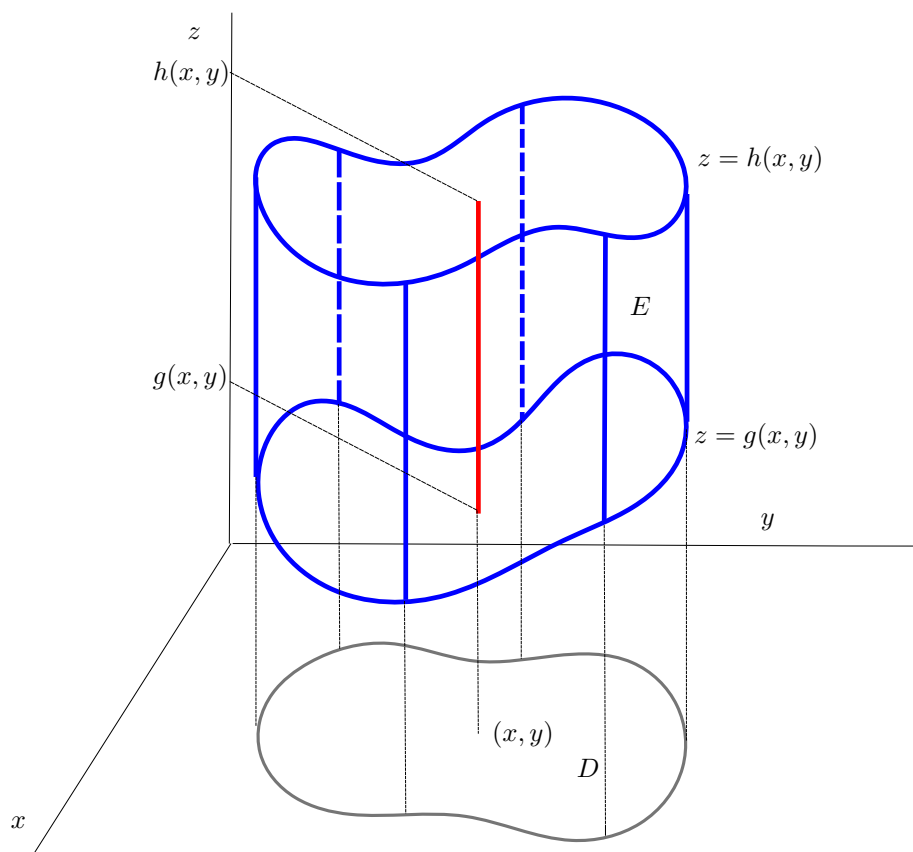


# Giáo trình Vi tích phân 2

Bộ môn Giải tích  
(Khoa Toán–Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh)

Bản ngày 19 tháng 1 năm 2019



Đây là giáo trình cho các môn toán Vi tích phân 2 cho khối B và C (các ngành khoa học tự nhiên ngoài toán học) do Bộ môn Giải tích (Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh) chủ trì biên soạn.

Tham gia biên soạn: Lý Kim Hà, Nguyễn Vũ Huy, Bùi Lê Trọng Thanh, Nguyễn Thị Thu Vân, Huỳnh Quang Vũ.

Liên hệ: [hqv@hcmus.edu.vn](mailto:hqv@hcmus.edu.vn)

Mỗi mục tương ứng với khoảng một buổi thảo luận trong lớp học. Những phần có đánh dấu \* là phần bổ sung, mở rộng, nâng cao, không bắt buộc.

Tài liệu này và các tài liệu hỗ trợ môn học khác của Bộ môn Giải tích có ở trang web (mục Tài liệu): <http://www.math.hcmus.edu.vn/giaitich>

Đây là bản thảo, đang được tiếp tục chỉnh sửa bổ sung.

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Phép tính vi phân của hàm nhiều biến</b>	<b>1</b>
1.1	Không gian $\mathbb{R}^n$	1
1.1.1	Vectơ, điểm, chiều dài, khoảng cách, tích trong	1
1.1.2	Hình học trong $\mathbb{R}^n$	5
1.1.3	Tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$	8
1.2	Hàm số nhiều biến	10
1.2.1	Giới hạn của hàm số	11
1.2.2	Hàm số liên tục	12
1.3	Đạo hàm của hàm số	15
1.3.1	Đạo hàm riêng	15
1.3.2	Mặt phẳng tiếp xúc. Xấp xỉ tuyến tính	16
1.3.3	Đạo hàm riêng cấp cao	19
1.4	Đạo hàm của hàm vectơ	21
1.4.1	Đạo hàm của hàm hợp	23
1.4.2	Đạo hàm theo hướng	25
1.4.3	Đạo hàm của hàm ẩn	27
1.5	Cực trị của hàm số nhiều biến	32
1.5.1	Cực trị không có ràng buộc	33
1.5.2	Cực trị có ràng buộc	38
1.5.3	Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất	40
<b>2</b>	<b>Tích phân của hàm nhiều biến</b>	<b>43</b>
2.1	Định nghĩa và tính chất của tích phân bội	43
2.1.1	Tích phân trên hình hộp	43
2.1.2	Tích phân trên tập tổng quát	46
2.1.3	Thể tích	46
2.1.4	Tính chất của tích phân	49
2.2	Công thức Fubini	50
2.2.1	Công thức Fubini cho miền phẳng	53
2.2.2	Công thức Fubini cho miền ba chiều	54
2.3	Công thức đổi biến	58
2.3.1	Tọa độ cực	60
2.3.2	Tọa độ cầu	62
2.3.3	Giải thích công thức đổi biến	64
2.4	Ứng dụng của tích phân bội	69
2.4.1	Giá trị trung bình	69
2.4.2	Tâm khối lượng	69
2.4.3	Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên	70

<b>3</b>	<b>Giải tích vectơ</b>	<b>75</b>
3.1	Tích phân đường . . . . .	75
3.1.1	Chiều dài của đường đi . . . . .	75
3.1.2	Tích phân đường loại một . . . . .	77
3.1.3	Tích phân đường loại hai . . . . .	78
3.1.4	Sự phụ thuộc vào đường đi . . . . .	79
3.2	Công thức Newton–Leibniz và Công thức Green . . . . .	83
3.2.1	Trường bảo toàn . . . . .	83
3.2.2	Công thức Green . . . . .	86
3.2.3	Điều kiện để trường vectơ phẳng là bảo toàn . . . . .	88
3.3	Tích phân mặt . . . . .	96
3.3.1	Diện tích mặt . . . . .	96
3.3.2	Tích phân mặt loại một . . . . .	97
3.3.3	Tích phân mặt loại hai . . . . .	98
3.3.4	Định hướng . . . . .	99
3.4	Công thức Stokes và Công thức Gauss–Ostrogradsky . . . . .	104
3.4.1	Công thức Stokes . . . . .	104
3.4.2	Công thức Gauss–Ostrogradsky . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Phương trình vi phân</b>	<b>116</b>
4.1	Phương trình vi phân và mô hình toán học . . . . .	116
4.1.1	Mô hình với phương trình vi phân cấp một . . . . .	118
4.1.2	Mô hình với phương trình vi phân cấp hai . . . . .	119
4.2	Giải phương trình vi phân cấp một . . . . .	123
4.2.1	Phương trình vi phân cấp một tách biến . . . . .	123
4.2.2	Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp . . . . .	126
4.2.3	Phương trình vi phân cấp một tuyến tính . . . . .	127
4.3	Giải phương trình vi phân cấp hai . . . . .	134
4.3.1	Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng . . . . .	134
4.3.2	Phương trình cấp hai tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng . . . . .	137
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>143</b>
	<b>Chỉ mục</b>	<b>145</b>

# Chương 1

## Phép tính vi phân của hàm nhiều biến

### 1.1 Không gian $\mathbb{R}^n$

Khoảng 300 năm trước Công nguyên, nhà toán học Hy Lạp Euclid viết bộ sách “Cơ sở của hình học”, tổng kết hiểu biết hình học đương thời. Ngày nay hình học phẳng và hình học không gian ba chiều mà Euclid trình bày với hệ thống tiên đề và các chứng minh bằng suy diễn toán học vẫn được học ở trường trung học phổ thông.

Phát triển từ hình học Euclid, trong chương này chúng ta sẽ xét không gian Euclide  $n$ -chiều. Nhưng phương pháp của chúng ta là phương pháp Hình học Giải tích của Descartes, theo đó điểm sẽ tương ứng với số, nhờ đó quan hệ hình học được diễn tả bằng quan hệ số lượng. Cụ thể hơn, cũng như môn Vi Tích phân Hàm một biến (xem [Bmgt1]), môn Vi Tích phân Hàm nhiều biến đặt trên cơ sở trên tập hợp các số thực, và mặc dù chúng ta sẽ dùng hình vẽ và trực quan để dẫn dắt nhưng mỗi suy luận chỉ được coi là chặt chẽ khi nó nằm trong hệ thống suy luận từ tập hợp số thực bằng các quy tắc suy luận toán học. Tuy vậy phát triển của chúng ta vẫn nhắm tới sự tương thích và chứa các trường hợp  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  mà ta đã học ở trung học phổ thông. Người học nếu gặp khó khăn với trường hợp tổng quát thì trước tiên có thể chỉ xét các trường hợp  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ .

Trên tinh thần đó, chúng ta bắt đầu môn học với định nghĩa cho những khái niệm căn bản như không gian, điểm, vectơ, đường thẳng, mặt phẳng, ...

Với mỗi số nguyên dương  $n$ , tập hợp  $\mathbb{R}^n$  là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự  $n$  số thực. Vậy  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ . Số thực  $x_i$  được gọi là thành phần hay **tọa độ** thứ  $i$  của phần tử  $x$ .

#### 1.1.1 Vectơ, điểm, chiều dài, khoảng cách, tích trong

Khi tập  $\mathbb{R}^n$  được trang bị các phép toán nhất định thì nó được gọi là một không gian vectơ, và các phần tử của nó cũng được gọi là các **vectơ**<sup>1</sup>. Đôi khi, để nhấn mạnh việc nhìn phần tử  $x$  dưới khía cạnh vectơ người ta dùng kí hiệu  $\vec{x}$  hay  $\mathbf{x}$ , đặc biệt khi  $n = 2, 3$ . Các phép toán đó gồm phép toán cộng và phép toán nhân, được định nghĩa như sau. Phép cộng  $+$  của hai vectơ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  cho ra vectơ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Phép nhân của vectơ  $x$  với số thực  $\alpha$  cho vectơ

$$\alpha \cdot x = x \cdot \alpha = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

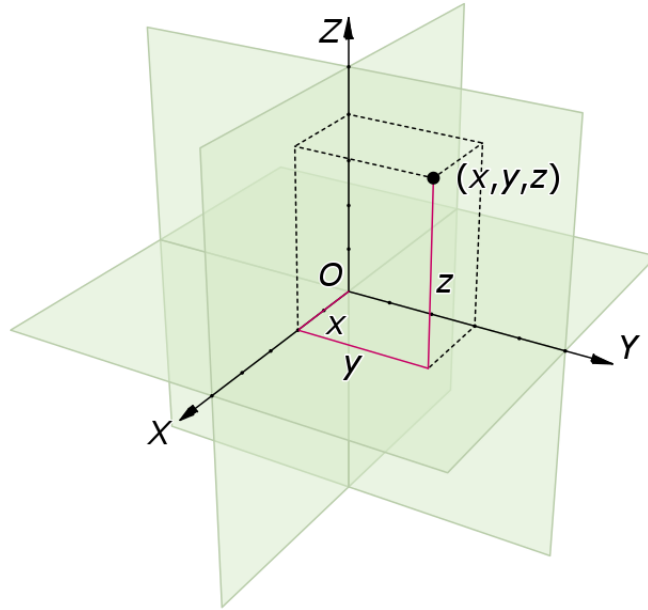
<sup>1</sup>từ vector trong tiếng Anh chỉ một đoạn thẳng có hướng, hay một đại lượng có hướng di chuyển

Hai phép toán  $+$  và  $\cdot$  có các tính chất mà ta dễ dàng kiểm tra được từ các tính chất của số thực:

**Mệnh đề 1.1.1.** Với mọi  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , với mọi  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $x + y = y + x$ ,
- (b)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,
- (c) với  $0$  là vectơ có tất cả các thành phần bằng  $0$ , nghĩa là  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  (thường được gọi là **điểm gốc tọa độ**), thì  $x + 0 = 0 + x = x$ ,
- (d) tồn tại vectơ đối  $-x = (-1) \cdot x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  sao cho  $x + (-x) = 0$ ,
- (e)  $1 \cdot x = x$ ,
- (f)  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ ,
- (g)  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ ,
- (h)  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ .

