và ngọn trùng nhau gọi là **khuyên**.









# Những khái niệm và tính chất cơ bản

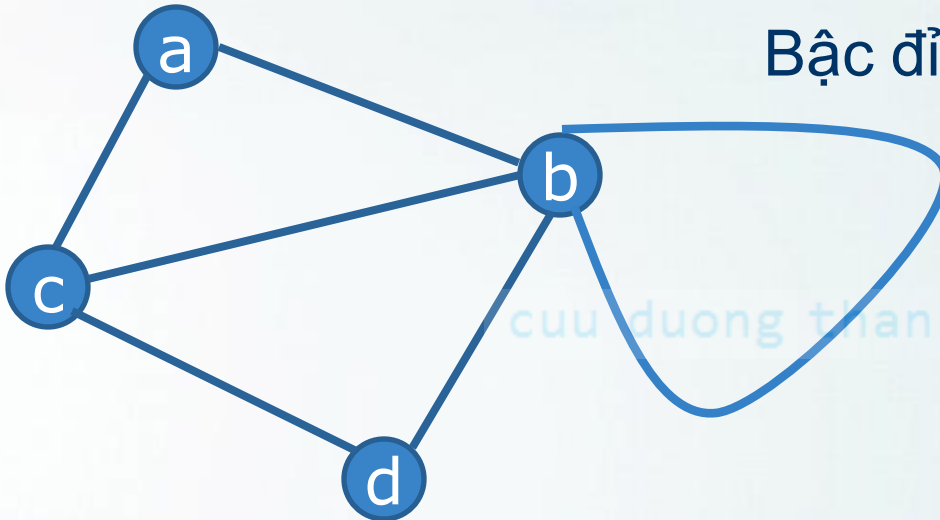
---

## Bậc của đỉnh

Cho đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$ . **Bậc** của đỉnh  $v$ , ký hiệu  $\deg(v)$ , là số cạnh kề với  $v$ , trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

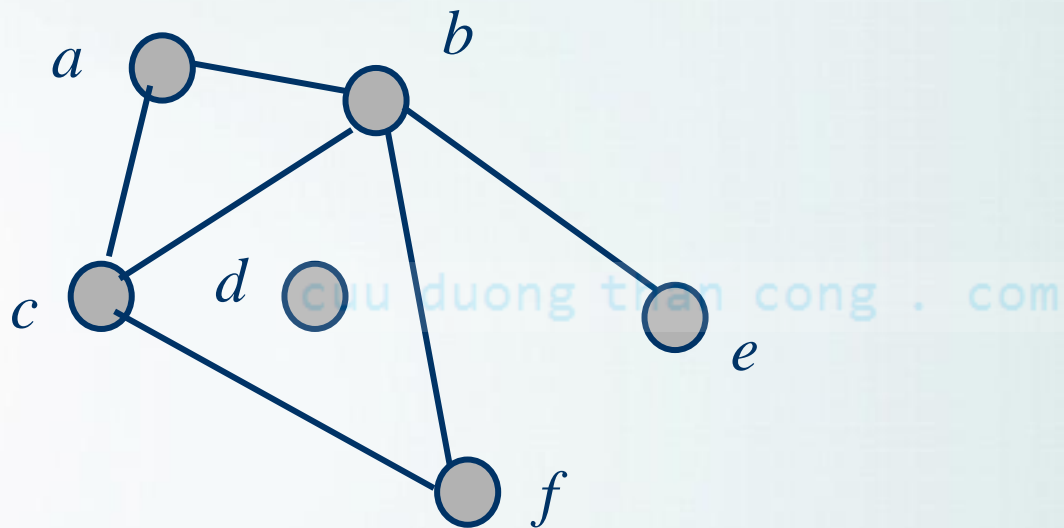
Bậc đỉnh a:  **$\deg(a) = 2$**

Bậc đỉnh b:  **$\deg(b) = 5$**



Bậc đỉnh c:  **$\deg(c) = 3$**

Bậc đỉnh d:  **$\deg(d) = 2$**



Bậc của các đỉnh?

# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

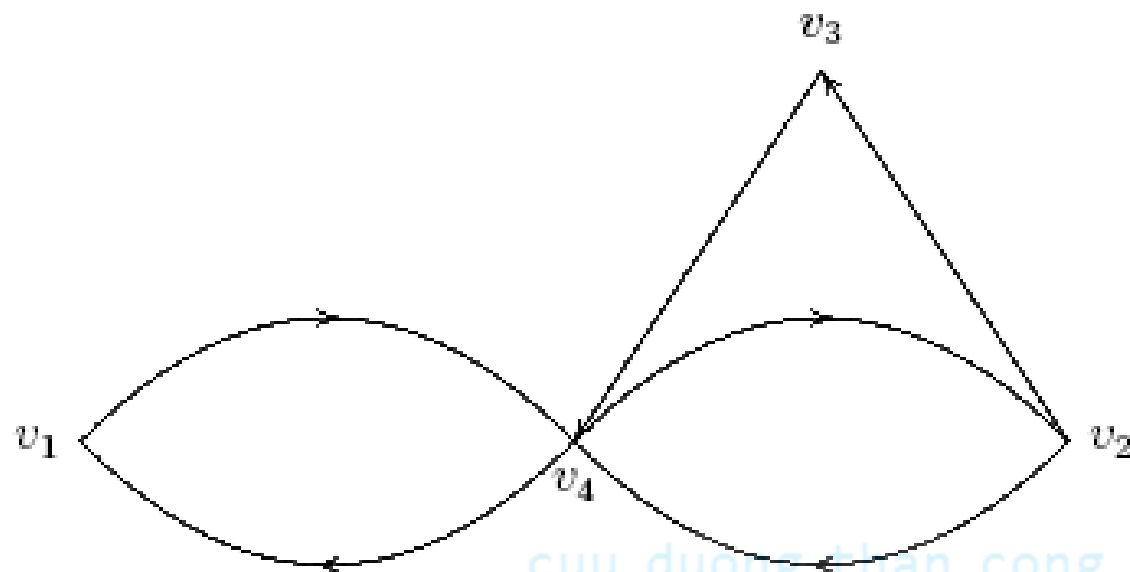
Cho đồ thị có hướng  $G = (V, E)$ ,  $v \in V$

1)  $\deg^-(v) :=$  số cung có đỉnh cuối là  $v$ , gọi là **bậc vào** của  $v$ .

