

LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Định nghĩa Tập hợp

1. Khái niệm

⊕ **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của Toán học.

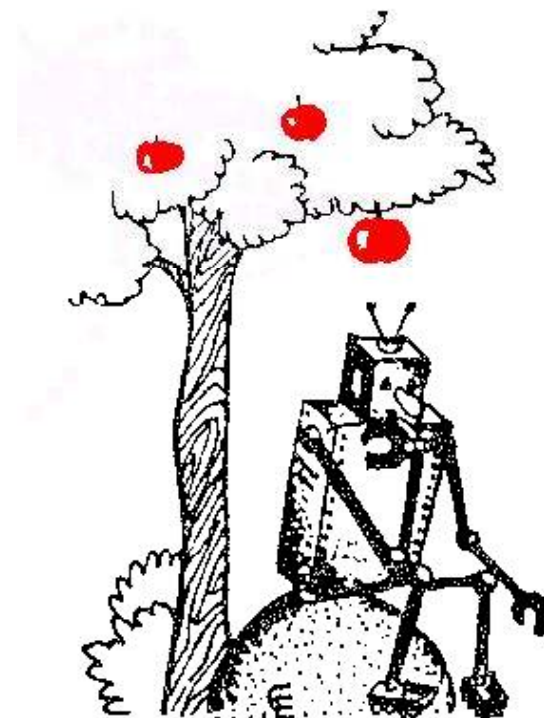
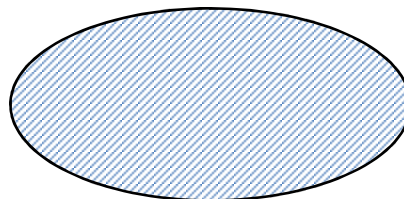
⊕ Ví dụ:

1) Tập hợp sinh viên của một trường đại học.

2) Tập hợp các số nguyên

3) Tập hợp các trái táo trên một cây cụ thể.

⊕ **Sơ đồ Ven:**



Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa

Số phần tử của tập hợp A được gọi là *lực lượng của tập hợp*, kí hiệu $|A|$.

Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A *hữu hạn*.

Ngược lại, ta nói A *vô hạn*.

Ví dụ.

\mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{R} , là các tập vô hạn

$X = \{1, 3, 4, 5\}$ là tập hữu hạn $|X|=4$

Cách xác định tập hợp

- ⊕ Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

$$A = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$$

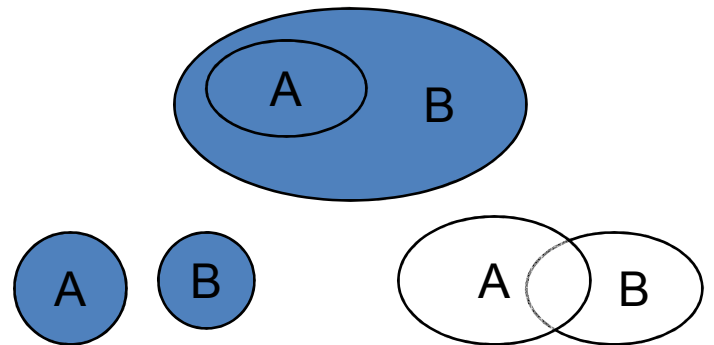
- ⊕ Đưa ra tính chất đặc trưng

$$B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3 \}$$

Quan hệ giữa các tập hợp

⊕ Tập hợp con

- ⊕ A là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B. Ký hiệu: $A \subset B$.



⊕ Hai tập hợp bằng nhau

- ⊕ $A = B$ nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B và ngược lại.

2. Các phép toán tập hợp

- **a. Phép hợp**

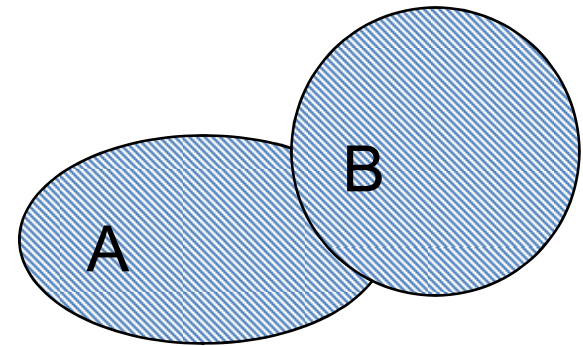
- **Hợp** của tập A và tập B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