Về sau để kí hiệu đơn giản hơn ta thường bỏ đi dấu chấm để kí hiệu phép nhân ở trên, ví dụ viết  $2x$  thay vì  $2 \cdot x$ .



Hình 1.1.1: Hình ảnh minh họa cho một điểm  $(x, y, z)$  nằm trong không gian  $\mathbb{R}^3$ .

Những tính chất trên phù hợp với các trường hợp riêng  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  đã biết. Tuy vậy có một điểm khác biệt khá tinh tế đáng chú ý là trong các trường hợp riêng này, cũng như trong vật lý, ta thường hình dung một vectơ là một đoạn thẳng có hướng, được xác định bởi một cặp có thứ tự hai điểm, một điểm đầu và một điểm cuối; tức là vectơ trước đây là có gốc. Còn vectơ như ta vừa định nghĩa trên, không đi kèm khái niệm gốc, trước đây có khi được gọi là “vectơ tự do”.

Không gian vectơ  $\mathbb{R}^n$  có một bộ đặc biệt các vectơ

$$(\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$$

có tính chất dễ thấy là với một vectơ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  bất kì trong  $\mathbb{R}^n$  thì

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Bộ trên được gọi là **cơ sở vectơ chính tắc** của  $\mathbb{R}^n$ . Người ta nói rằng  $n$  là **số chiều** của không gian vectơ  $\mathbb{R}^n$ , bởi vì  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở vectơ gồm đúng  $n$  phần tử, và mọi phần tử của  $\mathbb{R}^n$  đều nhận được từ cơ sở đó bằng phép cộng vectơ và phép nhân với số thực, như thế  $\mathbb{R}^n$  có  $n$  “chiều” độc lập, tự do.

Mỗi vectơ có một chiều dài, hay độ lớn, được gọi là **chiều dài Euclid**, cho bởi

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Chiều dài của vectơ còn được gọi là **chuẩn** của vectơ (đặc biệt khi  $n > 3$ ), kí hiệu là  $\|x\|$ . Trong trường hợp  $n = 1$  độ lớn này chính là giá trị tuyệt đối của số thực.

Chiều dài vectơ có các tính chất quan trọng sau:

**Mệnh đề 1.1.2.** Với mọi  $x \in \mathbb{R}^n$ , với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$  thì:

- (a)  $\|x\| \geq 0$ ,
- (b)  $\|x\| = 0$  khi và chỉ khi  $x = 0$ ,
- (c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,

Hai phần tử  $x, y$  bất kì của  $\mathbb{R}^n$  lại có một khoảng cách giữa chúng, kí hiệu là  $d(x, y)$ , được gọi là **khoảng cách Euclid**, cho bởi

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Trong trường hợp  $n = 1$  khoảng cách này chính là chiều dài thông thường của một đoạn số thực. Trong trường hợp  $n = 2$  và  $n = 3$  khoảng cách từ  $x$  tới  $y$  bằng chiều dài của vectơ đi từ  $x$  tới  $y$ .

Rõ ràng

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

nghĩa là khoảng cách từ điểm  $x$  tới điểm  $y$  đúng bằng chiều dài vectơ  $y - x$ . Mặt khác, chiều dài vectơ  $x$  chính bằng khoảng cách từ điểm 0 tới điểm  $x$ .

Khoảng cách có các tính chất sau:

**Mệnh đề 1.1.3.** Với mọi  $x, y \in \mathbb{R}^n$  thì:

- (a)  $d(x, y) \geq 0$ ,
- (b)  $d(x, y) = 0$  khi và chỉ khi  $x = y$ ,
- (c)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

Trên  $\mathbb{R}^n$  ta còn có một tích vô hướng của hai vectơ, tổng quát hóa tích của số thực và tích vô hướng trong  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  mà ta đã biết, và cũng được gọi là **tích vô hướng Euclid**, còn gọi là **tích trong Euclid**, cho bởi

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Phép toán tích vô hướng có các tính chất sau:

**Mệnh đề 1.1.4.** Với mọi  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$  thì:

$$(a) \quad x \cdot x \geq 0,$$

$$(b) \quad x \cdot x = 0 \text{ khi và chỉ khi } x = 0,$$

$$(c) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(d) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(e) \quad (\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y),$$

Ta có ngay quan hệ giữa tích vô hướng và độ lớn:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

**Mệnh đề 1.1.5.** Với hai phần tử bất kì  $x$  và  $y$  trong không gian Euclid  $\mathbb{R}^n$  thì

$$x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Hơn nữa dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x$  và  $y$  tỉ lệ với nhau.

*Chứng minh.* Giả sử  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Ta có

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

trong khi

$$\|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

như vậy bất đẳng thức

$$x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

chính là bất đẳng thức Buniakowski<sup>2</sup> cho số thực. Từ điều kiện xảy ra đẳng thức trong bất đẳng thức Buniakowski, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x$  và  $y$  tỉ lệ với nhau.  $\square$

Ta có một tính chất quan trọng sau:

**Mệnh đề 1.1.6 (Bất đẳng thức tam giác).** Với ba phần tử bất kì  $x, y$  và  $z$  trong không gian Euclid  $\mathbb{R}^n$  thì

(a)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

(b)

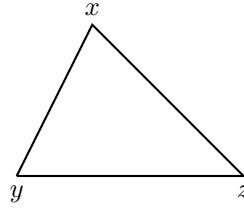
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Tính chất này được gọi là bất đẳng thức tam giác là vì nó tổng quát hóa một tính chất cơ bản của hình học Euclid phẳng: trong một tam giác thì tổng chiều dài hai cạnh phải lớn hơn hay bằng chiều dài cạnh thứ ba.

---

<sup>2</sup>bất đẳng thức Buniakowski còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy-Buniakowski hay bất đẳng thức Schwarz.





Hình 1.1.2: Bất đẳng thức tam giác.

*Chứng minh.* Để thu được dạng (a) ta có thể làm bằng vài cách. Một cách đơn giản là bình phương hai vế:

$$\begin{aligned}
 & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\
 \Leftrightarrow & \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
 \Leftrightarrow & (x + y) \cdot (x + y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
 \Leftrightarrow & x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq x \cdot x + y \cdot y + 2\|x\|\|y\| \\
 \Leftrightarrow & x \cdot y \leq \|x\|\|y\|,
 \end{aligned}$$

là đúng từ Mệnh đề 1.1.5.

Một cách để thu được dạng (b) là dùng quan hệ giữa khoảng cách và chiều dài rồi dùng dạng (a):

$$d(x, z) + d(z, y) = \|z - x\| + \|y - z\| \geq \|(z - x) + (y - z)\| = \|y - x\| = d(x, y).$$

□

Mỗi phần tử  $x$  của tập hợp  $\mathbb{R}^n$  có nhiều vai trò tùy theo khía cạnh mà ta quan tâm: là một vectơ nếu ta quan tâm tới phép toán vectơ, hay là một **điểm** nếu ta quan tâm hơn tới khoảng cách. Chính vì vậy một phần tử của  $\mathbb{R}^n$  khi thì được gọi là một vectơ, khi thì được gọi là một điểm. Người đọc không nên bị rối bởi điều này. Cũng vì lí do này mà ta không nhất thiết phải dùng kí hiệu khác nhau để phân biệt điểm hay vectơ.

## 1.1.2 Hình học trong $\mathbb{R}^n$

### Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$ . Ta đã biết ở Mệnh đề 1.1.5 thì

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|,$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $u$  và  $v$  tỉ lệ với nhau.

Nếu  $u$  và  $v$  khác 0 thì ta thu được

$$\left| \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1.$$

Từ đó ta định nghĩa **góc giữa hai vectơ**  $u$  và  $v$  là số thực  $\theta \in [0, \pi]$  thỏa

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Ta được công thức

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Ta nói  $u$  **vuông góc**, hay **trực giao** với  $v$ , kí hiệu là  $u \perp v$ , nếu góc giữa chúng là  $\pi/2$ , tức là  $u \cdot v = 0$ .

Hai vectơ là **cùng phương** nếu góc giữa chúng bằng 0 hoặc  $\pi$ , do đó một vectơ là bội của vectơ kia. Hai vectơ là **cùng hướng** nếu góc giữa chúng bằng 0, tức là một vectơ là bội dương của vectơ kia.

## Chiều vuông góc

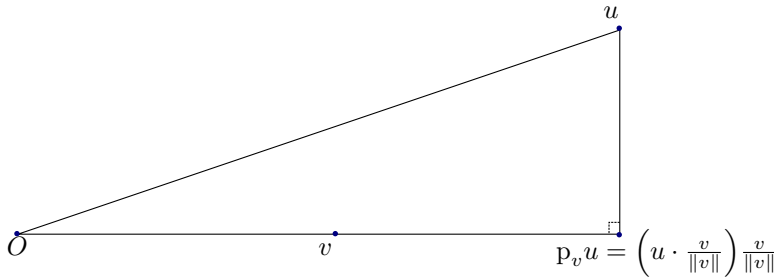
Nếu  $v \neq 0$  thì vectơ đơn vị theo chiều của  $v$  là  $\frac{v}{\|v\|}$ . **Chiều vuông góc** của  $u$  lên  $v$ , kí hiệu  $p_v u$ <sup>3</sup> là vectơ cùng chiều với  $v$  có độ lớn bằng trị tuyệt đối của

$$\|u\| \cos \theta = u \cdot \frac{v}{\|v\|}.$$

Như thế

$$p_v u = \left( u \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v.$$

Ta có thể kiểm được ngay rằng  $(u - p_v u) \perp v$  (bài tập), như vậy đây thực sự là phép chiếu vuông góc.



Hình 1.1.3: Chiếu của một vectơ lên một vectơ khác.

## Tích có hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ trong  $\mathbb{R}^3$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  và  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . **Tích có hướng** của hai vectơ này, kí hiệu là  $u \times v$ , được định nghĩa là vectơ

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Ta thấy tích có hướng phụ thuộc vào thứ tự của vectơ:  $u \times v = -v \times u$ . Một tính chất căn bản của tích có hướng mà ta kiểm trực tiếp được ngay là  $(u \times v) \perp u$  và  $(u \times v) \perp v$ . Như vậy tích có hướng của hai vectơ vuông góc với hai vectơ ấy. Tích có hướng bằng vectơ 0 khi và chỉ khi hai vectơ là cùng phương.

Ta có thể kiểm trực tiếp tính chất sau (xem phần bài tập):

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

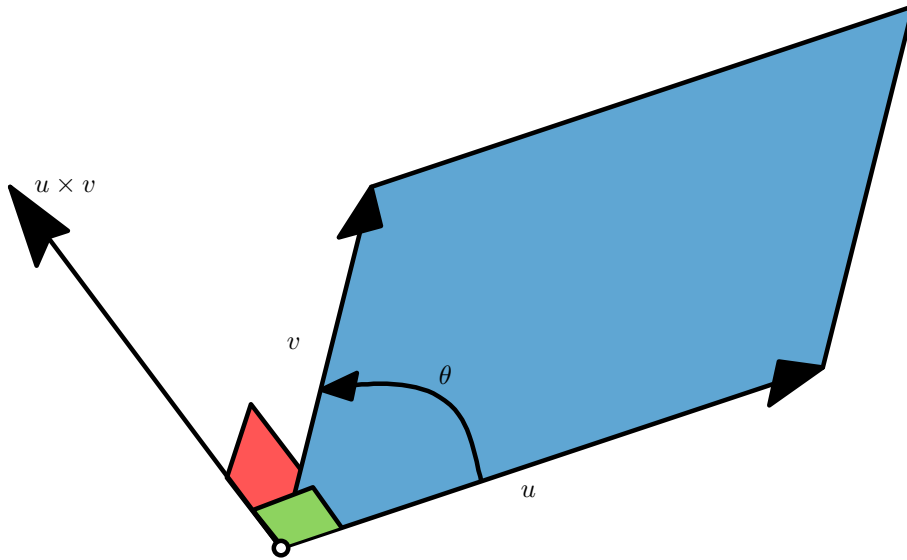
Từ đó

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

trong đó  $\theta$  là góc giữa  $u$  và  $v$ .