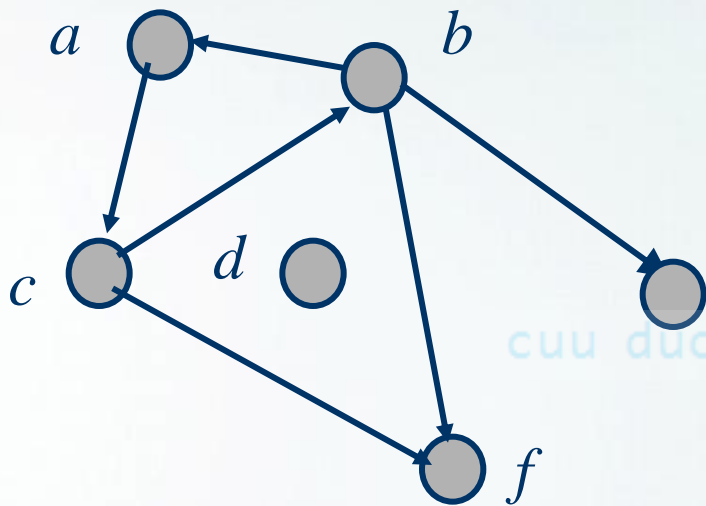
2)  $\deg^+(v) :=$  số cung có đỉnh đầu là  $v$ , gọi là **bậc ra** của  $v$

3)  $\deg(v) := \deg^-(v) + \deg^+(v)$

□ Đỉnh bậc 0 gọi là **đỉnh cô lập**. Đỉnh bậc 1 gọi là **đỉnh treo**



$$\begin{aligned}
 d^+(v_1) &= d^-(v_1) = 1, & d^+(v_2) &= 2, d^-(v_2) = 1, \\
 d^+(v_3) &= d^-(v_3) = 1, & d^+(v_4) &= 2, d^-(v_4) = 3.
 \end{aligned}$$



Bậc đỉnh a:  $\deg^-(a)= 1$  ;  $\deg^+(a)=1$

Bậc đỉnh b:  $\deg^-(b)= 1$  ;  $\deg^+(b)=3$

Bậc đỉnh c:  $\deg^-(c)= 1$  ;  $\deg^+(c)=2$

Bậc đỉnh d:  $\deg^-(d)= 0$  ;  $\deg^+(d)=0$

Bậc đỉnh e:  $\deg^-(e)= 1$  ;  $\deg^+(e)=0$

Bậc đỉnh f:  $\deg^-(f)= 2$  ;  $\deg^+(f)=0$

# 1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

## Định lí

Cho đồ thị  $G = (V, E)$ ,  $m$  là số cạnh (cung)

1) 
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

2) Nếu  $G$  có hướng thì:

$$m = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

3) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn



# Ví dụ

Cho đồ thị  $G$  có 14 cạnh, trong đó có 3 đỉnh bậc 1, 2 đỉnh bậc 3, 2 đỉnh bậc 4, 1 đỉnh bậc 5, các đỉnh còn lại có bậc là 2. Hỏi  $G$  có bao nhiêu đỉnh?

**Giải.** Gọi  $x$  là số đỉnh bậc 2. Theo định lý giữa số cạnh và bậc, ta có

$$3.1 + 2.3 + 2.4 + 1.5 + 2x = 2.14$$

Suy ra  $x = 3$ . Vậy số đỉnh của  $G$  là

$$3 + 2 + 2 + 1 + 3 = 11 \text{ (đỉnh)}$$

---

**Ví dụ.** Cho đồ thị  $G$  có 13 cạnh, trong đó có 3 đỉnh bậc 1, 4 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 5, các đỉnh còn lại có bậc là 3 hoặc 4. Hỏi  $G$  có bao nhiêu đỉnh bậc 3 và đỉnh bậc 4?

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## 2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

Ta sử dụng ma trận kề.

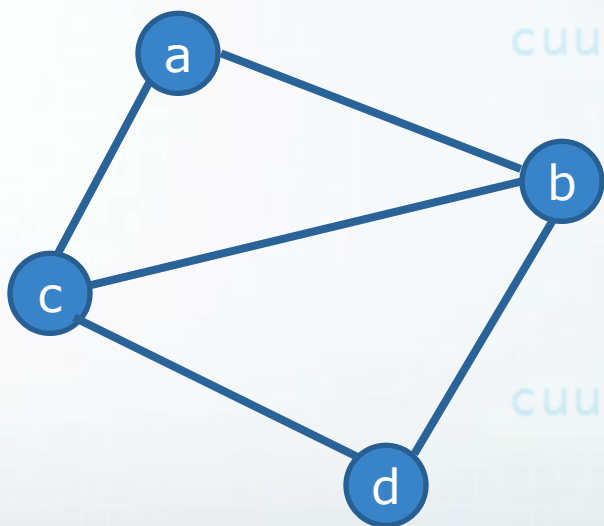
Cho  $G = (V, E)$  với  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Ma trận kề của  $G$  là ma trận  $A = (a_{ij})_n$  xác định như sau:

$a_{ij}$  = số cạnh (số cung) đi từ đỉnh  $i$  đến đỉnh  $j$

## 2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

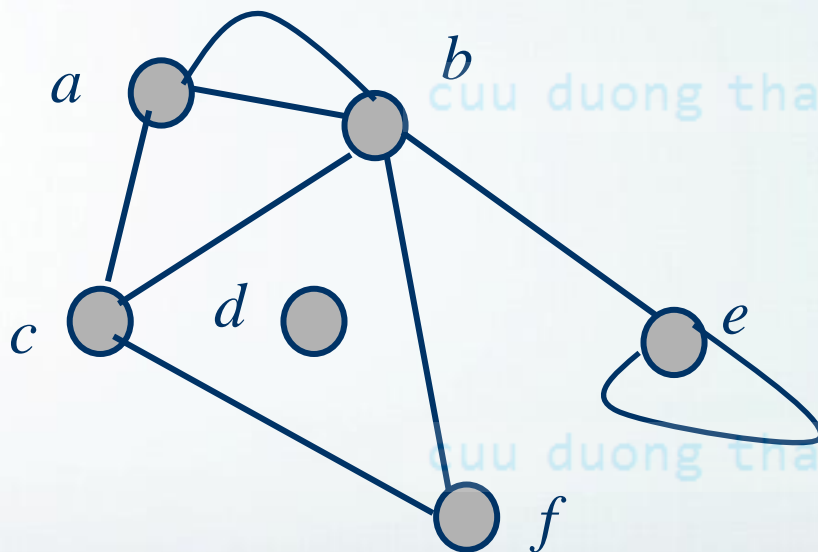
Tìm ma trận kề



	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	1
c	1	1	0	1
d	0	1	1	0

## 2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

Tìm ma trận kề



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	0	2	1	0	0	0
<i>b</i>	2	0	1	0	1	1
<i>c</i>	1	1	0	0	0	1
<i>d</i>	0	0	0	0	0	0
<i>e</i>	0	1	0	0	2	0
<i>f</i>	0	1	1	0	0	0

