

# **VI TÍCH PHẦN 1C**

**GV: CAO NGHI THỰC**

**EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn**

# Nội dung

Chương 1 Dãy số thực và chuỗi số thực

Chương 2 Hàm số một biến: Giới hạn và sự liên tục của hàm số

Chương 3 Phép tính vi phân hàm một biến

Chương 4 Phép tính tích phân hàm một biến liên tục

Chương 5 Phương trình vi phân

# Tài liệu tham khảo

- [1] Ngô Thành Phong, *Giáo trình giản yếu Giải tích toán học*, Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp HCM, 2004
- [2] Stewart, *Calculus 7th Edition*, Brooks – Cole Pub, 2012

# 1.1 Dãy số

## Khái niệm

Dãy số là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương

$$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow f(n) = u_n \in \mathbb{R}$$

$x_n$  được gọi là số hạng tổng quát của dãy số

$$\text{KH: } \{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

Hoặc  $(u_n)$

# 1.1 Dãy số

VD1

$$(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(v_n) = \frac{n}{3^n}$$

# 1.1 Dãy số

## Dãy số đơn điệu

Dãy số  $\{u_n\}$  được gọi là dãy số tăng (chặt) nếu với mọi  $n$  ta có

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (u_n < u_{n+1})$$

Dãy số  $\{u_n\}$  được gọi là dãy số giảm (chặt) nếu với mọi  $n$  ta có

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (u_n > u_{n+1})$$

Các dãy số tăng(chặt), giảm(chặt) được gọi chung là đơn điệu

# 1.1 Dãy số

## VD2

$(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  là dãy số giảm

$(u_n) = n^2 + 1$  là dãy số tăng

# 1.1 Dãy số

## Dãy số bị chặn

Dãy số  $\{u_n\}$  được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số  $M$  sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n \leq M$$

Dãy số  $\{u_n\}$  được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số  $m$  sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n \geq m$$

Dãy số  $\{u_n\}$  được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới



# 1.1 Dãy số

VD3

Xét dãy số  $(u_n) = \frac{3n-1}{n+1}$

cuu duong than cong . com

# 1.1 Dãy số

## Giới hạn của dãy số

Số thực  $a$  được gọi là giới hạn của dãy  $\{u_n\}$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tùy ý có thể tìm được chỉ số  $N(\varepsilon)$  sao cho  $\forall n \geq N(\varepsilon)$  ta có  $|u_n - a| < \varepsilon$

KH:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$

Nếu  $a$  là số hữu hạn thì dãy  $\{u_n\}$  là hội tụ về  $a$

# 1.1 Dãy số

## Tính chất của dãy số hội tụ

Định lý 1: Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$  thì

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = a + b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a} (u_n \geq 0 \forall n)$$

# 1.1 Dãy số

## Tính chất của dãy số hội tụ

Định lý 2:

Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$ ,  $u_n \leq v_n, \forall n$  thì

$$a \leq b$$

# 1.1 Dãy số

## Tính chất của dãy số hội tụ

Định lý 3:

Nếu  $u_n \leq x_n \leq v_n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$  thì

$x_n$  hội tụ và  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

# 1.2 Chuỗi số

## Khái niệm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

được gọi là chuỗi số

Trong đó  $u_1, u_2, \cdots$  gọi là các số hạng của chuỗi

$u_n$  số hạng tổng quát của chuỗi

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi

# 1.2 Chuỗi số

## Khái niệm

Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  hữu hạn thì  $S$  là tổng của chuỗi và chuỗi hội tụ. Ngược lại chuỗi phân kỳ.

$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  gọi là phần dư của chuỗi

# 1.2 Chuỗi số

VD4

Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots (a \neq 0, q \neq 1)$

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

$$|q| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$$



## 1.2 Chuỗi số

VD5

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ

cuu duong than cong . com

## 1.2 Chuỗi số

VD6

Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

## Điều kiện cần của chuỗi hội tụ

Nếu chuỗi (1) hội tụ thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

**Hệ quả** Nếu số hạng tổng quát của chuỗi không tiến tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi phân kỳ

VD7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Phân kỳ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

## Tính chất chuỗi hội tụ

Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ và tổng là  $S$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$  hội tụ và

tổng  $cS$   
Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

## 1.2 Chuỗi số

VD8

Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n} \right)$

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

## Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương

### Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho 2 chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  và  $u_n \leq v_n (n=1,2,3,\dots)$

Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ

Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  phân kỳ

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

VD9

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  hội tụ vì  $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}, \forall n > 1$

Mà  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  hội tụ

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

## Tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi số dương

### Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho 2 chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Nếu tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$  trong đó  $k$  hữu hạn và khác 0 thì cả hai chuỗi cùng hội tụ hoặc phân kỳ



# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

VD10

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$$

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn d'Alembert

Cho chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  với  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

Nếu  $k < 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ

Nếu  $k > 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ

Nếu  $k = 1$  không có kết luận

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD11

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD12

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  với  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$

Nếu  $k < 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ

Nếu  $k > 1$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD13

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

# 1.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

Tiêu chuẩn d'Alembert, Cauchy đối với chuỗi số dương

VD14

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Chuỗi hội tụ

# 1.4 Chuỗi đan dấu

## Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu có dạng  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$   
là những số dương



# 1.4 Chuỗi đan dấu

## Định lý Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu có dạng  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$   
là những số dương

Nếu các số hạng giảm  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$

Và  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  thì chuỗi hội tụ. Khi đó tổng của chuỗi là số dương và không vượt quá số hạng đầu tiên

# 1.4 Chuỗi đan dấu

## VD15

Cho chuỗi đan dấu  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Vì các số hạng giảm  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$

Và  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

# 1.5 Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Chuỗi có dấu bất kỳ  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (2) được gọi là hội tụ

tuyệt đối nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (3) hội tụ

# 1.5 Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

Chuỗi có dấu bất kỳ. Hội tụ tuyệt đối và nửa hội tụ

Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (2) hội tụ

nhưng  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (3) phân kỳ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (2)

được gọi là chuỗi nửa hội tụ

# 1.5 Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

VD16

Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$

# Bài tập chương 1

**Bài 1:** Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

# Bài tập chương 1

**Bài 2:** Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi số và tính tổng(nếu có)

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

2.  $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \cdot 3^{1-n}$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

# Bài tập chương 1

**Bài 3:** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} + \dots$$

$$2. \frac{2}{1} + \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{5} + \frac{2.5.8}{1.5.9} + \dots + \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{1.5.9 \dots (4n-3)} + \dots$$

$$3. \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

$$4. \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \dots + \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} + \dots$$



# Bài tập chương 1

**Bài 4:** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1 + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

# Bài tập chương 1

**Bài 5:** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$

cuu duong than cong . com

# Bài tập chương 1

**Bài 6:** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$