- Ký hiệu: $A \cup B$

- Ví dụ:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e, f\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$



Tính chất phép hợp

1. Tính lũy đẳng $A \cup A = A$
2. Tính giao hoán $A \cup B = B \cup A$
3. Tính kết hợp $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. Hợp với tập rỗng $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$

Phép giao

- **Giao** của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

- Ký hiệu: $A \cap B$

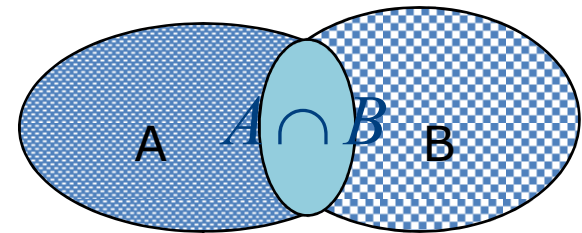
- Tính chất:

1) Tính lũy đẳng $A \cap A = A$

2) Tính giao hoán $A \cap B = B \cap A$

3) Tính kết hợp $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) Giao với tập rỗng $\emptyset \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset$



Tính phân phối của phép giao và hợp

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

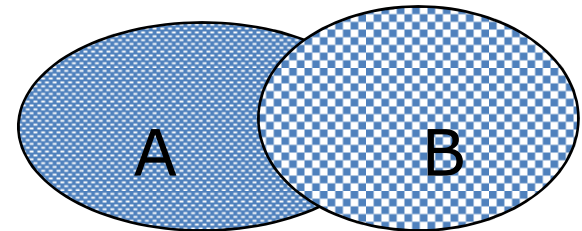
Hiệu của hai tập hợp

- **ĐN:**

- Hiệu của hai tập hợp là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc tập này mà không thuộc tập kia

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

- Ký hiệu $A \setminus B$



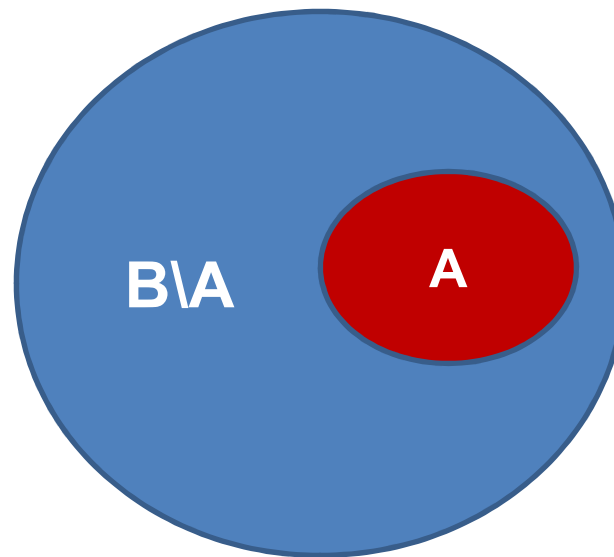
⊕ Luật De Morgan:

$$1) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Tập bù

- Nếu A là con của B thì $B \setminus A$ được gọi là tập bù của A trong B .



Tập các tập con của một tập hợp

ĐN: Cho X là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của X được ký hiệu là $P(X)$

Ví dụ $X = \{a, b\}$

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}, P(Y) = ?$$

$$|X| = n \longrightarrow |P(X)| = ?$$

Tích Đề Các

ĐN: Tích Đề các của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp bao gồm tất cả các cặp thứ tự (x,y) với $x \in A, y \in B$

$$(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

- Ký hiệu $A.B$ hoặc $A \times B$
- Chú ý: Tích của 2 tập hợp không có tính chất giao hoán.

$$|A \times B| = ?$$

Mở rộng các phép toán cho nhiều tập hợp

Các phép toán giao, hợp, tích có thể mở rộng cho nhiều tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, x_i \in A_i\}$$

Bài tập

- Tại lớp: 1, 2, 3, 4, 5, 6ab, 7ab, 8ab, 9ab, 10ab, 11ab, 12a, 14, 15a
- Về nhà: còn lại.