### 3. Đồng cấu

#### Định nghĩa

Cho hai đơn đồ thị  $G = (V, E)$  và  $G' = (V', E')$ . Ta nói rằng  $G$  **đồng cấu**  $G'$ , ký hiệu  $G \cong G'$ , nếu tồn tại song ánh  $f : V \rightarrow V'$  sao cho:

$uv$  là cạnh của  $G \Leftrightarrow f(u)f(v)$  là cạnh của  $G'$

### 3. Đồng cấu

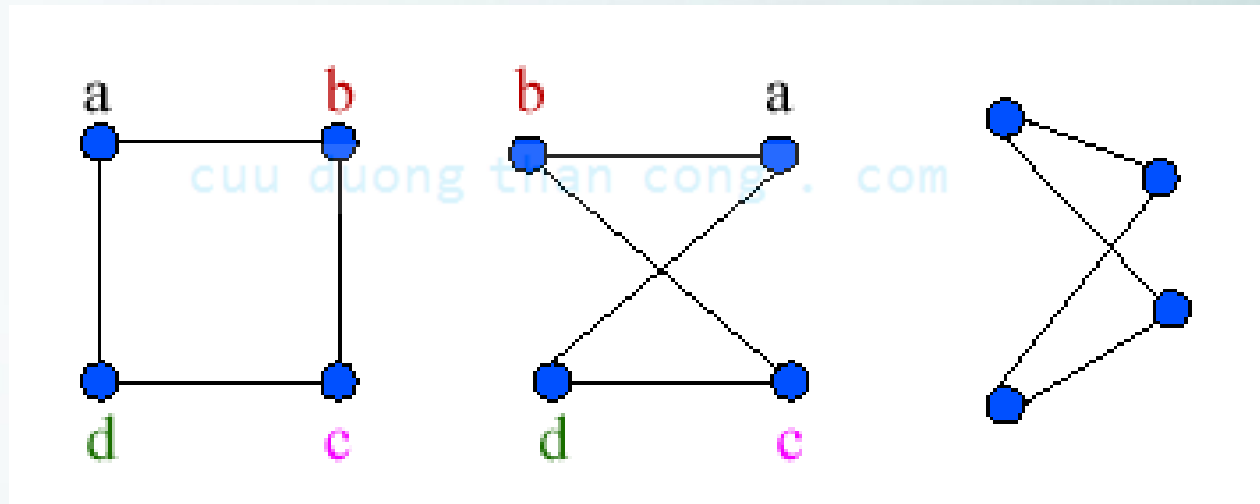
#### Chú ý

□ Nếu  $G$  và  $G'$  là các đơn đồ thị vô hướng đồng cấu qua ánh xạ  $f$  thì chúng có:

- Cùng số đỉnh
- Cùng số cạnh
- Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn (vd: số đỉnh bậc 2 của  $G$  và  $G'$  bằng nhau)
- $\deg v = \deg f(v)$