Từ hình học Euclid phẳng ta có thể suy ra  $\|u\| \|v\| \sin \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \|u\| \|v\| \sin \theta$  chính bằng “diện tích” của hình bình hành có hai cạnh là hai vectơ  $u$  và  $v$ . Từ đó ta có thể miêu tả trực quan tích có hướng trong Hình 1.1.4.

<sup>3</sup>p viết tắt từ projection, nghĩa là chiếu



Hình 1.1.4: Miêu tả trực quan: Tích có hướng  $u \times v$  là vectơ vuông góc với cả  $u$  và  $v$  có hướng xác định bởi qui tắc bàn tay phải, lòng bàn tay phải uốn theo chiều từ  $u$  sang  $v$  thì ngón tay cái của bàn tay phải sẽ chỉ chiều của  $u \times v$ , có độ lớn đúng bằng diện tích của hình bình hành sinh bởi  $u$  và  $v$ .

## Đường thẳng

Một **đường thẳng** trong  $\mathbb{R}^n$  là một tập con của  $\mathbb{R}^n$  có dạng  $\{a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$  trong đó  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \neq 0$ . Như vậy đây là tập hợp tất cả các điểm  $x$  sao cho vectơ  $x - a$  là một bội số thực của của vectơ  $b$ . Điểm  $a$  thuộc về đường thẳng này. Vectơ  $b$  được gọi là một vectơ chỉ phương của đường thẳng này.

Từ định nghĩa trên ta thấy đường thẳng nối  $a$  và  $b$  cũng chính là đường thẳng đi qua  $a$  với vectơ chỉ phương  $b - a$ . Một điểm trên đường thẳng nối  $a$  và  $b$  có dạng  $a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Đoạn thẳng nối  $a$  và  $b$  được định nghĩa là tập hợp gồm các điểm  $a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Ví dụ 1.1.7.** Trong  $\mathbb{R}^2$ , xét đường thẳng đi qua hai điểm  $(x_0, y_0)$  và  $(x_1, y_1)$ . Vectơ chỉ phương là  $(x_1, y_1) - (x_0, y_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . Phương trình tham số của đường thẳng là

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

hay

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, y = y_0 + (y_1 - y_0)t.$$

Trong trường hợp  $x_1 \neq x_0$  thì  $t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ , ta thu được phương trình

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Như vậy trên mặt phẳng nếu một đường thẳng không thẳng đứng (không cùng phương với trục  $y$ ) thì nó có một phương trình dạng  $y = mx + b$ , với  $m$  là một hằng số thực, được gọi là hệ số góc, hay độ nghiêng của đường thẳng.

## Mặt phẳng

Trong  $\mathbb{R}^n$ , **mặt phẳng**  $P$  đi qua ba điểm  $p_1, p_2, p_3$  được đặc trưng bởi tính chất vectơ  $x - p_1$  là tổ hợp của hai vectơ  $v_1 = p_2 - p_1$  và  $v_2 = p_3 - p_1$ , tức là có hai số thực  $s, t$  sao

cho  $x - p_1 = sv_1 + tv_2$ . Điều kiện để mặt phẳng được xác định là ba điểm đã cho không thẳng hàng, tức là  $v_1$  và  $v_2$  không cùng phương.

Đặc biệt trong  $\mathbb{R}^3$ , đặt  $N = v_1 \times v_2$  thì vectơ  $N$  vuông góc với  $v_1$  và  $v_2$ , do đó  $N$  vuông góc với mọi tổ hợp của  $v_1$  và  $v_2$ , tức là vuông góc với mọi vectơ  $sv_1 + tv_2$  với  $s, t \in \mathbb{R}$  (bài tập). Ta nói  $N$  vuông góc với mặt phẳng  $P$ , kí hiệu là  $N \perp P$ , và  $N$  là một **vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng  $P$ . Mặt phẳng  $P$  là tập hợp tất cả các điểm  $x$  sao cho vectơ  $x - p_1$  vuông góc với vectơ  $N$ , tức là

$$(x - p_1) \cdot N = 0.$$

Cụ thể hơn, mặt phẳng đi qua điểm  $(x_0, y_0, z_0)$  với pháp tuyến  $(a, b, c) \neq 0$  gồm tất cả các điểm có tọa độ  $(x, y, z)$  sao cho

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0,$$

tức là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

hay

$$ax + by + cz + d = 0,$$

với  $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ .

### 1.1.3 Tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$

Với khoảng cách và độ dài Euclid, ta có thể xây dựng tập mở, đóng, là cấu trúc thích hợp cho khái niệm giới hạn và liên tục.

Cho  $x \in \mathbb{R}^n$  và  $\epsilon > 0$ . Các tập hợp

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

$$B'(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq \epsilon\}$$

$$S(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = \epsilon\}$$

lần lượt được gọi là quả cầu (mở), quả cầu đóng, và mặt cầu tâm  $x$  bán kính  $\epsilon$  trong  $\mathbb{R}^n$ . Vậy một quả cầu mở là tập hợp tất cả các điểm có khoảng cách tới một điểm cho trước nhỏ hơn một số cho trước. Đây rõ ràng là một phát triển của khái niệm khoảng, hình tròn, quả cầu trong trường hợp  $n = 1, 2, 3$ .

Điểm  $x$  được gọi là một **điểm trong** của một tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  nếu có một số  $\epsilon > 0$  sao cho quả cầu  $B(x, \epsilon)$  được chứa trong  $D$ .

Tập tất cả các điểm trong của  $D$  được gọi là **phần trong** của  $D$  được ký hiệu là  $\overset{\circ}{D}$ .

Tập hợp  $D$  được gọi là một **tập mở** nếu mọi điểm của  $D$  đều là điểm trong của  $D$ .

**Ví dụ 1.1.8.** Quả cầu  $B(x, \epsilon)$  là một tập mở.

Điểm  $x \in \mathbb{R}^n$  được gọi là một **điểm biên** của tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  nếu một quả cầu  $B(x, \epsilon)$  bất kì chứa ít nhất một điểm thuộc  $D$  và một điểm không thuộc  $D$ . Tập các điểm biên của  $D$  kí hiệu là  $\partial D$ , và được gọi là **biên** của  $D$ .

Rõ ràng, điểm trong của  $D$  thì nằm trong  $D$ , còn điểm biên của  $D$  có thể thuộc  $D$  và cũng có thể không thuộc  $D$ .

**Ví dụ 1.1.9.** Mặt cầu  $S(x, \epsilon)$  là biên của quả cầu  $B(x, \epsilon)$ .

Tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là một **tập đóng** nếu  $D$  chứa mọi điểm biên của nó.

**Ví dụ 1.1.10.** Quả cầu đóng  $B'(x, \epsilon)$  và mặt cầu  $S(x, \epsilon)$  là các tập đóng.

**Ví dụ 1.1.11.** Tập  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x < b, a \leq y < b, a \leq z < b\}$  không là tập mở, cũng không là tập đóng trong  $\mathbb{R}^3$ .

Điểm  $x \in \mathbb{R}^n$  được gọi là một **điểm tụ** hay **điểm giới hạn** của tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  nếu một quả cầu  $B(x, \epsilon)$  bất kì chứa ít nhất một điểm thuộc  $D$  khác với  $x$ .

**Ví dụ 1.1.12.** Quả cầu bỏ đi tâm  $B(a, r) \setminus \{a\}$  có tâm  $a$  là một điểm tụ. Đây là một trường hợp thường gặp trong môn học này.

Người ta thường dùng thuật ngữ **lân cận** của một điểm trong  $\mathbb{R}^n$  để chỉ một tập mở của  $\mathbb{R}^n$  chứa điểm đó.

## Bài tập

**1.1.1 (Công thức Pythagore).** Chứng tỏ rằng nếu  $x \perp y$  thì

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Hãy giải thích ý nghĩa hình học của điều này.

**1.1.2 (Đẳng thức hình bình hành).** Hãy chứng tỏ

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Hãy giải thích ý nghĩa hình học của điều này.

**1.1.3.** Hãy chứng tỏ

$$x \cdot y = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

**1.1.4.** Tìm vectơ đơn vị cùng chiều với vectơ  $v = (1, 2, 3)$ .

**1.1.5.** Kiểm tra rằng  $(u - p_v u) \perp v$ .

**1.1.6.** Kiểm tra rằng nếu  $a \perp b$  và  $a \perp c$  thì  $a$  vuông góc với mọi tổ hợp của  $b$  và  $c$ , tức là với mọi  $s, t \in \mathbb{R}$  thì  $a \perp (sb + tc)$ .

**1.1.7.** Trong  $\mathbb{R}^3$  ta thường viết cơ sở tuyến tính chuẩn tắc là

$$\{\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)\}.$$

Hãy chứng tỏ các vectơ trong cơ sở có chiều dài bằng 1, đôi một vuông góc, và  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ,  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ .

**1.1.8.** Hãy kiểm tra rằng

(a)  $(u \times v) \perp u$  và  $(u \times v) \perp v$ .

(b)  $u \times v = -v \times u$ .

**1.1.9.** Hãy kiểm tra rằng

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

**1.1.10.** Trong  $\mathbb{R}^3$ , hãy viết phương trình mặt phẳng

(a) Đi qua ba điểm  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

(b) Đi qua điểm  $(2, 1, 3)$  và song song (có cùng pháp tuyến và không trùng) với mặt phẳng  $-5x + 2y - 4z = 3$ .

## 1.2 Hàm số nhiều biến

Trong đời sống một đại lượng thường phụ thuộc vào nhiều đại lượng khác. Ví dụ nhiệt độ phụ thuộc vào vị trí và thời gian; giá cả của một hàng hoá trên thị trường phụ thuộc vào chi phí sản xuất, sản lượng cung cấp, nhu cầu thị trường; điểm môn học phụ thuộc vào điểm chuyên cần, điểm thi giữa kì, điểm thi cuối kì, ... Như thế để khảo sát các đại lượng trong đời sống chúng ta cần những hàm có nhiều biến.

**Định nghĩa 1.2.1.** Cho một tập không rỗng  $D \in \mathbb{R}^n$ , ánh xạ

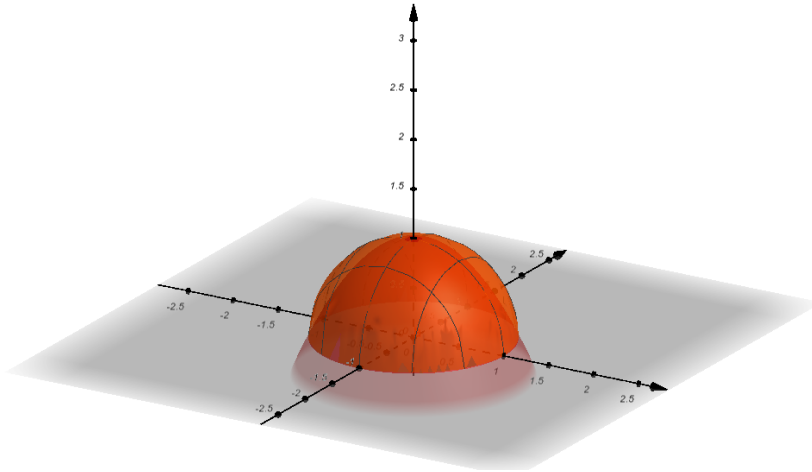
$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

được gọi là một hàm số được xác định trên  $D$ . Ta gọi  $D$  là tập xác định,  $f$  là hàm số,  $x$  là biến số,  $f(x)$  là giá trị của  $f$  tại  $x$ .

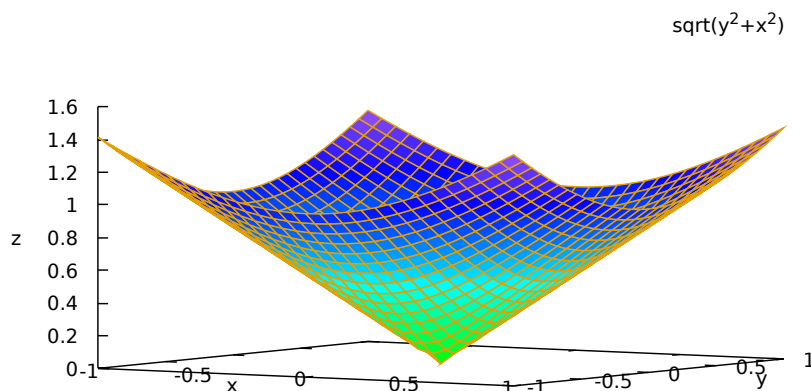
**Đồ thị** của hàm số  $f$  là tập hợp tất cả các điểm  $(x_1, \dots, x_n, y)$  trong không gian  $\mathbb{R}^{n+1}$  sao cho  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Ví dụ 1.2.2.** (a) Hàm số  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  với  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  và  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  có đồ thị là tập hợp  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ . Một điểm  $(x, y, z)$  nằm trên đồ thị sẽ thỏa phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , do đó khoảng cách từ điểm  $(x, y, z)$  tới điểm gốc tọa độ 0 bằng 1. Ta suy ra đồ thị đó là nửa mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ  $O$  và bán kính 1 nằm trong nửa không gian trên  $z \geq 0$ .



