

VI TÍCH PHÂN 1C

GV: CAO NGHI THỰC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 3

Phép tính vi phân hàm một biến

- I. Đạo hàm
- II. Vi phân
- III. Đạo hàm và vi phân cấp cao
- IV. Tối ưu hoá hàm 1 biến
- V. Bài tập

Đạo hàm

▪ Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0)$

Nghĩa là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Đạo hàm

▪ Định nghĩa

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Đạo hàm

▪Đạo hàm một bên

Cho hàm số f xác định trên $[x_0; a)$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì được gọi là

đạo hàm bên phải của hàm số tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0^+)$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Đạo hàm

▪Đạo hàm một bên

Cho hàm số f xác định trên $[x_0; a)$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì được gọi là

đạo hàm bên trái của hàm số tại x_0 và ký hiệu $f'(x_0^-)$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Đạo hàm

$f'(x_0)$ tồn tại $\Leftrightarrow f'(x_0^-), f'(x_0^+)$ tồn tại và $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

VD1: Cho hàm số $y = |x|$. Tính $f'(0)$

Đạo hàm

■ Ý nghĩa của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) .

$M(x_0; f(x_0)) \in (C)$.

$f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M

Đạo hàm

■ Các quy tắc tính đạo hàm

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (c.u)' = c.u'$$

$$3. (u + v)' = u' + v'$$

$$4. (u.v)' = u'v + uv'$$

$$5. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Đạo hàm

■ Bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}; (x)' = 1; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a; (e^x)' = e^x$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Đạo hàm

▪ Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp

$$5. (\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x; (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$6. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Đạo hàm

▪Đạo hàm hàm hợp

VD2: Tính đạo hàm của hàm số

$$y = \operatorname{arc} \cot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Đạo hàm

▪ Đạo hàm hàm ngược

Cho hàm số $y = f^{-1}(x)$. Đạo hàm của hàm ngược được xác định bởi

$$y'_x = [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{x'_y}$$

Đạo hàm

▪ Đạo hàm hàm ngược

VD3: Cho hàm số $y = \arccos x$ $-1 < x < 1$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Đạo hàm

▪ Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số

Cho hàm số phụ thuộc tham số

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

Đạo hàm được xác định bởi

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Đạo hàm

- Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số

VD4: Cho hàm số

$$x = \cos^2 t, y = \sin t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tính y'_x

Đạo hàm

▪ Đạo hàm hàm ẩn

Hàm $y = f(x)$ được cho dưới dạng

$$F(x, y) = 0$$

Đạo hàm của hàm $y = f(x)$ được xác định bởi

$$y'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

Đạo hàm

▪Đạo hàm hàm ẩn

VD5: Cho $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$. Tính y'

Vi Phân

▪ Định nghĩa

Hàm $f(x)$ khả vi tại x_0 nếu

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Khi đó, tích $f'(x_0)\Delta x$ gọi là vi phân của $f(x)$ tại x_0

Ký hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x = f'(x).dx$$

Vi Phân

VD6: Tính vi phân của hàm

$$y = f(x) = 2^{\sqrt{\tan x}}$$

$$dy = 2^{\sqrt{\tan x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\tan x})' \cdot dx = \frac{2^{\sqrt{\tan x}} \cdot \ln 2}{2\sqrt{\tan x} \cdot \cos^2 x} \cdot dx$$

Vi Phân

Các quy tắc tính vi phân

Vi phân của tổng, tích, thương

$$d(u+v)=d(u)+d(v)$$

$$d(uv)=vdu+udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2} (v \neq 0)$$

Vi Phân

Áp dụng vi phân tính gần đúng

Cho $f(x)$ khả vi tại x_0 khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Bỏ qua VCB bậc cao ta có

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Hay

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Vi Phân

VD7: Tính gần đúng $\cos 61^\circ$

$$y = f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}, \Delta x = \frac{\pi}{180}$$

$$f'(x) = -\sin x, f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 61^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \cos \frac{\pi}{3} + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\approx \frac{1}{2} + -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.484$$

Vi Phân

VD8: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt{4,001}$

cuu duong than cong . com

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

Đạo hàm cấp cao

Nếu $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì $f'(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1

Nếu $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu $f''(x)$

...

Đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ gọi là đạo hàm cấp n ,
ký hiệu $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

VD 9 : Cho $y = \sin x$. Tính $y^{(n)}(x)$

VD 10: Cho $y = \cos x$. Tính $y^{(n)}(x)$

Đạo hàm và Vi phân cấp cao

Vi phân cấp cao

Nếu $f(x)$ khả vi thì $dy=f'(x).dx$ gọi là vi phân cấp 1

Vi phân của dy gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu $d^2y = y''(x).dx^2$

...