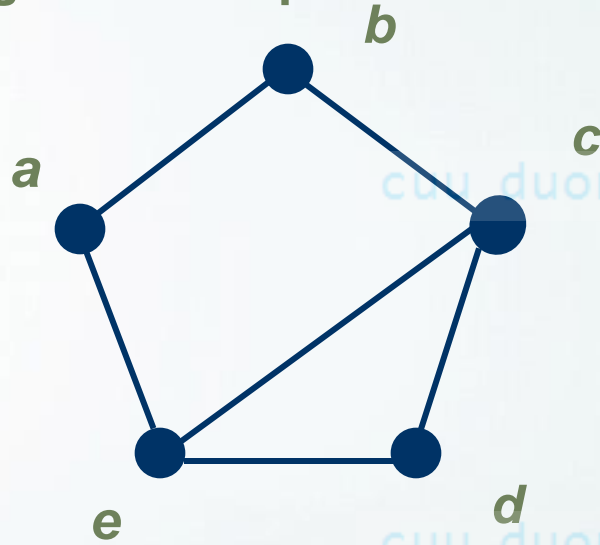


### 3. Đồng cấu

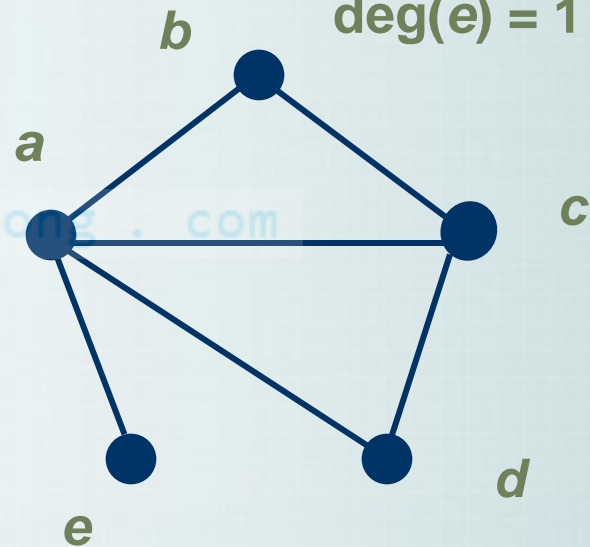


# Ví dụ

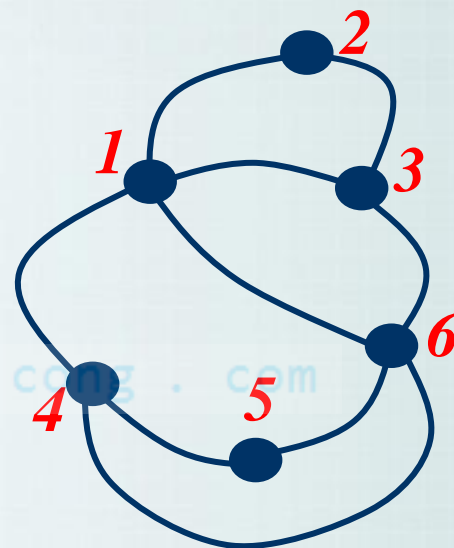
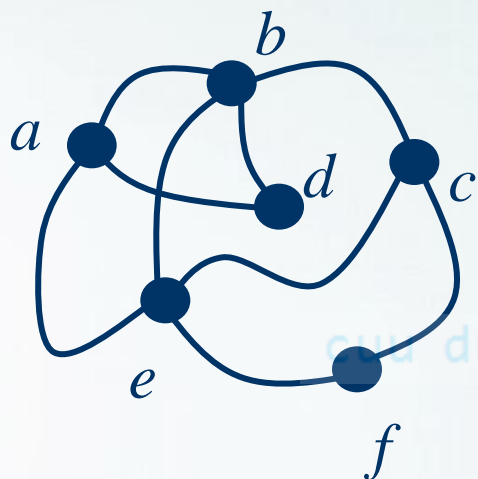
Không có đỉnh bậc 1



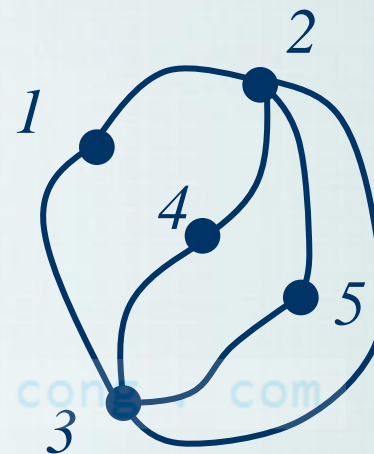
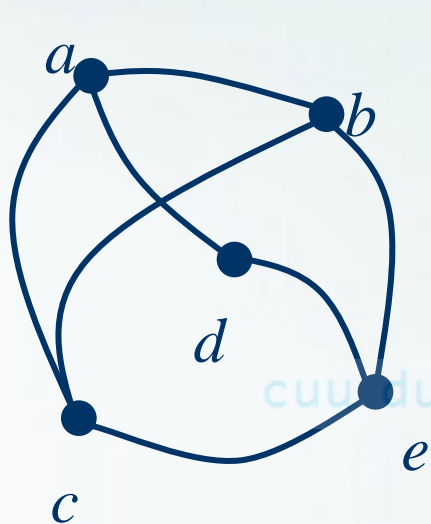
$\deg(e) = 1$



**Không đẳng cấu**

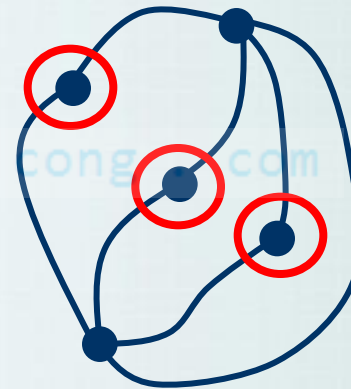
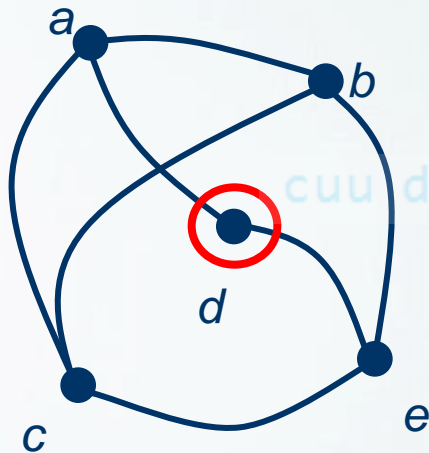


**Đẳng cấu**



**Không đẳng cấu**

# Đẳng cấu không?

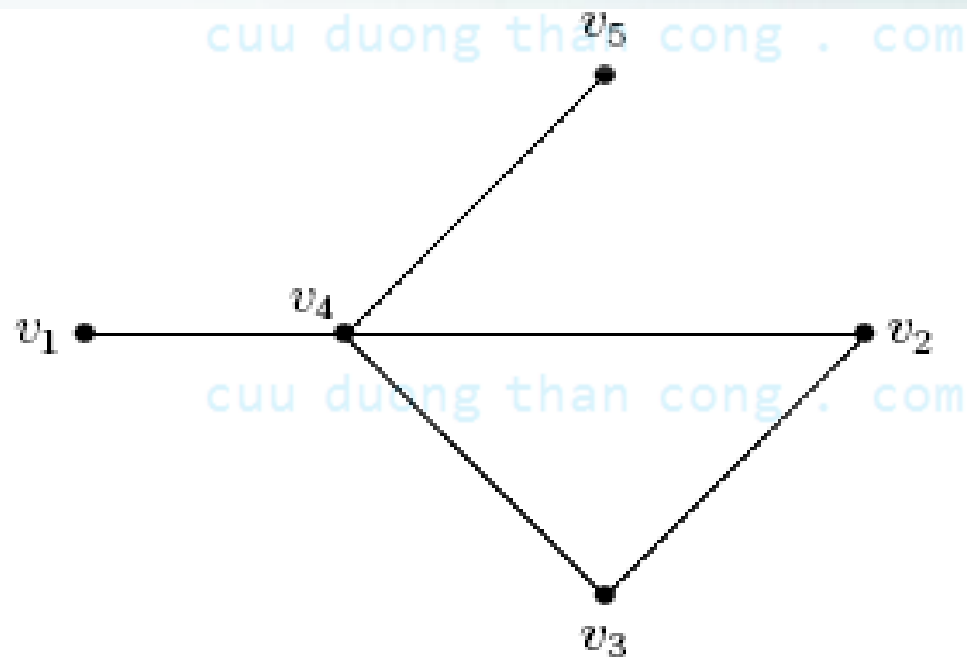
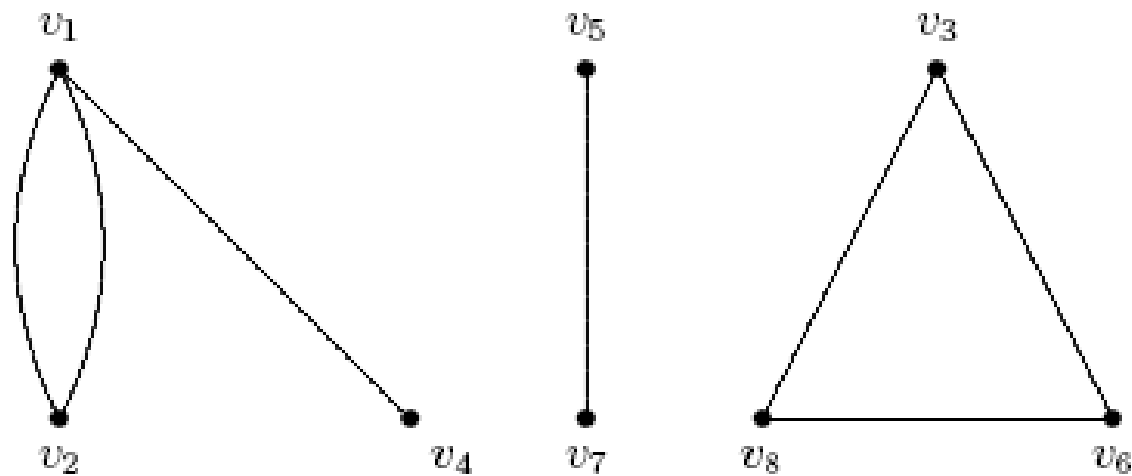