Hình 1.2.1: Đồ thị của hàm số  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  với  $z \geq 0$ .

(b) Đồ thị của hàm số  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  là mặt nón tròn xoay quanh trục  $Oz$ , nằm trong nửa không gian trên  $z \geq 0$ . Để hình dung đồ thị, ta có thể xét một số trường hợp đặc biệt. Khi  $x = 0$  thì điểm trên đồ thị thỏa phương trình  $z = |y|$ , tạo thành một đường gấp khúc trong mặt phẳng  $Oyz$ . Tương tự khi  $y = 0$  thì điểm trên đồ thị thỏa phương trình  $z = |x|$ , tạo thành một đường gấp khúc trong mặt phẳng  $Oxz$ . Mỗi giá trị cố định của  $z$  như  $z = 1$  cho một đường tròn  $x^2 + y^2 = 1^2$  trên mặt phẳng  $z = 1$ . Hơn nữa nếu  $z$  tăng lên thì bán kính của đường tròn này cũng tăng lên. Các phân tích như vậy phù hợp với hình vẽ bằng máy tính dưới đây.



Hình 1.2.2: Đồ thị của hàm số  $z = x^2 + y^2$  với  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .

So với trường hợp hàm một biến, nói chung khó vẽ đường đồ thị của hàm hai biến hơn. Trong một số trường hợp như trên, ta có thể khảo sát, chẳng hạn cho mỗi biến một vài giá trị hằng, để phác họa đồ thị. Trong nhiều trường hợp khác, cách thông thường là dùng máy tính để chấm một lượng lớn điểm trên đồ thị.

### 1.2.1 Giới hạn của hàm số

**Định nghĩa 1.2.3.** Cho hàm số  $f$  xác định trên tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  theo biến  $x$  và  $a$  là một điểm tụ của  $D$ . Ta nói hàm  $f$  có giới hạn  $L \in \mathbb{R}$  khi  $x$  dần đến  $a$  nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\}), f(x) \in B(L, \epsilon).$$

Khi đó ta viết  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , hoặc viết  $f(x) \rightarrow L$  khi  $x \rightarrow a$ .

Chúng ta thấy định nghĩa của giới hạn của hàm nhiều biến không khác gì với định nghĩa của giới hạn của hàm một biến (xem [Bmgt1]). Ý nghĩa của định nghĩa này cũng không có gì khác: *giới hạn của  $f(x)$  là  $L$  khi  $x$  tiến tới  $a$  nếu khoảng cách giữa  $f(x)$  và  $L$  nhỏ tùy ý miễn khoảng cách giữa  $x$  và  $a$  đủ nhỏ nhưng khác 0.*

Như vậy giới hạn của hàm một biến là trường hợp  $n = 1$  của giới hạn của hàm nhiều biến, và ta thừa hưởng mọi tính chất đã có trong Vi Tích phân Hàm một biến.

Trong một số trường hợp đơn giản hơn, có thể hiểu giới hạn một cách thô sơ: khi  $x$  gần tới  $a$  hơn thì  $f(x)$  gần tới  $L$  hơn.

**Ghi chú 1.2.4.** Trong định nghĩa trên ta cho phép điểm  $a$  là điểm tụ của miền xác định  $D$ , không nhất thiết thuộc  $D$ . Điều này là để chúng ta có thể xét những giới hạn như

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2}.$$

Ở đó chúng ta cho  $(x, y)$  dần tới  $(0, 0)$  mà không bằng  $(0, 0)$ , nơi hàm không được xác định. Điều này giải thích điều kiện  $0 < \|x - a\|$  tức  $x \neq a$  trong định nghĩa.

**Ví dụ 1.2.5.** Nếu  $f$  là một hàm hằng, nghĩa là có  $c \in \mathbb{R}$  với  $f(x) = c$  với mọi  $x$ , thì rõ ràng  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .

**Ví dụ 1.2.6.** Xét hàm lấy tọa độ  $f(x, y) = x$ . Do tính chất của khoảng cách Euclid,  $|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , do đó để  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x - x_0| < \epsilon$  thì chỉ cần  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \epsilon$ . Ta kết luận

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0.$$

Như vậy khi  $(x, y)$  dần tới  $(x_0, y_0)$  thì  $x$  dần tới  $x_0$ , và tương tự  $y$  dần tới  $y_0$ . Đây là một quan sát căn bản được sử dụng nhiều khi xét giới hạn.

Một số tính chất của giới hạn dưới đây có thể được giải thích và chứng minh từ định nghĩa, tương tự như với hàm một biến.

**Mệnh đề 1.2.7.** Giả sử  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  là hai hàm số có giới hạn khi  $x \rightarrow a$ . Khi đó:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- (b)  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  với  $k$  là một hằng số,
- (c)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,
- (d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  nếu  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .
- (e) Nếu  $f \leq g$  thì  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Dưới đây là một hệ quả thường được dùng:

**Hệ quả 1.2.8 (Tiêu chuẩn kẹp).** Giả sử  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  và  $f \leq g \leq h$ . Giả sử  $f$  và  $h$  có cùng giới hạn  $L$  khi  $x \rightarrow a$ . Khi đó  $g$  cũng có giới hạn là  $L$  khi  $x \rightarrow a$ .

**Ví dụ 1.2.9.** Áp dụng các tính chất trên, ta tính

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} x^2 y^3 + 5 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} x^2 y^3 + \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 5 \\ &= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} x \right)^2 \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} y \right)^3 + 5 = 2^2 3^3 + 5. \end{aligned}$$

Như vậy giới hạn thu được đơn giản bằng cách thế số vào.

## 1.2.2 Hàm số liên tục

**Định nghĩa 1.2.10.** Cho hàm số  $f$  xác định trên tập  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ta nói  $f$  **liên tục** tại  $a \in D$  nếu  $a$  không là một điểm tụ của  $D$ , còn nếu  $a$  là một điểm tụ của  $D$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Bằng kí hiệu thì

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap B(a, \delta), f(x) \in B(L, \epsilon).$$

Hàm  $f$  được gọi là liên tục trên  $D$  nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc  $D$ .



Ta chú ý để hàm liên tục tại  $a$  thì  $a$  phải thuộc miền xác định của hàm tức là hàm phải có giá trị tại  $a$ . Trong định nghĩa sự liên tục tại  $a$  ta không cần phải yêu cầu xét  $x$  gần  $a$  nhưng khác  $a$  như trong định nghĩa giới hạn.

Một lần nữa, khái niệm liên tục trong  $\mathbb{R}^n$  không có gì khác với liên tục trong  $\mathbb{R}$ . Nó vẫn có ý nghĩa là: *thay đổi giá trị của hàm là nhỏ tùy ý nếu thay đổi giá trị của biến là đủ nhỏ*. Tính liên tục cho phép ta kiểm soát được sai số.

Với hàm liên tục thì giới hạn thu được đơn giản bằng cách thế vào.

Các kết quả nói rằng hàm sơ cấp, tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm liên tục là hàm liên tục vẫn đúng cho hàm nhiều biến, và có thể được suy ra ngay từ các tính chất tương ứng của giới hạn, giống như cách đã làm cho hàm một biến, người học có thể xem lại ở [Bmgt1].

**Ví dụ 1.2.11.** Hàm hằng là hàm liên tục.

**Ví dụ 1.2.12.** Xét hàm lấy tọa độ  $f(x, y) = x$ . Từ Ví dụ 1.2.6, hàm lấy tọa độ là liên tục.

**Ví dụ 1.2.13.** Hàm  $g(x, y) = x^2$  là hợp của hàm  $(x, y) \mapsto x$  với hàm  $x \mapsto x^2$  là hai hàm liên tục, nên cũng liên tục.

**Ví dụ 1.2.14.** Hàm  $f(x, y) = x^2 y^3$  là tích của hai hàm  $g(x, y) = x^2$  và  $h(x, y) = y^3$  là hai hàm liên tục, nên cũng liên tục.

**Ví dụ 1.2.15.** Tìm giới hạn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Ta đánh giá

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| \leq |x|.$$

Vì

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$$

nên theo Tiêu chuẩn kẹp thì

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

**Ví dụ 1.2.16.** Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Cho  $x = y \neq 0$  ta được  $f(x, y) = \frac{1}{2}$  có giới hạn là  $\frac{1}{2}$  khi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Mặt khác, cho  $x = 0, y \neq 0$  ta được  $f(x, y) = 0$  có giới hạn là 0 khi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Điều này chứng tỏ  $f(x, y)$  không có giới hạn khi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , do đó  $f$  không liên tục tại  $(0, 0)$ .

**Ví dụ 1.2.17.** Tìm giới hạn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^3 + y^3) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Dùng các tính chất cơ bản trên của giới hạn và tính liên tục của hàm sin, ta có

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^3 + y^3) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = (1^3 + 0^3) \cdot \sin \frac{1}{1^2 + 0^2} = \sin 1.$$

**Ví dụ 1.2.18.** Tìm giới hạn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^3 + y^3) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Đặt  $f(x, y) = (x^3 + y^3) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ . Hàm số  $f$  này xác định trên  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ta có  $0 \leq |f(x, y)| \leq |x^3 + y^3|$ . Vì  $x^3 + y^3 \rightarrow 0$  khi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  nên theo tiêu chuẩn kẹp thì  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ , do đó  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Vậy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^3 + y^3) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

**Ví dụ 1.2.19.** Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ta thấy hàm  $f$  liên tục tại mọi điểm  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Xét tại  $(0, 0)$ . Theo bất đẳng thức Cauchy

$$0 \leq |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

do đó

$$\frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{4},$$

suy ra

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{4} = 0.$$

Vậy theo Tiêu chuẩn kẹp thì  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ . Như vậy  $f$  liên tục tại mọi điểm trên miền xác định.

## \* Giới hạn của hàm số thông qua dãy

Tương tự như trường hợp hàm một biến, ta có khái niệm giới hạn của dãy trong  $\mathbb{R}^n$ . Định nghĩa không có gì khác trong trường hợp  $n = 1$ . Ta nói rằng một dãy các điểm  $x_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  trong  $\mathbb{R}^n$  hội tụ tới  $x$  nếu  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\| = 0$ . Khi đó ta viết  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$ .

Do định nghĩa của khoảng cách và độ lớn Euclid, ta có thể thấy giới hạn của dãy tương đương với giới hạn của từng tọa độ, tức là nếu viết  $x_m = (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^n)$  và  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  thì

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

khi và chỉ khi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^1 = x^1, \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^2 = x^2, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^n = x^n.$$

Chúng ta có một liên hệ giữa hội tụ của dãy và hội tụ của hàm số, tương tự trường hợp hàm một biến ([TTQ11]):

**Mệnh đề 1.2.20.** Hàm  $f$  có giới hạn  $L$  khi  $x$  dần đến  $a$  khi và chỉ khi với mọi dãy  $(x_m)_{m \in \mathbb{Z}^+}$ ,  $x_m \neq a$  mà hội tụ tới  $a$  thì dãy  $(f(x_m))_{m \in \mathbb{Z}^+}$  hội tụ về  $L$ .

## Bài tập

**1.2.1.** Tìm

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(\cos(xy))$                     | (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^4 + y^2}$                                 |
| (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$               | (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$                               |
| (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$             | (k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{xy + y^3}$                                   |
| (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2}$          | (l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2 + y^2}$                                   |
| (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$         | (m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$                               |
| (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ | (n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^6}$                             |
| (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4 + y^2}$             | (o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sin^2 x)y}{x^2 + y^2}$                         |
| (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2}$             | (p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} (x^2 + y^2 - 25) \sin\left(\frac{1}{x - y + 1}\right)$ |

**1.2.2. Hàm**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

có liên tục hay không?