ÁNH XẠ

Khái niệm

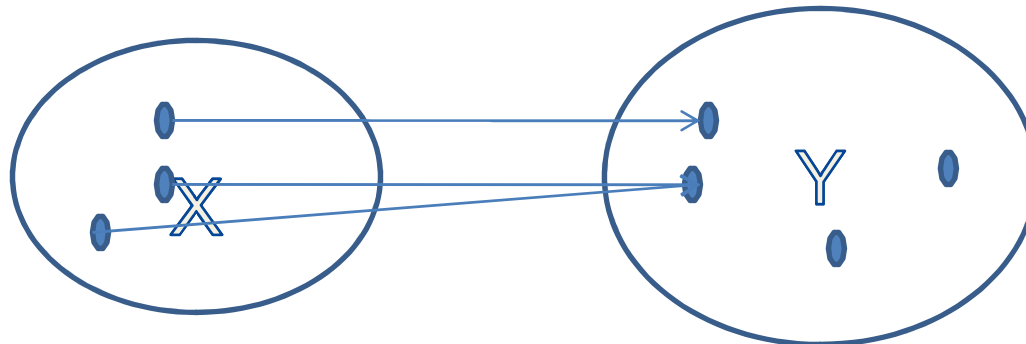
1. Định nghĩa. Cho hai tập hợp $X, Y \neq \emptyset$. Ánh xạ giữa hai tập X và Y là một qui tắc f sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để $y = f(x)$

Ta viết:

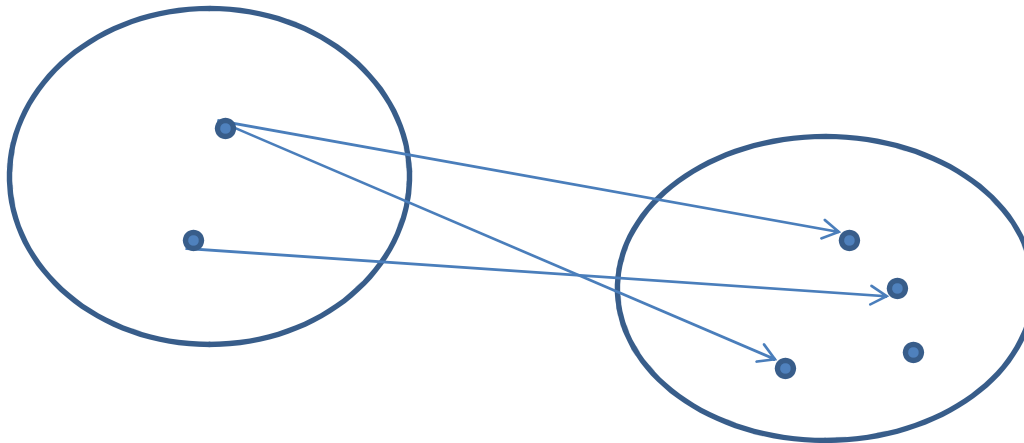
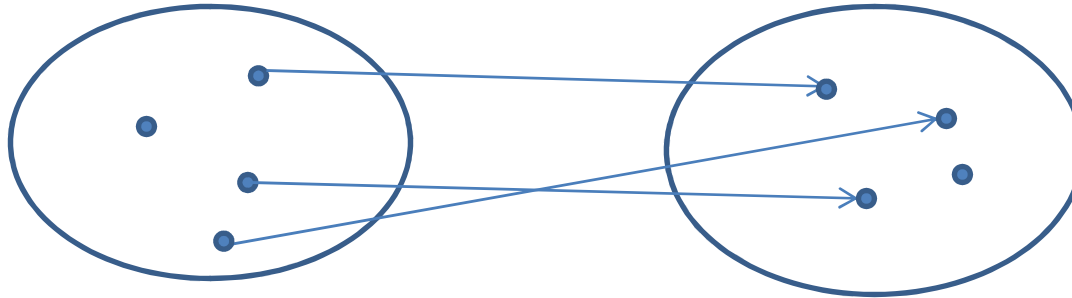
$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x)$



Ví dụ



Cả hai đều Không là ánh xạ

Ảnh xạ bằng nhau

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là *bằng nhau* nếu $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