## 4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

**Định nghĩa.** Cho đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$ . Trên  $V$  ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

$u \sim v \Leftrightarrow u \equiv v$  hay có một đường đi từ  $u$  đến  $v$

- a) Nếu  $u \sim v$  thì ta nói hai đỉnh  $u$  và  $v$  **liên thông** với nhau
- b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một **thành phần liên thông** của  $G$
- c) Nếu  $G$  chỉ có một thành phần liên thông thì  $G$  gọi là **liên thông**



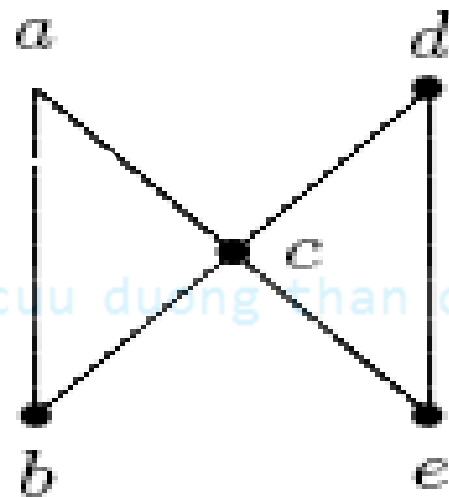
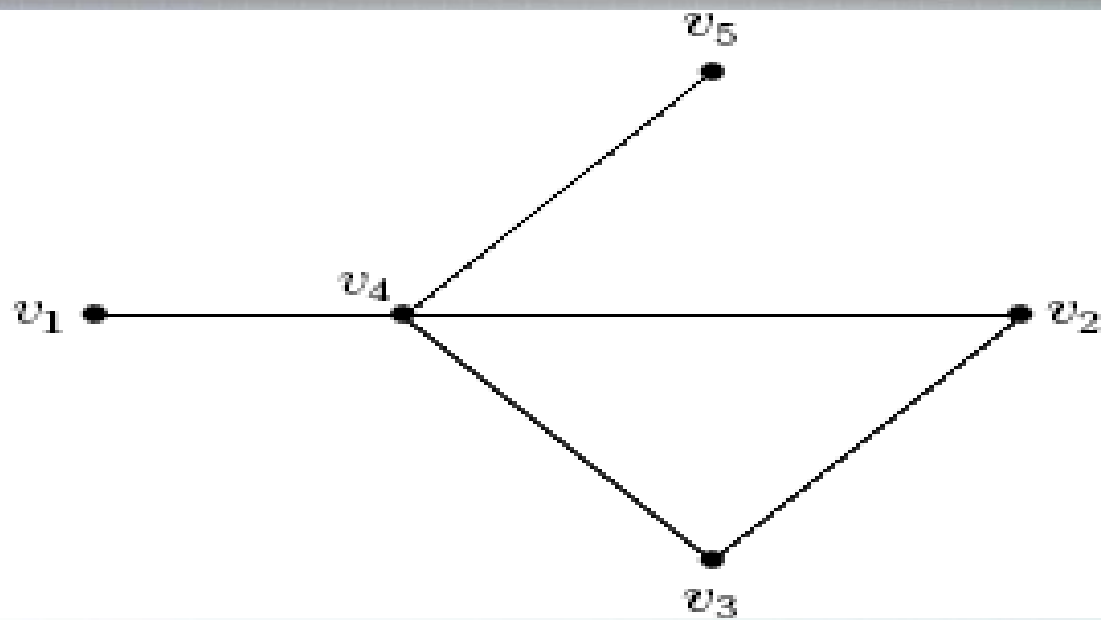


## 4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

**Định nghĩa.** Cho  $G = (V, E)$  là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh  $v$  được gọi là **đỉnh khớp** nếu  $G - v$  không liên thông ( $G - v$  là đồ thị con của  $G$  có được bằng cách xóa  $v$  và các cạnh kề với  $v$ )

b) Cạnh  $e$  được gọi là **cầu** nếu  $G - e$  không liên thông ( $G - e$  là đồ thị con của  $G$  có được bằng cách xóa cạnh  $e$ ).



