

cuu duong than cong. com

LOGIC VỊ TỪ

cuu duong than cong. com

Nhắc lại tập hợp

Định nghĩa: **Tập hợp** là một bộ sưu tập gồm các vật. Mỗi vật được gọi là một phần tử của tập hợp.

Kí hiệu: A, B, X, \dots

Nếu x là phần tử của tập hợp A , ta kí hiệu $x \in A$

Ví dụ:

- $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ là tập hợp các số tự nhiên.
- $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ tập hợp các số nguyên.
- $\mathbf{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ tập hợp các số hữu tỉ.
- \mathbf{R} : tập hợp các số thực.
- \mathbf{C} : Tập hợp các số phức.

IV. Logic vị từ

- 1. Định nghĩa** **Vị từ** là một khẳng định $p(x,y,..)$, trong đó $x,y,..$ là các biến thuộc tập hợp $A, B, ...$ cho trước sao cho:
- Bản thân $p(x,y,..)$ không phải là mệnh đề.
 - Nếu thay $x,y,...$ thành giá trị cụ thể thì $p(x,y,..)$ là mệnh đề.

Ví dụ. Các phát biểu sau là vị từ (chưa là mệnh đề)

- $p(n) = "n + 1 \text{ là số nguyên tố}"$.
- $q(x,y) = "x^2 + y = 1"$.
- $r(x,y,z) = "x^2 + y^2 > z"$.

Khi thay các giá trị cụ thể của n,x,y,z thì chúng là các MĐ.

2. Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ $p(x)$, $q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề

- Phủ định $\neg p(x)$
- Phép nối liền $p(x) \wedge q(x)$
- Phép nối rời $p(x) \vee q(x)$
- Phép kéo theo $p(x) \rightarrow q(x)$
- Phép kéo theo hai chiều $p(x) \leftrightarrow q(x)$

IV. Logic vị từ

Khi xét một mệnh đề $p(x)$ với $x \in A$. Ta có các trường hợp sau

- **TH1.** Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $a \in A$, ta có $p(a)$ đúng.
- **TH2.** Với một số giá trị $a \in A$, ta có $p(a)$ đúng.
- **TH3.** Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $a \in A$, ta có $p(a)$ sai.

Ví dụ. Cho các vị từ $p(x)$ sau với $x \in \mathbf{R}$

- $p(x) = "x^2 + 1 > 0"$ đúng với x tùy ý (với mọi x).
- $p(x) = "x^2 - 2x + 1 = 0"$ chỉ đúng với $x = 1$.
- $p(x) = "x^2 - 2x + 3 = 0"$ sai với x tùy ý (với mọi x).

Lượng từ

Định nghĩa. Cho $p(x)$ là một vị từ theo một biến xác định trên A . Ta định nghĩa **các mệnh đề lượng từ hóa** của $p(x)$ như sau:

- Mệnh đề “*Với mọi x thuộc A , $p(x)$* ”, kí hiệu bởi

$$“\forall x \in A, p(x)”$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p(a)$ luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.

- Mệnh đề “*Tồn tại (ít nhất) hay có (ít nhất) một x thuộc A , $p(x)$* ” kí hiệu bởi :

$$“\exists x \in A, p(x)”$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Lượng từ

\forall : được gọi là lượng từ **phổ dụng**

\exists : được gọi là lượng từ **tồn tại**

Ví dụ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$ ”

- “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$ ”

- “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 2x$ ”

- “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$ ”

Mệnh đề lượng từ hoá

Định nghĩa. Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các **mệnh đề lượng từ hóa** của $p(x, y)$ như sau:

$$“\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)” = “\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))”$$

$$“\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)” = “\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))”$$

$$“\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)” = “\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))”$$

$$“\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)” = “\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))”$$

Ví dụ 1

- Mệnh đề “ $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ ” đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 1 \in \mathbf{R}$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

cuu duong than cong. com

- Mệnh đề “ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ ” đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in \mathbf{R}$, tồn tại $y_a \in \mathbf{R}$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

cuu duong than cong. com

Ví dụ 2

- Mệnh đề “ $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ ” đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có $x = a \in \mathbf{R}$ để bất đẳng thức $a + 2y < 1$ được thỏa với mọi $y \in \mathbf{R}$ (chẳng hạn, $y = -a/2 + 2$ không thể thỏa bất đẳng thức này).

- Mệnh đề “ $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + 2y < 1$ ” đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 0 \in \mathbf{R}$ chẳng hạn thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

IV. Logic vị từ

Định lý. Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

- 1) $“\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)” \Leftrightarrow “\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)”$
- 2) $“\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)” \Leftrightarrow “\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)”$
- 3) $“\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)” \Rightarrow “\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)”$

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $p(x,y,..)$ có được bằng cách thay \forall thành \exists , thay \exists thành \forall và vị từ $p(x,y,..)$ thành $\neg p(x,y,..)$.

Với vị từ theo 1 biến ta có:

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- “ $\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$ ”

- “ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ”.

Trả lời

“ $\exists x \in A, 2x + 1 > 0$ ”

“ $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$ ”.

Bài tập

❖ **Tại lớp:**

❖ **Về nhà:** [cuu duong than cong. com](http://cuuduongthancong.com)

[cuu duong than cong. com](http://cuuduongthancong.com)

Đặc biệt hóa phổ dụng

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng \forall , khi ấy nếu thay thế x bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng

Ví dụ:

“Mọi người đều chết”

“Socrate là người”

Vậy “Socrate cũng chết”

$$\forall x \in A, p(x)$$

$$a \in A$$

$$\therefore p(a)$$

cuu duong than cong. com

QUY NẠP

cuu duong than cong. com

V. Quy nạp

Chứng minh $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$ với $n \geq 1$

1. Phương pháp

Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số n , như $P(n)$. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq N_0$.

- Quá trình chứng minh quy nạp bao gồm 2 bước:

- *Bước cơ sở:* Chỉ ra $P(N_0)$ đúng.
- *Bước quy nạp:* Chứng minh nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Trong đó $P(k)$ được gọi là giả thiết quy nạp.

V. Quy nạp

Ví dụ. Chứng minh $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ với mọi số nguyên dương n . (bài tập 15a)

Gọi $P(n) = "1+3+\dots+(2n-1)=n^2"$

+ Bước cơ sở:

Hiển nhiên $P(1)$ đúng vì $1 = 1^2$.

V. Quy nạp

+ Bước quy nạp:

- Giả sử $P(k)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

- Ta phải chỉ ra rằng $P(k+1)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Từ giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

- Suy ra, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n

Ví dụ

$$CM \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad \forall n \geq 1$$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

Bài tập

❖ **Tại lớp:**

❖ **Về nhà:**

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com