**1.2.3. \* Hãy khảo sát chung giới hạn**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{x^2 + y^2}$$

với  $m$  và  $n$  là hai số thực không âm.

## 1.3 Đạo hàm của hàm số

### 1.3.1 Đạo hàm riêng

**Ví dụ 1.3.1.** Điểm môn học  $f$  phụ thuộc vào điểm giữa kì  $x$  và điểm cuối kì  $y$ . Ta muốn biết nếu điểm cuối kì thay đổi trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học thay đổi thế nào? Đây là câu hỏi về tỉ lệ thay đổi giữa điểm môn học và điểm cuối kì, trong khi điểm giữa kì được giữ nguyên.

Cho một hàm số nhiều biến  $z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  xác định trên tập  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Xét điểm  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$  là một điểm trong của  $D$ . Cố định  $x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n$  thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là hàm chỉ theo một biến là  $x_1$ . Nếu hàm này có đạo hàm tại  $x_1 = a_1$  thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng phần của hàm  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  theo biến  $x_1$  (biến thứ nhất) tại điểm  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Đạo hàm riêng phần thực chất là đạo hàm theo một biến số khi tất cả các biến còn lại nhận giá trị cố định. Như vậy **đạo hàm riêng cũng chỉ là đạo hàm**. Tên “đạo hàm riêng” nhằm nhấn mạnh rằng ta đang xét hàm nhiều biến và đang xét đạo hàm theo từng biến.

Chính thức, từ định nghĩa của đạo hàm của hàm một biến, ta có định nghĩa sau:

**Định nghĩa 1.3.2.** Cho  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  và  $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$  là một điểm trong của  $D$ . Giới hạn

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i},$$

nếu có, được gọi là **đạo hàm riêng** theo biến thứ  $i$  của  $f$  tại  $a$ .

Giả thiết  $a$  là điểm trong của miền xác định là để đảm bảo tồn tại  $f(a_1, a_2, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$  khi  $h_i$  đủ nhỏ.

Người ta kí hiệu đạo hàm riêng phần trên bởi một số cách như  $f_{x_i}(x)$ ,  $f'_{x_i}(x)$ ,  $D_i f(x)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ , hay  $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)$ .

Giải thích của chúng ta rằng đạo hàm riêng là đạo hàm khi chỉ một biến thay đổi có nghĩa chính xác như sau: nếu ta đặt  $g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  thì  $g$  là hàm chỉ theo một biến là  $x_i$  và  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  chính là  $g'(a_i)$ .

Ý nghĩa của đạo hàm riêng là ý nghĩa của đạo hàm mà ta đã biết: **đạo hàm riêng đo tỉ lệ thay đổi giữa giá trị của hàm với giá trị của biến đang xét tại điểm đang xét**. Giá trị của đạo hàm riêng theo một biến cho thấy hàm đang thay đổi như thế nào theo biến đó. Vì thế mỗi khi muốn khảo sát sự thay đổi của các đại lượng phụ thuộc vào nhiều biến người ta thường thấy sự xuất hiện của đạo hàm riêng.<sup>4</sup>

**Khi tính đạo hàm riêng theo biến nào thì ta coi các biến còn lại là hằng số**, và tính đạo hàm theo biến đang xét theo cách tính đạo hàm của hàm một biến.

**Ví dụ 1.3.3.** Điểm môn học  $f$  phụ thuộc vào điểm giữa kì  $x$  và điểm cuối kì  $y$  theo công thức

$$f(x, y) = 30\%x + 70\%y.$$

Hỏi nếu điểm cuối kì tăng 1 trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học thay đổi thế nào?

Đây là câu hỏi về tỉ lệ thay đổi giữa điểm môn học và điểm cuối kì. Ta tính

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(30\%x + 70\%y) = 70\% = 0,7.$$

Vậy nếu điểm cuối kì tăng 1 trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học tăng 0,7.

**Ví dụ 1.3.4.** cho  $f(x, y) = x^3y^2$ . Muốn tính  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ta xem  $y$  như hằng số và biến số là  $x$ , như thế  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2$ . Tương tự,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y$ .

### 1.3.2 Mặt phẳng tiếp xúc. Xấp xỉ tuyến tính

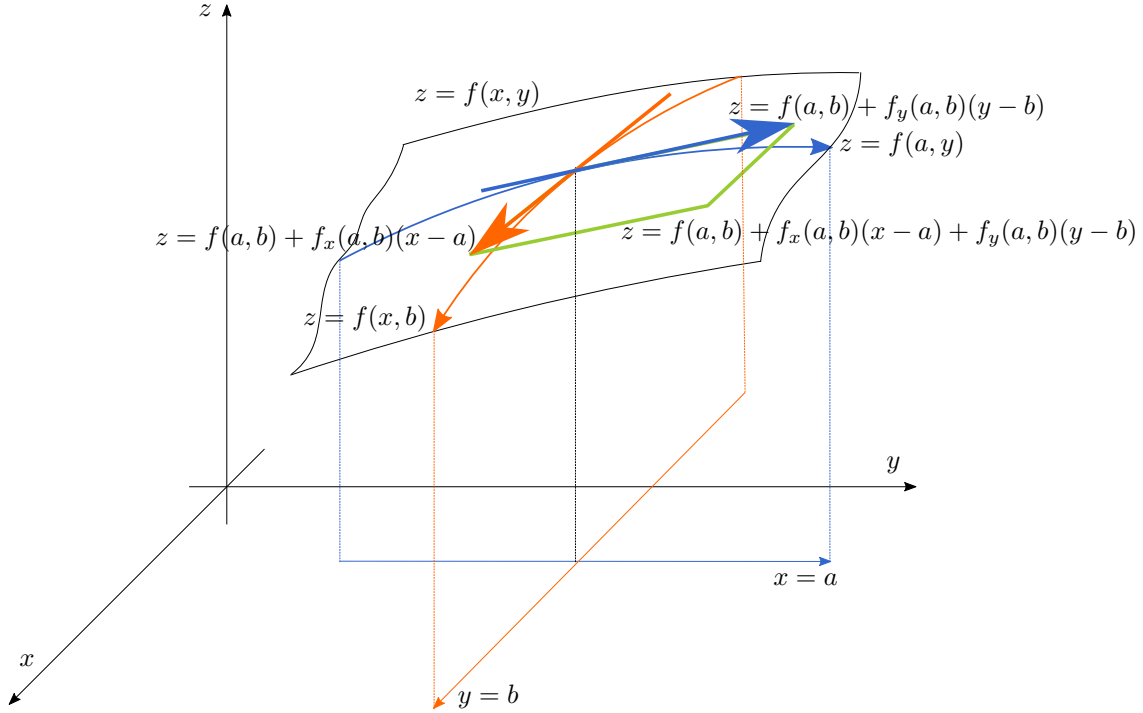
Ở mục này ta phát triển các ý tưởng về đường thẳng tiếp xúc (tiếp tuyến) và xấp xỉ tuyến tính trong Vi phân hàm một biến lên nhiều chiều.

Xét hàm  $z = f(x, y)$ . Giả sử hàm  $f$  có đạo hàm riêng tại điểm  $(a, b)$ . Trên mặt phẳng  $y = b$ , đồ thị của hàm  $f$  chỉ là một đường cong với phương trình  $z = f(x, b)$ . Đường cong này có tiếp tuyến tại  $x = a$ , như ta biết trong Vi phân hàm một biến, có hệ số góc là  $\frac{dz}{dx}|_{x=a} = f_x(a, b)$ , do đó có phương trình là  $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a)$ . Như vậy ta thấy một ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng: đó là hệ số góc của một tiếp tuyến của đồ thị.

<sup>4</sup>Thuật ngữ đạo hàm trong tiếng Anh là derivative, có nghĩa là dẫn xuất, từ một cái khác mà ra: đạo hàm của một hàm là một hàm dẫn xuất từ hàm ban đầu.

Tương tự, trên mặt phẳng  $x = a$ , đồ thị của hàm  $f$  là đường cong với phương trình  $z = f(a, y)$ , có tiếp tuyến tại  $y = b$  là  $z = f(a, b) + f_y(a, b)(y - b)$ . Hai đường tiếp tuyến mà ta vừa tìm được căng một mặt phẳng, được gọi là **mặt phẳng tiếp xúc** của đồ thị của  $f$  ở điểm  $(a, b)$ . Mặt phẳng tiếp xúc này chứa cả hai đường thẳng tiếp xúc trên, nên ta thấy ngay nó có phương trình (Hình 1.3.1)

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \quad (1.3.1)$$



Hình 1.3.1: Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng.

Ta có một cách giải thích hơi khác như sau. Đặt  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Ảnh của  $r$  chính là đồ thị của  $f$ . Nếu ta cố định  $y = b$  thì  $r(x, y)$  trở thành một đường đi trên đồ thị của  $f$ . Vận tốc của đường đi đó là  $r_x(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} r(a, b) = (1, 0, f_x(a, b))$ . Vectơ này “tiếp xúc” với đồ thị của  $f$  tại điểm  $(a, b, f(a, b))$ . Tương tự, cố định  $x = a$  ta được một vectơ tiếp xúc nữa là  $r_y(a, b) = (0, 1, f_y(a, b))$ . Hai vectơ tiếp xúc này căng mặt phẳng tiếp xúc của đồ thị của  $f$  ở điểm  $(a, b)$ . Mặt phẳng này có một **vector pháp tuyến** là

$$r_x(a, b) \times r_y(a, b) = (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1).$$

Từ đó ta có một phương trình cho mặt phẳng tiếp xúc của đồ thị của hàm  $f$  tại điểm  $(a, b, f(a, b))$  là (Hình 1.3.2)

$$-(x - a)f_x(a, b) - (y - b)f_y(a, b) + (z - f(a, b)) = 0,$$

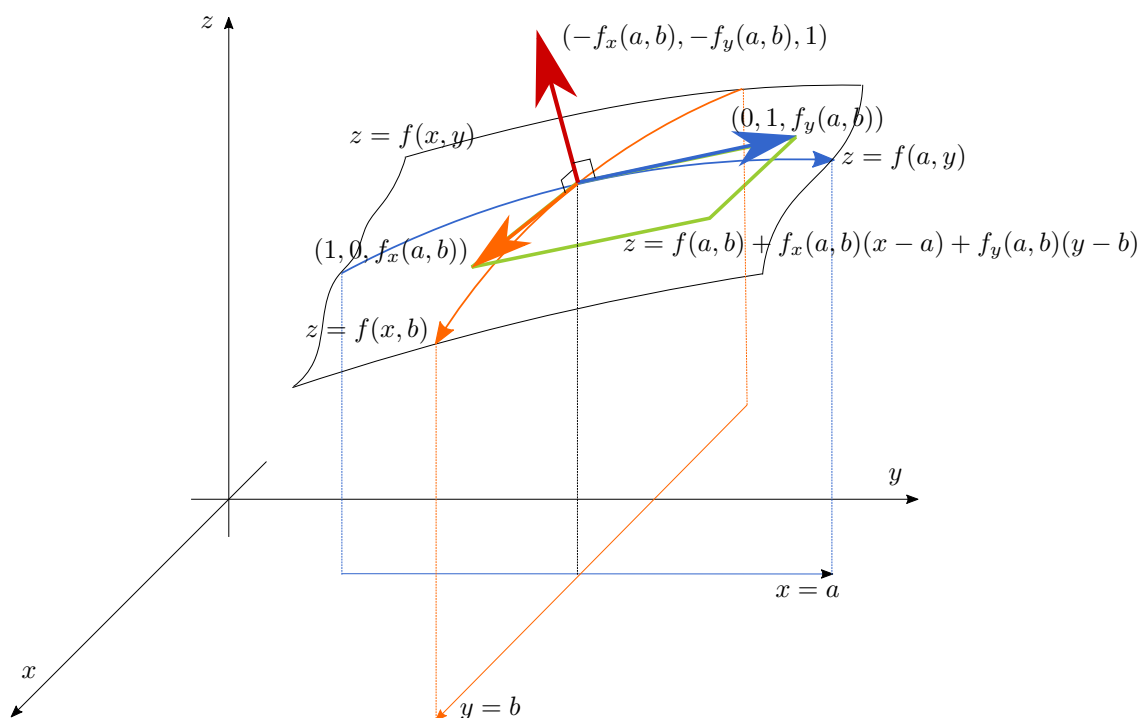
hay

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

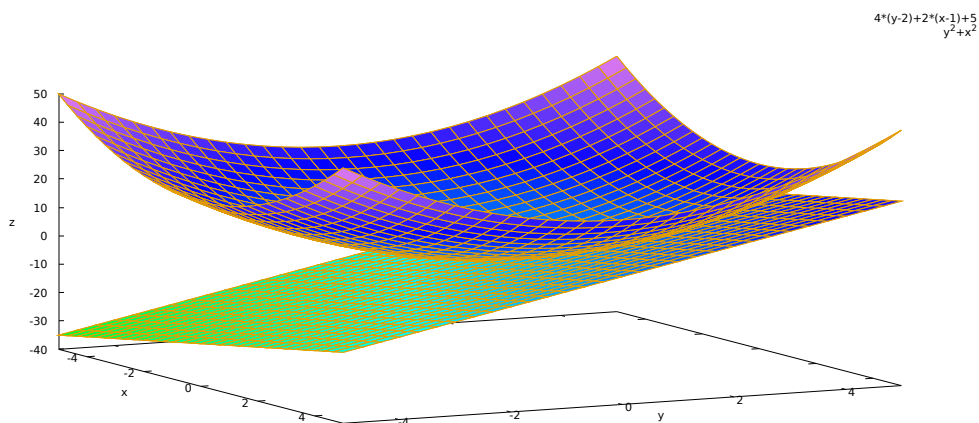
**Ví dụ 1.3.5.** Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt  $z = x^2 + y^2$  tại điểm  $(x, y) = (1, 2)$ .