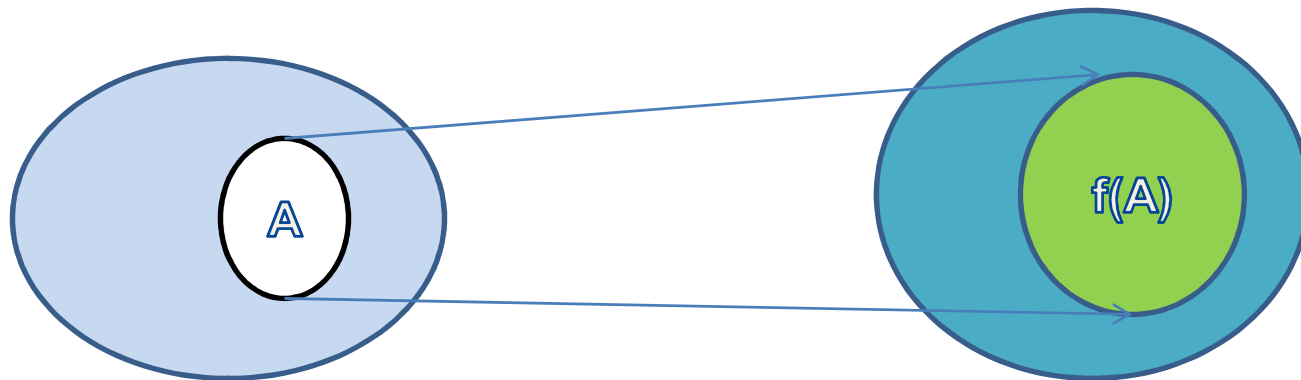
Ví dụ: Xét ánh xạ $f(x)=(x-1)(x+1)$ và $g(x)=x^2-1$ từ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ta có $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ nên $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy hai ánh xạ này bằng nhau.

Ảnh và ảnh ngược

- Cho ánh xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$.
Ta định nghĩa:
- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là **ảnh** của A



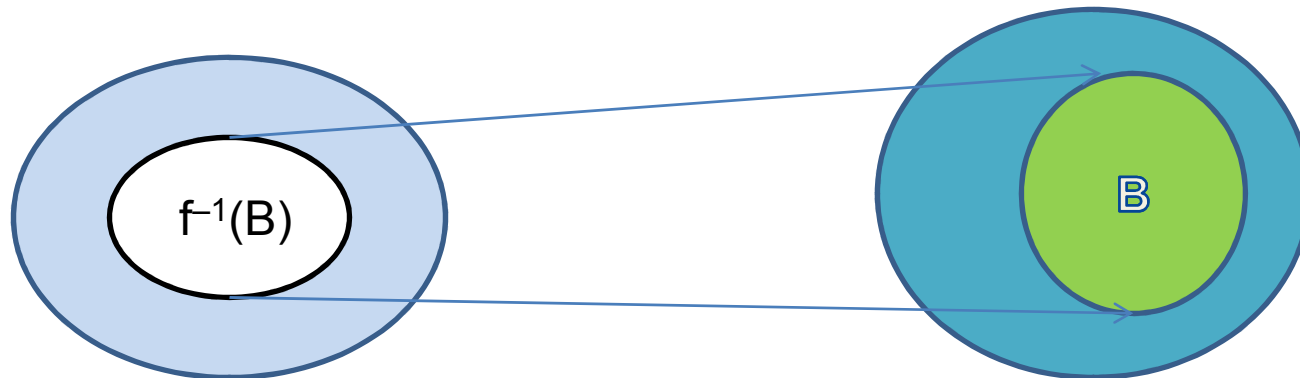
Ảnh và ảnh ngược

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Như vậy $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x);$

$y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x).$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ảnh ngược của B



Như vậy $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Ví dụ ảnh và ảnh ngược

Ví dụ. Cho $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ được xác định $f(x) = x^2 + 1$