Tổng quát vi phân cấp n , ký hiệu $d^n y = y^{(n)}(x).dx^n$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

■ Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Định lý 1 Cho $f(x), g(x)$ xđ, khả vi tại lân cận $x = x_0$ (có thể trừ tại điểm x_0)

■ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, g'(x_0) \neq 0$

Ở lân cận $x = x_0$

Khi đó, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Quy tắc L'Hospital

VD11: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x}$$

Quy tắc L'Hospital

VD12: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

■ Quy tắc L'Hospital

Áp dụng cho dạng vô định

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Định lý 2 Cho $f(x), g(x)$ xđ, khả vi tại lân cận $x = x_0$ (có thể trừ tại điểm x_0)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty, g'(x_0) \neq 0$$

Ở lân cận $x = x_0$

Khi đó, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

VD13: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} (\alpha > 0)$

VD14: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

VD15: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

■ Khai triển Taylor

Cho $f(x)$ khả vi đến cấp $n+1$ trong khoảng (a,b) . Khi đó với $x_0, c \in (a,b)$

Ta có công thức Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} (1)$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

▪ Khai triển Taylor

Đặt
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n)$$

gọi là sai số tuyệt đối

c nằm giữa x và x_0

Công thức (1) được gọi là khai triển Taylor của hàm f tại $x = x_0$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

■ Khai triển Taylor

Khi $x_0 = 0$: (1) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (2)$$

0 p θ p 1

(2) được gọi là công thức MacLaurin

Đạo hàm và vi phân cấp cao

▪ Khai triển Taylor

Khi $x_0 = 0$: (1) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

(2) được gọi là công thức MacLaurin

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Công thức MacLaurin của 1 số hàm sơ cấp

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa cực trị

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $(a;b)$

- Nếu $\exists \varepsilon > 0: f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ thì f đạt cực đại địa phương tại x_0
- Nếu $\exists \varepsilon > 0: f(x) \geq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại x_0

Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa cực trị

Cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Fermat

Nếu hàm $f(x)$ liên tục $[a; b]$, đạt cực trị địa phương tại điểm $c \in (a; b)$ và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Rolle

Nếu hàm $f(x)$ liên tục $[a; b]$ và khả vi $(a; b)$ và $f(b) = f(a)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Lagrange

Nếu hàm $f(x)$ liên tục $[a; b]$ và khả vi $(a; b)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a; b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Các định lý giá trị trung bình

Định lý Cauchy

Nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục $[a; b]$, khả vi $(a; b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$ thì tồn tại ít nhất $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Tối ưu hoá hàm một biến

▪ Tối ưu hóa các hàm KT phụ thuộc 1 biến

VD16: Để sản xuất ra một sản phẩm phải tốn một khoản chi phí trung bình: $\bar{C} = 19Q - 180 + \frac{5}{Q}$

Sản phẩm được bán ra thị trường với mức giá là P đồng, biết rằng giá bán phụ thuộc vào lượng hàng bán ra như sau: $P = 20 - Q$

Tối ưu hoá hàm một biến

- a. Tính giá trị cận biên của hàm doanh thu $MR(Q)$ khi $P = 12$ và giải thích ý nghĩa.
- b. Tìm giá bán của sản phẩm để lợi nhuận đạt tối đa.

Bài tập

Bài 1 Tính các giới hạn sau

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin 3x + \sin^2 x}{\sin 4x + \sin x - \tan^3 x}$

Bài 2 Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a. $y = \frac{1}{1-x}$ b. $y = e^{-3x}$

Bài tập

Bài 3 Viết khai triển Maclaurin đến số hạng x^3 của

a. $y = e^{\sin x}$ b. $y = 3^x$ c. $y = \tan(\sin x)$

Bài Tập

Bài 4 Tính vi phân của các hàm số sau

$$a) y = x^x$$

$$b) y = (3x)^x$$

$$c) y = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}}$$

Bài Tập

Bài 5 Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

- a) Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)$ đến số hạng chứa x^3
- b) Áp dụng kết quả câu a) tính gần đúng $\sqrt{0,98}$

Bài Tập

Bài 6

- a) Viết khai triển Maclaurin của hàm số $y = \arcsin x$ đến số hạng x^3
- b) Áp dụng kết quả câu a) tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$

Bài Tập

Bài 7 Tính gần đúng $\cos 29^\circ$ biết $\sqrt{3} = 1,7321, \pi = 3,1416$

Bài Tập

Bài 8 Tính gần đúng $\arctan 1,01$

cuu duong than cong . com

Bài Tập

Bài 9 Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{(x-1)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$