## 4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

Cho  $G = (V, E)$  là đồ thị vô hướng  $u, v \in V$

**a) Đường đi** (dãy chuyền) có chiều dài  $k$  nối hai đỉnh  $u, v$  là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau

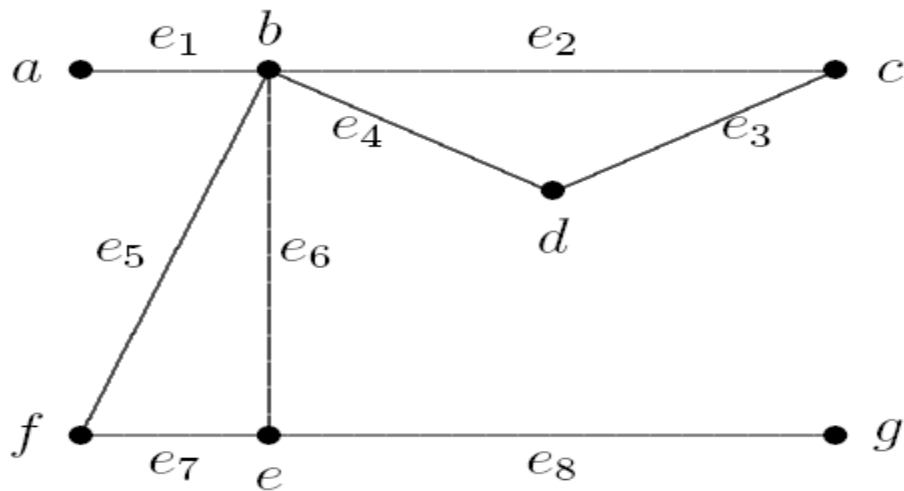
$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$  sao cho:

$$v_0 = u, v_k = v, e_i = v_{i-1} v_i, i = 1, 2, \dots, k$$

cuu duong than cong . com

## 4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

- a) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*
- b) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*
- c) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh
- d) Đường đi được gọi là *chu trình sơ cấp* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh và không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần



Chu trình sơ cấp nào không?

$(a, e_1, b, e_2, c, e_3, d, e_4, b)$  là đường đi từ đỉnh  $a$  tới đỉnh  $b$  có chiều dài là 4.

Tuy nhiên, trong trường hợp này, đồ thị của chúng ta là đơn đồ thị, do vậy có thể gọi đường đi này bằng 1 cách ngắn gọn như sau:  $(a, b, c, d, b)$