Ta có

$$f([1,3]) = [2,10]$$

$$f([-2,-1]) = [2,5]$$

$$f([-1,3]) = [1,10]$$

$$f((1,5)) = (2,26)$$

$$f^{-1}(1) = \{0\}$$

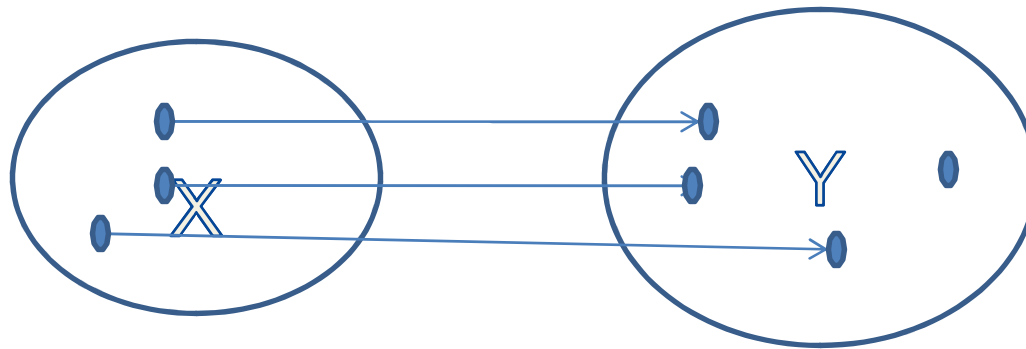
$$f^{-1}(2) = \{-1,1\}$$

$$f^{-1}(-5) = \emptyset$$

$$f^{-1}([2,5]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

Phân loại ánh xạ

a. **Đơn ánh** Ta nói $f : X \rightarrow Y$ là một **đơn ánh** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:



Ví dụ. Cho $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ được xác định $f(x)=x^2 +1$ (là đơn ánh)

$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ được xác định $g(x)=x^2 +1$ (không đơn ánh)

Cách CM ánh xạ f là đơn ánh

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Như vậy $f : X \rightarrow Y$ là **một đơn ánh**

$$\Leftrightarrow (\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có nhiều nhất một phần tử}).$$

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có nhiều nhất một nghiệm } x \in X).$

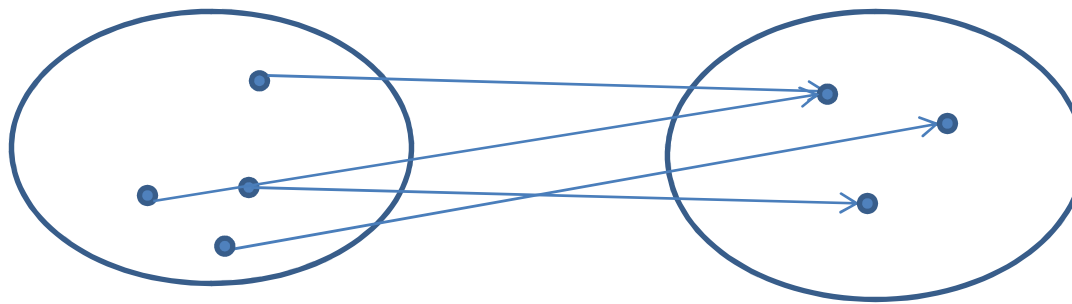
$f : X \rightarrow Y$ **không là một đơn ánh**

$$\Leftrightarrow (\exists x, x' \in X, x \neq x' \text{ và } f(x) = f(x')).$$

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \text{phương trình } f(x) = y \text{ (y được xem như tham số) có ít nhất hai nghiệm } x \in X)$

Toàn ánh

b. **Toàn ánh** Ta nói $f : X \rightarrow Y$ là một **toàn ánh** $f(X)=Y$, nghĩa là:



Ví dụ. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định $f(x)=x^3 + 1$ (là toàn ánh)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định $g(x)=x^2 + 1$ (không là toàn ánh)

Cách CM ánh xạ f là toàn ánh

Toàn ánh $\Leftrightarrow f(X)=Y$. Như vậy

$f : X \rightarrow Y$ là một toàn ánh

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset);$$

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nghiệm $x \in X$.

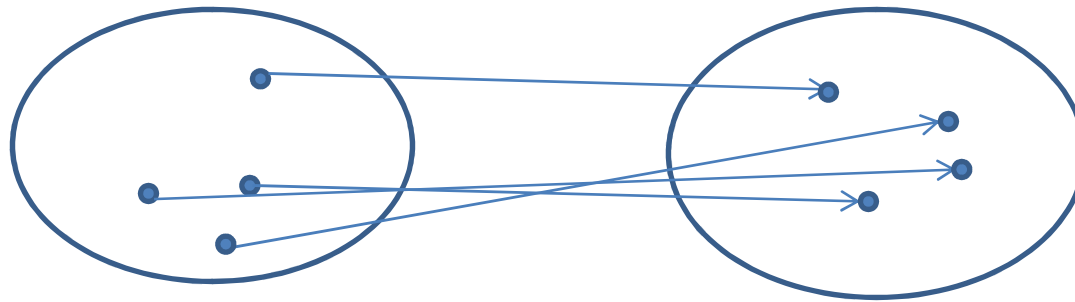
$f : X \rightarrow Y$ không là một toàn ánh

$$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x));$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, f^{-1}(y) = \emptyset);$$

Song ánh

c. Song ánh Ta nói $f : X \rightarrow Y$ là một **song ánh** nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.