Ta tính  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_x(1, 2) = 2$ ,  $f_y(x, y) = 2y$ ,  $f_y(1, 2) = 4$ ,  $f(1, 2) = 5$ . Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại  $(1, 2)$  là (Hình 1.3.3)

$$z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2) = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2).$$



Hình 1.3.2: Mặt phẳng tiếp xúc.

Hình 1.3.3: Mặt phẳng tiếp xúc của mặt  $z = x^2 + y^2$  tại điểm  $(x, y) = (1, 2)$ .

Ý chính của xấp xỉ tuyến tính là **dùng mặt phẳng tiếp xúc để xấp xỉ đồ thị**. Như thế với  $(x, y) \approx (a, b)$  ta có xấp xỉ

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Một cách viết khác, đặt  $\Delta x = x - a$ ,  $\Delta y = y - b$ ,  $\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(a, b)$ , thì

$$\Delta f(x, y) \approx f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y.$$

Vế phải của biểu thức trên có khi được gọi theo một thuật ngữ cũ là “vi phân” (differential) của hàm  $f$ .

### 1.3.3 Đạo hàm riêng cấp cao

Ta biết đạo hàm cấp cao của hàm một biến số được định nghĩa theo quy nạp: đạo hàm cấp  $n$  bằng đạo hàm của đạo hàm cấp  $(n - 1)$ . Đối với hàm nhiều biến khái niệm tương ứng là đạo hàm riêng và đạo hàm riêng cấp cao.

Cho  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nếu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  tồn tại tại mọi điểm  $x \in D$  thì ta có một hàm mới

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Ta lại có thể xét đạo hàm riêng của hàm  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  này, tức là

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Các đạo hàm này, nếu có, được gọi là các đạo hàm riêng cấp 2 của  $f$ . Ta thường dùng ký hiệu <sup>5</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}.$$

Tương tự, nếu  $f$  có các đạo hàm riêng cấp 2 tại mọi điểm của  $D$  thì đạo hàm riêng theo các biến của các đạo hàm riêng cấp 2 này gọi là đạo hàm riêng cấp 3 của  $f$ , ký hiệu là

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j x_k}.$$

**Ví dụ 1.3.6.** Hàm  $f(x, y) = x^3 y^4 - 4xy^2$  có  $f_x(x, y) = 3x^2 y^4 - 4y^2$ ,  $f_y(x, y) = 4x^3 y^3 - 8xy$ . Các đạo hàm cấp 2 là  $f_{xx}(x, y) = 6xy^4$ ,  $f_{xy}(x, y) = 12x^2 y^3 - 8y = f_{yx}(x, y)$ ,  $f_{yy}(x, y) = 12x^3 y^2 - 8x$ .

**Ví dụ 1.3.7.** Hàm  $f(x, y) = x^2 e^y + x^3 y^2 - y^5$  có  $f_x(x, y) = 2xe^y + 3x^2 y^2$ ,  $f_y(x, y) = x^2 e^y + 2x^3 y - 5y^4$ ,  $f_{xy}(x, y) = 2xe^y + 6x^2 y = f_{yx}(x, y)$ .

Trong các ví dụ trên ta thấy  $f_{xy} = f_{yx}$ . Đây không phải là tình cờ. Định lý sau cho biết một điều kiện đủ để hai đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau.

**Định lý 1.3.8.** Nếu  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên  $D$  thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

trên  $D$ , với mọi  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Vậy **nếu các đạo hàm riêng liên tục thì thứ tự lấy đạo hàm không ảnh hưởng tới kết quả.**

*Chứng minh.* Ta viết chứng minh cho trường hợp  $n = 2$  cho dễ theo dõi hơn. Trường hợp tổng quát không có gì khác về nội dung. Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} f_{yx}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(a + h, b) - f_y(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [(f(a + h, b + k) - f(a + h, b)) - (f(a, b + k) - f(a, b))]. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>chú ý sự khác biệt thứ tự của biến trong hai ký hiệu

Đặt  $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$  thì

$$[f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] - [f(a, b+k) - f(a, b)] = g(a+h) - g(a).$$

Vì  $g$  khả vi liên tục nên theo Định lý giá trị trung bình Lagrange (xem [Bmgt1]) có một số  $\theta$  giữa  $a$  và  $a+h$  sao cho  $g(a+h) - g(a) = g'(\theta)h$ . Chú ý  $g'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$ , ta được

$$[f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] - [f(a, b+k) - f(a, b)] = [f_x(\theta, b+k) - f_x(\theta, b)]h.$$

Vì  $f_x(\theta, y)$  là hàm khả vi liên tục theo biến  $y$  nên lại theo Định lý giá trị trung bình có một số  $\delta$  giữa  $b$  và  $b+k$  sao cho  $f_x(\theta, b+k) - f_x(\theta, b) = f_{xy}(\theta, \delta)k$ . Vậy

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} f_{xy}(\theta, \delta).$$

Chú ý  $\theta$  và  $\delta$  phụ thuộc vào  $(h, k)$ . Khi  $h$  và  $k$  đủ nhỏ thì  $(\theta, \delta)$  đủ gần  $(a, b)$ , và vì  $f_{xy}$  liên tục nên  $f_{xy}(\theta, \delta)$  gần tùy ý  $f_{xy}(a, b)$ . Do đó giới hạn ở vế phải bằng  $f_{xy}(a, b)$ .  $\square$

Hàm mà tất cả các đạo hàm riêng đều tồn tại và liên tục được gọi là hàm **khả vi liên tục** hay hàm **trơn**. Như ta vừa thấy, các hàm như vậy có những tính chất đặc biệt, khiến làm việc với chúng dễ dàng hơn.

## Bài tập

**1.3.1.** Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm

(a)  $f(x, y) = \sin(x^4 y^5)$

(f)  $\ln(x^2 + y^2)$

(b)  $V = \pi r^2 h$

(c)  $f(x, y) = e^{xy}$

(g)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(d)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

(e)  $z = x^y$

(h)  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

**1.3.2.** Cho

$$f(x, y) = \int_x^y \sqrt{1+t^3} dt.$$

Tìm  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$  và  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ .

**1.3.3.** Cho  $f_y(10, 20) = -5$ ,  $f_x(10, 20) = 1$ ,  $f(10, 20) = 45$ . Hãy ước lượng  $f(11, 18)$ .

**1.3.4.** Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm:

(a)  $f(x, y) = x^2 y^3$  gần điểm  $(x, y) = (2, 1)$ .

(b)  $f(x, y) = x^y + x e^y$  gần điểm  $(1, 0)$ .

(c)  $f(x, y) = x - xy + y^2$  gần điểm  $(x, y) = (5, 6)$ . Viết phương trình cho mặt phẳng tiếp xúc của đồ thị ở điểm  $(x, y) = (5, 6)$ . Ước lượng  $f(5,1; 5,9)$ .

(d)  $f(x, y) = \ln(3x - y^2)$  gần điểm  $(x, y) = (1, 1)$ . Ước lượng  $f(1,05; 0,95)$ . So sánh số ước lượng với kết quả thu được bằng máy tính.

(e)  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$  gần điểm  $(x, y) = (0, 0)$ . Ước lượng  $f(-0,05; 0,05)$ . So sánh số ước lượng với kết quả thu được bằng máy tính.

(f)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  gần điểm  $(x, y) = (3, 4)$ . Tính xấp xỉ  $\frac{1}{\sqrt{2,99^2 + 3,01^2}}$ .

**1.3.5.** Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của hàm đã cho tại điểm cho trước:



- (a)  $z = x^3y + 2x^4y^5$  tại  $(x, y) = (1, 1)$ .
- (b)  $z = x^4 - y^2$  tại  $(x, y) = (3, 2)$ .
- (c)  $z = x^3 + y^2$  tại  $(1, 2, 5)$ .
- (d)  $z = x^2y$  tại  $(2, 1, 4)$ .
- (e)  $z = \sin x + \cos y$  tại  $(0, 0, 1)$ .
- (f)  $z = e^x \cos y$  tại  $(0, 0, 1)$ .
- (g)  $z = e^x \cos y$  tại  $(0, 0, 1)$ .
- (h)  $z = \ln(x^2 + y^4 + 1)$  tại  $(0, 0, 0)$ .

**1.3.6.** Hàm  $f(x, y)$  thỏa phương trình  $f_{xx} + f_{yy} = 0$  (phương trình Laplace) được gọi là một hàm điều hòa. Hãy kiểm các hàm sau là hàm điều hòa.

- (a)  $f(x, y) = e^x \cos y$
- (b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

**1.3.7.** Hãy kiểm hàm  $f(x, t) = \sin(cx)e^{-c^2t}$ , với  $c$  là một hằng số thực, thỏa phương trình truyền nhiệt

$$f_t = f_{xx}.$$

**1.3.8.** Chứng tỏ với mỗi số thực  $c$ , hàm  $u(x, t) = (2 \cos(ct) + 3 \sin(ct)) \sin(x)$  là nghiệm của phương trình sóng

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

## 1.4 Đạo hàm của hàm vectơ

Tổng quát hơn hàm số ta có hàm vectơ. Đó là những ánh xạ  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Mỗi hàm vectơ  $f$  như vậy là một bộ của  $m$  hàm số của  $n$  biến, cụ thể nếu ta viết

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

thì  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  trong đó các  $f_i$  là các hàm số của  $n$  biến.

**Ví dụ 1.4.1.** Một ánh xạ  $r : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  thường được gọi là một đường đi hay một chuyển động trong  $\mathbb{R}^m$ , mô tả chuyển động trong không gian theo thời gian.

**Ví dụ 1.4.2.** Hàm  $t \mapsto (x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t)$  là một đường xoắn trong  $\mathbb{R}^3$ .

Vì không gian đến  $\mathbb{R}^m$  có sẵn khoảng cách Euclid, nên khái niệm hội tụ và liên tục có thể mở rộng từ hàm số lên hàm vectơ mà không thay đổi nội dung.

Ma trận các đạo hàm riêng của của các hàm thành phần của hàm  $f$  được gọi là **ma trận Jacobi**<sup>6</sup> của  $f$ , kí hiệu là

$$J_f = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ma trận Jacobi chẳng qua là một cách viết danh sách các đạo hàm riêng của hàm thành một bảng, được gọi là một ma trận.

<sup>6</sup>Jacobi là họ của một nhà toán học sống vào thế kỉ 19

**Ví dụ 1.4.3.** Khi ánh xạ  $r : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  mô hình hóa chuyển động trong không gian theo thời gian thì đạo hàm của  $r$  tại  $t$  được cho bởi vectơ  $r'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_m(t))$  miêu tả tỉ lệ thay đổi của vị trí theo thời gian, mô hình hóa vận tốc của chuyển động.