Chu trình sơ cấp:  $(b, c, d, b)$      $(b, f, e, b)$

# Đường đi Euler

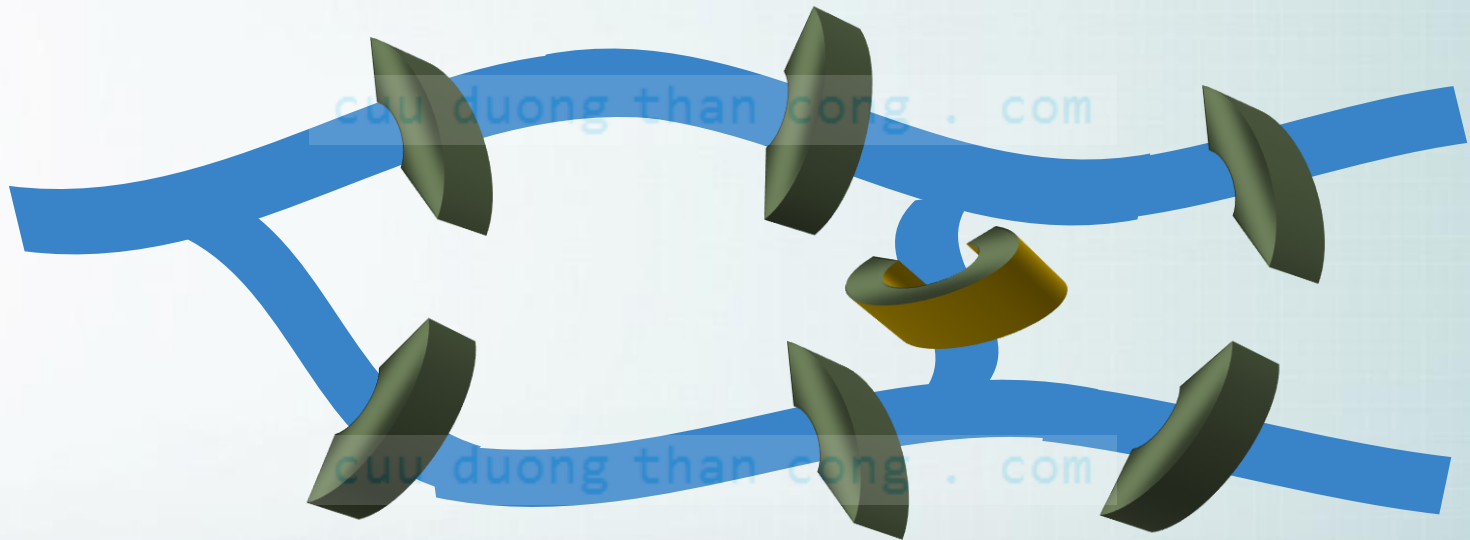
---



Euler

# Đường đi Euler

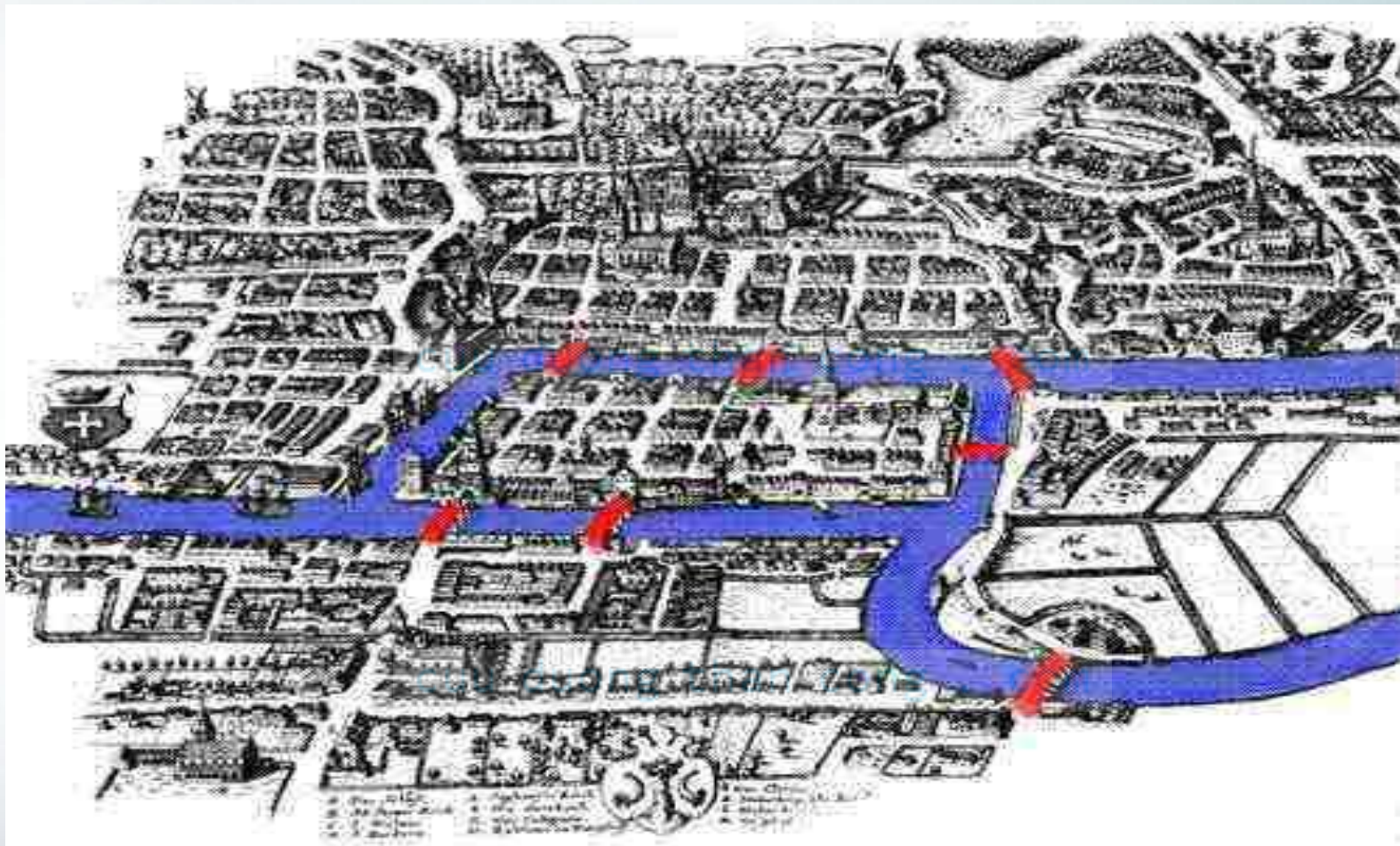
**Bài toán.** Thị trấn Königsberg chia thành 4 phần bởi các nhánh của dòng sông Pregel