Ví dụ. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định $f(x)=x^3 +1$ (là song ánh)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định $g(x)=x^2 +1$ (không là song ánh)

Tính chất của song ánh

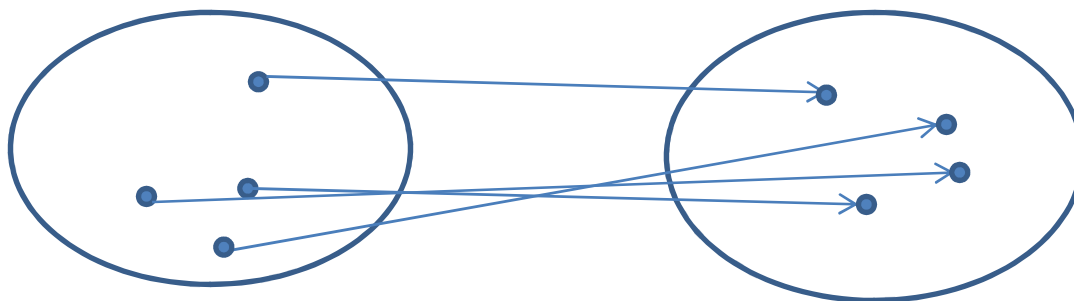
Tính chất.

$f : X \rightarrow Y$ là một song ánh

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x));$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có đúng một phần tử});$$

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm $x \in X$.



Ảnh xạ ngược

Ảnh xạ ngược.

Xét $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X . Ta gọi đây là **ánh xạ ngược** của f và ký hiệu f^{-1} . Như vậy:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ với } f(x) = y.$$

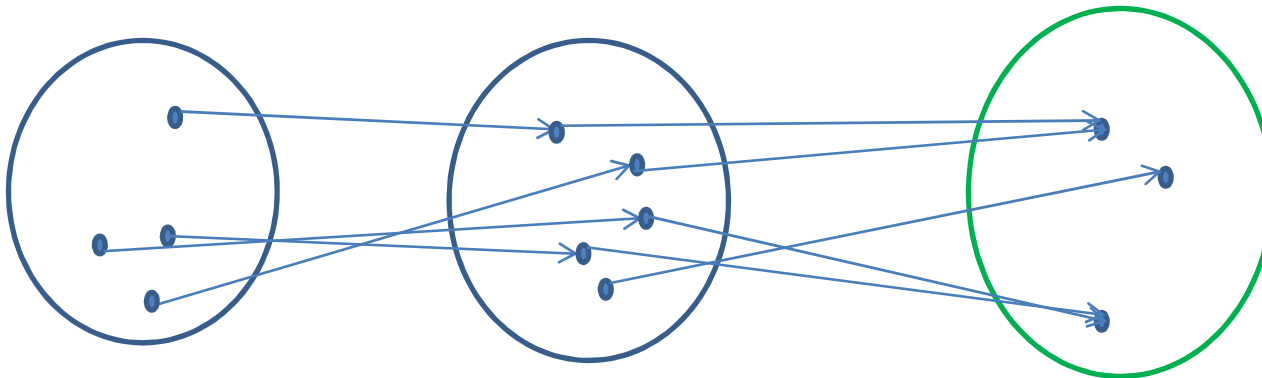
Ví dụ. Cho f là ánh xạ từ \mathbb{R} vào \mathbb{R} $f(x) = 2x + 1$.

$$\text{Khi đó } f^{-1}(y) = (y - 1)/2$$

Ánh xạ hợp

3. Ánh xạ hợp. Cho hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y' \rightarrow Z$ trong đó $Y \subset Y'$. Ánh xạ hợp h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi: $h : X \rightarrow Z$

Ta viết:
$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$
$$h = g \circ f : X \rightarrow Y \rightarrow Z$$



Ví dụ ánh xạ hợp

Ví dụ. Tìm $g \circ f$, $f \circ g$

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x > 0 \\ x+1 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = 2x+1$$

Bài tập

- Tại lớp: 16ab, 17a, 18a, 21a, 23ab, 24, 29a
- Về nhà: còn lại đến bài 30.