Khi  $m = 1$  ta có hàm số nhiều biến  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , khi đó ma trận Jacobi là một danh sách chỉ có một hàng, được gọi là **gradient**<sup>7</sup> của  $f$ , ký hiệu  $\text{grad } f$  hay  $\nabla f$  (nabla), là vectơ mà các thành phần là các đạo hàm riêng:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**Ví dụ 1.4.4.** Xét hàm  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Ta có  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ , vậy  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ . Chẳng hạn tại  $x = 0$ ,  $y = 1$  thì  $\nabla f(0, 1) = (0, 2)$ .

Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các hàm thành phần của  $f$  tồn tại và liên tục tại  $x$  thì ta nói  $f$  **khả vi liên tục** hay **trơn** tại  $x$ .

### \* Sơ lược về ma trận

Với người đọc chưa biết đại số tuyến tính, dưới đây là vài điều về ma trận. Một ma trận là một cách viết một danh sách thành một bảng, gồm các hàng và cột

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Cách viết này tỏ ra rất thuận tiện vì ta có thể làm một số phép tính trên các ma trận, như nhân chúng. Trong trường hợp mà ta gặp trong môn học này, ta nhân một ma trận  $m$  hàng  $n$  cột với một ma trận  $n$  hàng 1 cột để được một ma trận  $m$  hàng 1 cột như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}.$$

Đặc biệt khi  $m = 1$  phép tính nhân ma trận có kết quả giống như phép nhân vô hướng của hai vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ , và do đó hai phép tính thường được đồng nhất:

$$(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n).$$

Tổng quát hơn ta có thể nhân hai ma trận để thu được một ma trận mà mỗi cột là tích của ma trận thứ nhất với cột tương ứng của ma trận thứ hai. Vì trong môn học ta không thực sự dùng tới chi tiết của phép toán này nên ta sẽ không nói thêm.

Một ma trận mà có số hàng bằng số cột thì được gọi là một ma trận vuông. Với mỗi ma trận vuông  $A$  có tương ứng một số thực gọi là **định thức**<sup>8</sup> của  $A$ , kí hiệu là  $\det A$ . Trong trường hợp thường gặp ma trận  $2 \times 2$  thì

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

<sup>7</sup>trong tiếng Anh gradient có nghĩa là dốc, nghiêng, ...

<sup>8</sup>từ chữ determinant, trong tiếng Anh có nghĩa là cái quyết định một đối tượng

Trong trường hợp ma trận  $3 \times 3$  thì

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1. \end{aligned}$$

Người học có thể tìm hiểu thêm trong các giáo trình Đại số tuyến tính.

### 1.4.1 Đạo hàm của hàm hợp

Giả sử  $f$  là hàm số của  $x$  và  $y$ , nhưng  $x$  và  $y$  lại là hàm số của  $t$ . Như thế ta có thể xem  $f$  cũng phụ thuộc vào  $t$ , là hàm của  $t$ . Ta muốn tính đạo hàm của  $f$  theo  $t$ . Đây là vấn đề đạo hàm của hàm hợp. Dưới đây ta phát biểu kết quả cho trường hợp hàm số hai biến cho dễ theo dõi hơn, trường hợp hàm số nhiều hơn hai biến là tương tự.

**Định lý 1.4.5.** Cho hàm số  $f(x, y)$  với  $x = x(t)$  và  $y = y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Giả sử  $f$ ,  $x$  và  $y$  khả vi liên tục. Đặt  $z(t) = f(x(t), y(t))$ . Khi đó

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t). \quad (1.4.1)$$

Người ta thường hiểu ngầm  $f$  là hàm của  $t$  để công thức ngắn gọn hơn và đỡ phải đặt thêm biến mới, và viết tắt rằng

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (1.4.2)$$

Trong trường hợp  $x$  và  $y$  là hàm của  $t$  và các biến khác nữa, thì các đạo hàm theo  $t$  trở thành các đạo hàm riêng và ta viết công thức là

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (1.4.3)$$

Ta có một cách giải thích Công thức (1.4.1), không phải là một chứng minh, dựa trên xấp xỉ tuyến tính như sau. Vì

$$\Delta z \approx f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y \approx f_x(x, y) x'(t) \Delta t + f_y(x, y) y'(t) \Delta t$$

nên

$$z'(t) \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} \approx f_x(x, y) x'(t) + f_y(x, y) y'(t).$$

*Chứng minh.* Chứng minh này chỉ là làm chính xác giải thích trên. Ta viết

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange, có hai số thực  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$  sao cho vế phải của đẳng thức trên bằng

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y.$$

Chia cho  $\Delta t$  ta được

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Cho  $\Delta t \rightarrow 0$ , chú ý rằng do  $x$  và  $y$  liên tục theo  $t$  nên khi  $\Delta t \rightarrow 0$  thì  $\Delta x \rightarrow 0$  và  $\Delta y \rightarrow 0$ , và do  $f_x$  và  $f_y$  liên tục nên ta thu được

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t).$$

□

**Ví dụ 1.4.6.** Giả sử  $f(x, y) = x^2y^3$ , với  $x(t) = t^4$  và  $y(t) = t^5$ . Tìm  $\frac{df}{dt}$ .

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy^3 4t^3 + x^2 3y^2 5t^4 = 2t^4(t^5)^3 4t^3 + (t^4)^2 3(t^5)^2 5t^4 = 23t^{22}. \end{aligned}$$

Ở trên ta để kí hiệu được gọn hơn ta đã lược bớt việc ghi ra giá trị của một số biến, với giả thiết là người đọc có thể tự thêm vào nếu muốn và sẽ không bị lầm lẫn.

Người đọc có thể nhận thấy ta có thể thu được kết quả bằng cách thế ngay  $t$  vào  $f$  để được  $f(t) = (t^4)^2(t^5)^3 = t^{23}$  và thu được kết quả một cách nhanh chóng mà không cần dùng tới hàm nhiều biến! Quả thực trong nhiều trường hợp tính toán cụ thể ta có thể làm như vậy. Giá trị của công thức đạo hàm của hàm hợp trong trường hợp nhiều biến thể hiện rõ hơn trong những trường hợp các hàm không có công thức cụ thể và trong các khảo sát chung.

**Ví dụ 1.4.7.** Cho  $z$  là một hàm khả vi liên tục theo hai biến  $x$  và  $y$ , với  $x$  và  $y$  là hai hàm khả vi liên tục theo biến  $t$ . Giả sử  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $x'(0) = 3$ ,  $y'(0) = 4$ ,  $z_x(1, 2) = 5$ ,  $z_y(1, 2) = 6$ . Hãy tính  $z'(0)$ .

Ta có

$$z'(t) = z_x(x(t), y(t))x'(t) + z_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Với  $t = 0$  thì

$$\begin{aligned} z'(0) &= z_x(x(0), y(0))x'(0) + z_y(x(0), y(0))y'(0) \\ &= z_x(1, 2)x'(0) + z_y(1, 2)y'(0) = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4. \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.4.8.** Cho  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , và  $f$  là một hàm của  $x$  và  $y$ . Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta,$$

và

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} r(-\sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta.$$

Hoàn toàn tương tự như trường hợp hàm số hai biến, với hàm số có nhiều biến hơn ta có công thức:

**Định lý 1.4.9.** Cho  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_i = x_i(t)$  là các hàm số khả vi liên tục và viết  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thì

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.} \quad (1.4.4)$$

Với  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ta nhận thấy vế phải của công thức trên bằng tích vô hướng của vectơ gradient của  $f$  với vectơ đạo hàm của  $x$ , do đó ta có thể viết lại công thức là

$$\boxed{(f \circ x)'(t) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t).} \quad (1.4.5)$$

**Ví dụ 1.4.10.** Cho  $z = f(x, y)$  với  $(x, y) = r(t)$ . Công thức đạo hàm của hàm hợp (1.4.1) cho

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ r)}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t).\end{aligned}$$

### \* Nâng cao hơn về ánh xạ đạo hàm

Nếu  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  khả vi liên tục tại  $x$  thì ta có thể xét một ánh xạ  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cho bởi

$$f'(x)(h) = J_f(x) \cdot h$$

trong đó phép nhân bên vế phải là phép nhân ma trận. Ánh xạ này được gọi là **ánh xạ đạo hàm** của  $f$  tại  $x$ .

Với người đọc có biết đại số tuyến tính thì có thể nhận thấy ma trận Jacobi  $J_f(x)$  chính là ma trận biểu diễn ánh xạ đạo hàm  $f'(x)$ , một ánh xạ tuyến tính, trong cơ sở chuẩn tắc của  $\mathbb{R}^n$ .

Với cách nhìn nâng cao hơn dùng ánh xạ đạo hàm ta có thể viết công thức đạo hàm hàm hợp theo cùng hình thức như với hàm một biến. Cho  $U, V, W$  là các tập mở của  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$  theo thứ tự đó, cho  $f : U \rightarrow V$  và  $g : V \rightarrow W$  khả vi liên tục, ta có công thức đạo hàm của hàm hợp ở dạng quen thuộc

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x). \quad (1.4.6)$$

Chú ý rằng ở vế phải là hợp của hai ánh xạ tuyến tính. Nếu viết ở dạng ma trận biểu diễn thì công thức này cho

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x). \quad (1.4.7)$$

Ở vế phải tích là phép nhân của ma trận. Công thức (1.4.5) là trường hợp riêng của Công thức (1.4.7) khi  $m = p = 1$ . Có thể chứng minh công thức này một cách tương tự như chứng minh cho trường hợp riêng ở trên tuy trừu tượng hơn và có một số chi tiết kỹ thuật phức tạp hơn, có trong các tài liệu như [TTQ11, tr. 118].

## 1.4.2 Đạo hàm theo hướng

Cho hàm  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  và  $x$  là một điểm trong của  $D$ . Đạo hàm của hàm  $f$  tại điểm  $x$  theo hướng vectơ  $u \in \mathbb{R}^n$  được định nghĩa là

$$D_u f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Vậy đạo hàm theo hướng là **tỉ lệ thay đổi của hàm theo biến của nó khi biến chỉ được thay đổi theo một hướng cho trước**.

Người ta thường qui ước lấy các vectơ có độ dài bằng 1 để chỉ hướng, mục đích là để chiều dài của vectơ chỉ hướng không làm ảnh hưởng tới các khái niệm liên quan tới hướng.

Đặt  $g(t) = f(x + tu)$  thì

$$D_u f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Trong trường hợp riêng  $m = 1$ , tức  $f$  là hàm số, giả thiết  $f$  là khả vi liên tục, dùng công thức đạo hàm của hàm hợp (1.4.5) áp dụng cho hàm  $g$ , ta được

$$g'(t) = \nabla f(x + tu) \cdot \frac{d}{dt}(x + tu) = \nabla f(x + tu) \cdot u,$$

suy ra  $g'(0) = \nabla f(x) \cdot u$ . Vậy ta có công thức biểu diễn đạo hàm theo hướng qua vectơ gradient:

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u. \quad (1.4.8)$$

**Ví dụ 1.4.11.** Tìm đạo hàm của hàm  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  tại điểm  $(1, 2)$  theo hướng của vectơ  $(3, 4)$ .

Ta tính  $f_x(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $f_y(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ , vậy  $\nabla(1, 2) = (1/5, 2/5)$ . Vectơ đơn vị theo hướng của vectơ  $(3, 4)$  là  $u = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3, 4) = (3/5, 4/5)$ . Vậy đạo hàm của hàm  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  tại điểm  $(1, 2)$  theo hướng của vectơ  $(3, 4)$  là

$$D_u f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot u = (1/5, 2/5) \cdot (3/5, 4/5) = 11/25.$$

Đặc biệt khi  $u$  là các vectơ của cơ sở chuẩn tắc của  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  thì đạo hàm theo hướng  $u$  chính là các đạo hàm riêng. Cụ thể

$$D_{e_i} f = \nabla f \cdot e_i = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Vậy đạo hàm riêng là trường hợp riêng của đạo hàm theo hướng.

## Ý nghĩa của vectơ gradient

Từ công thức trên ta suy ra nếu  $u$  là vectơ đơn vị chỉ hướng thì ta có bất đẳng thức (nhớ lại Mệnh đề 1.1.5):

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u \leq \|\nabla f(x)\| \|u\| = \|\nabla f(x)\|$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\nabla f(x)$  và  $u$  có cùng hướng. Suy ra giá trị lớn nhất của  $D_u f(x)$  là  $\|\nabla f(x)\|$  xảy ra khi  $u = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ . Ngắn gọn, **giá trị của hàm tăng nhanh nhất theo hướng của vectơ gradient**.