Bốn phần này được nối kết bởi 7 cây cầu

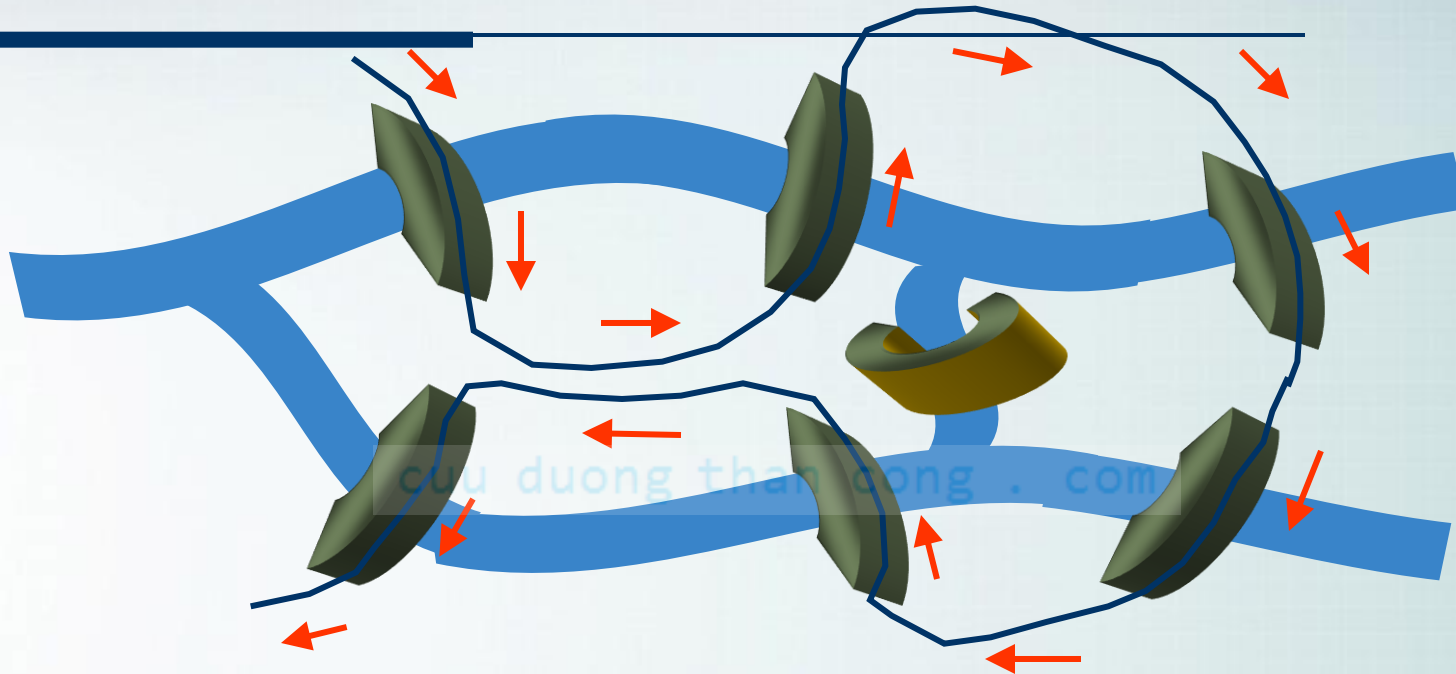


# Đường đi Euler

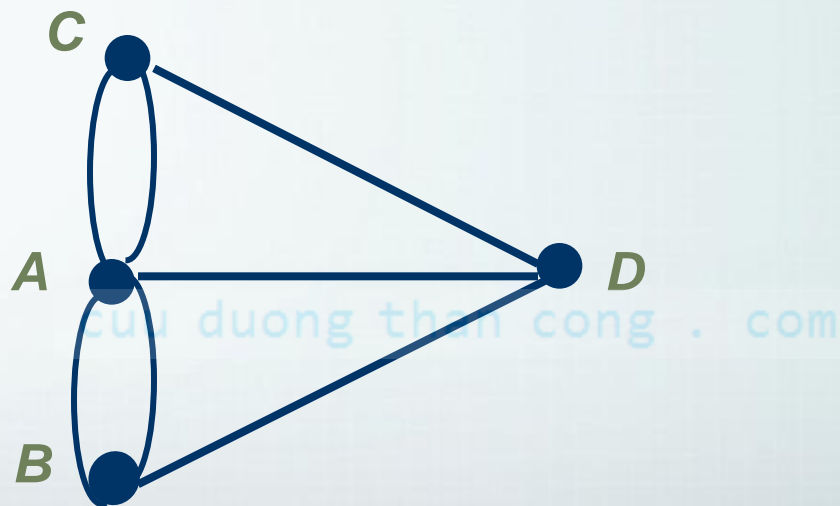
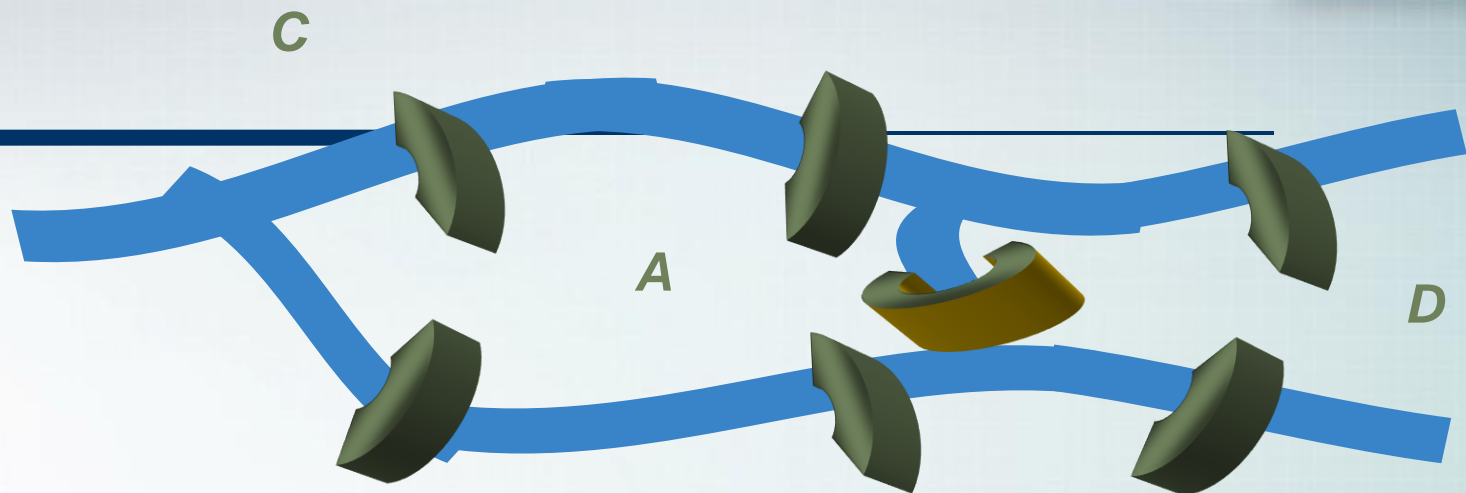




# Đường đi Euler



**Câu hỏi.** Có thể đi qua bảy cây cầu mà không có cây cầu nào đi quá 1 lần



# Đường đi Euler

---

## Đường đi Euler

### Định nghĩa.

1. *Đường đi Euler* là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần. *Chu trình Euler* là chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

2. Đồ thị được gọi là *đồ thị Euler* nếu nó có chu trình Euler

# Đường đi Euler

## Điều kiện cần và đủ.

Cho  $G = (V, E)$  là đồ thị vô hướng liên thông.  $G$  là đồ thị Euler  $\Leftrightarrow$  Mọi đỉnh của  $G$  đều có bậc chẵn.

Nếu  $G$  có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì  $G$  có đường đi Euler

## Nhận xét.

- Nếu đồ thị  $G$  chỉ có 2 đỉnh bậc lẻ thì ta có thể vẽ đồ thị bằng 1 nét.
- Nếu đồ thị  $G$  chỉ có  $2k$  đỉnh bậc lẻ thì ta có thể vẽ đồ thị bằng  $k$  nét

# Đường đi Euler

---

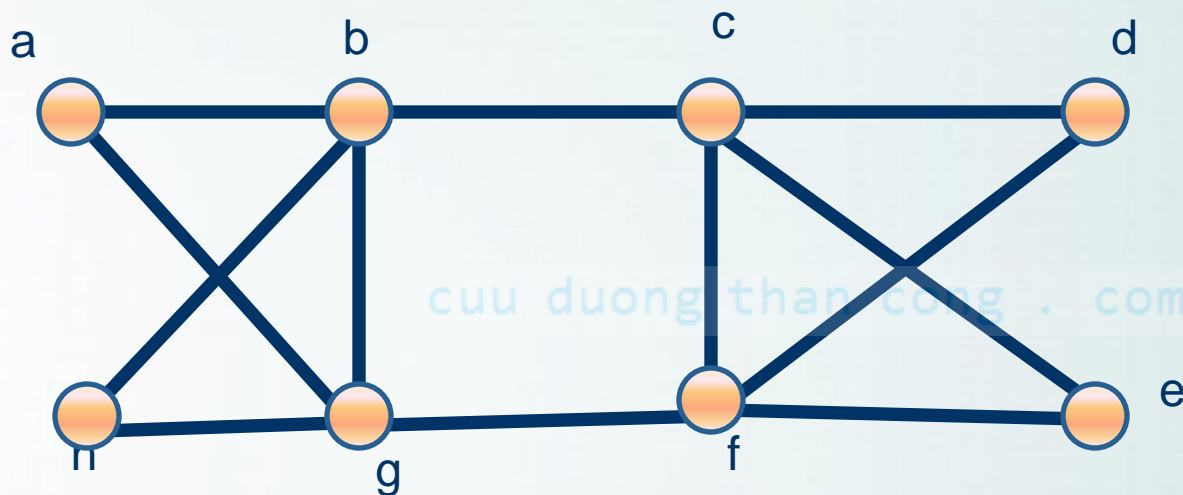
## Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của  $G$  và tuân theo qui tắc sau:

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.
2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác.

cuu duong than cong . com

# Đường đi Euler



abcfdcefg h b g a