Tương tự,  $D_u f(x)$  có giá trị nhỏ nhất là  $-\|\nabla f(x)\|$  xảy ra khi  $u = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ , vậy **giá trị của hàm giảm nhanh nhất theo hướng đối của vectơ gradient**.

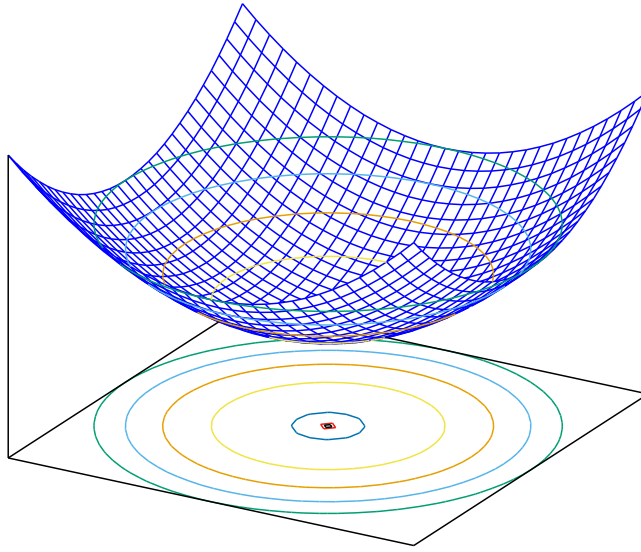
**Ví dụ 1.4.12.** Ta xét một ví dụ đơn giản để minh họa. Xét hàm  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Vectơ gradient của hàm  $f$  là  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y)$ , là một vectơ có hướng đi từ gốc tọa độ tới điểm  $(x, y)$ . Tại mỗi điểm  $(x, y)$  để giá trị hàm tăng nhanh nhất, tức cao độ  $z$  của điểm  $(x, y, z)$  trên đồ thị tăng nhanh nhất, ta cần đi theo hướng của vectơ gradient, tức là theo phương xuyên gốc tọa độ theo hướng ra khỏi gốc tọa độ. Muốn cao độ giảm nhanh nhất ta cần đi theo hướng ngược lại. Những điều này hoàn toàn phù hợp với trực quan từ hình vẽ đồ thị, Hình 1.4.1.

**Ghi chú 1.4.13.** \* Nâng cao hơn, với  $m$  tổng quát, dùng công thức tổng quát cho đạo hàm của hàm hợp (1.4.7), ta được

$$D_u f(x) = g'(0) = f'(x + 0u) \circ \frac{d}{dt}(x + tu) \Big|_{t=0} = f'(x)(u) = J_f(x) \cdot u.$$

Vậy giá trị của  $f'(x)(u)$  bằng đạo hàm của  $f$  tại  $x$  theo hướng  $u$ .



Hình 1.4.1: Đồ thị hàm  $z = x^2 + y^2$  cùng với các đường mức là những đường tròn tâm tại gốc tọa độ. Hướng tăng nhanh nhất của giá trị của hàm rõ ràng là hướng từ gốc tọa độ đi ra, vuông góc với các đường mức, chính là hướng của vectơ gradient.

### 1.4.3 Đạo hàm của hàm ẩn

#### Tập mức

Với mỗi số thực  $c$  cố định, phương trình  $f(x) = c$  xác định tập  $C = f^{-1}(\{c\})$ , được gọi là **tập mức** của hàm  $f$  ứng với mức  $c$ .

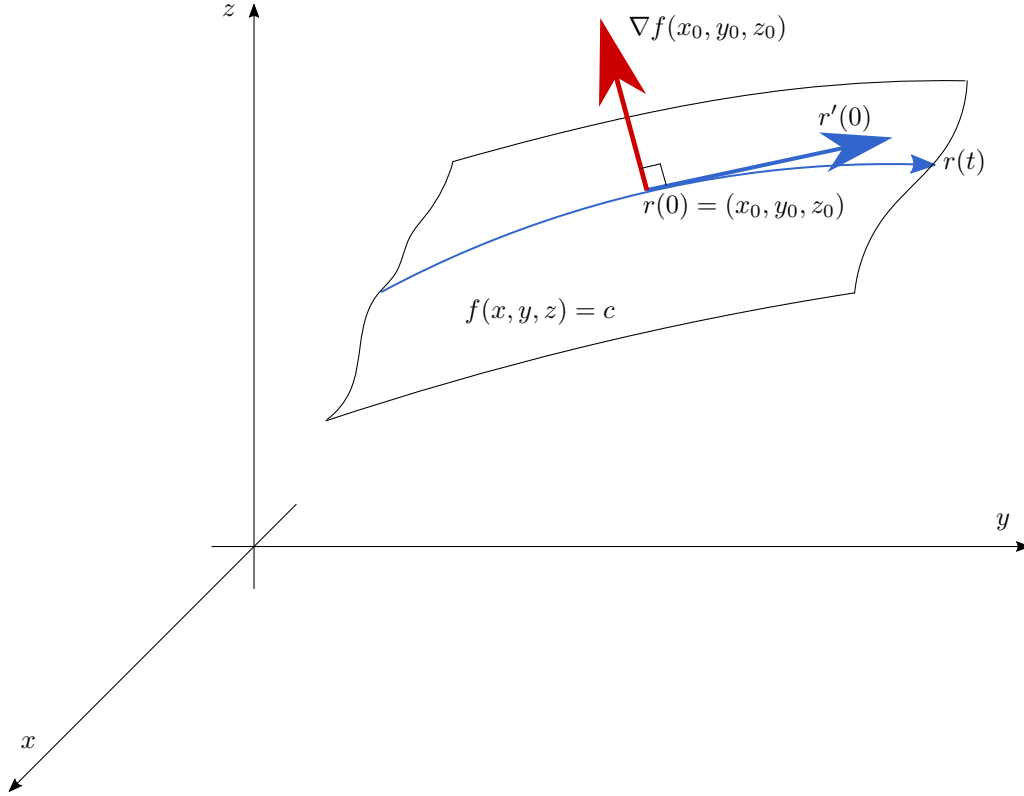
Giả sử  $x_0$  là một điểm thuộc  $C$ . Giả sử  $x = r(t)$  là một đường trong  $C$  đi qua điểm  $x_0$ , với  $r(0) = x_0$ . Ta luôn có  $f(r(t)) = c$ , do đó lấy đạo hàm theo  $t$  ta được  $\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0$ , đặc biệt  $\nabla f(x_0) \cdot r'(0) = 0$ . Điều này có nghĩa là vectơ  $\nabla f(x_0)$  phải vuông góc với vectơ  $r'(0)$ . Mà vectơ  $r'(0)$  là vectơ vận tốc của đường  $r$  tại điểm  $r(0)$ , là một vectơ tiếp xúc bất kì của tập  $C$  tại điểm  $x_0$ , ta kết luận  $r'(0)$  vuông góc với mọi vectơ tiếp xúc của  $C$ , do đó ta nói  $r'(0)$  vuông góc với  $C$ . Xem Hình 1.4.2.

Ta đi đến một quan sát quan trọng: **vectơ gradient của một hàm luôn vuông góc với tập mức của hàm đó và chỉ theo hướng tăng của mức**. Xem minh họa ở các Hình 1.4.3, 1.4.4.

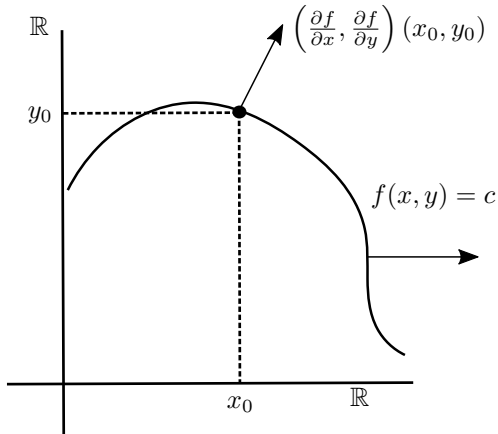
Điều kiện kĩ thuật cho lí luận trên là đúng chỉ đơn giản là vectơ gradient tại điểm đang xét là khác 0. Đây là một ứng dụng của Định lý hàm ẩn, được khảo sát chi tiết hơn trong các tài liệu như [TPPT02, TTQ11].

#### Đạo hàm của hàm cho ở dạng ẩn

Xét trường hợp  $n = 2$ . Nếu tại điểm  $(x_0, y_0)$  thỏa phương trình  $f(x, y) = c$  vectơ gradient  $\nabla f(x_0, y_0)$  là khác 0 thì phương trình  $f(x, y) = c$  xác định một đường cong trong  $\mathbb{R}^2$ , một đường mức. Tại điểm  $(x_0, y_0)$  trên đường này thì vectơ gradient  $\nabla f(x_0, y_0)$  vuông góc với đường, do đó là một vectơ pháp tuyến của đường, vuông góc với phương của đường



Hình 1.4.2: Vectơ gradient luôn vuông góc với tập mức. Trường hợp ba chiều.



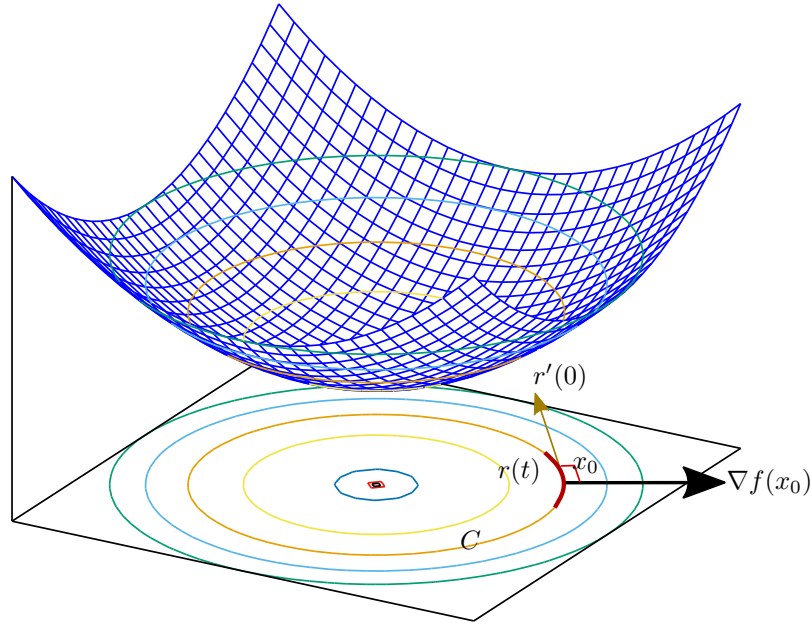
Hình 1.4.3: Vectơ gradient luôn vuông góc với tập mức. Trường hợp hai chiều.

thẳng tiếp xúc, tức tiếp tuyến, của đường tại điểm  $(x_0, y_0)$ .

Từ tính chất trên ta thu được ngay một phương trình cho đường thẳng tiếp xúc của đường cho ở dạng ẩn  $f(x, y) = c$  tại một điểm  $(x_0, y_0)$  trên đường. Điều kiện để một điểm  $(x, y)$  nằm trên đường thẳng tiếp xúc tại điểm  $(x_0, y_0)$  là vectơ tiếp xúc  $(x, y) - (x_0, y_0)$  vuông góc với vectơ pháp tuyến  $\nabla f(x_0, y_0)$ , tức là

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$





Hình 1.4.4: Minh họa cho tính chất của vectơ gradient tại một điểm trên tập mức. Hình vẽ cho hàm  $z = x^2 + y^2$ , các đường mức trong trường hợp này là những đường tròn tâm tại gốc tọa độ. Vectơ gradient tại mỗi điểm đi từ gốc tọa độ ra, vuông góc với đường mức đi qua điểm đó.

Như vậy đường thẳng tiếp xúc của đường mức có phương trình

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Nếu  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  thì ta rút ra được phương trình

$$y = y_0 + \frac{-f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Phương trình này chứng tỏ hệ số góc của đường tiếp tuyến tại  $(x_0, y_0)$  chính là  $-\frac{f_x}{f_y}(x_0, y_0)$ .

**Ví dụ 1.4.14.** Tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $x^2 + y^2 = 2$  tại điểm  $(1, 1)$ .

Đường tròn này là một tập mức của hàm  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Vectơ gradient  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$  là một vectơ pháp tuyến của đường tại điểm  $(x, y)$ . Tại điểm  $(1, 1)$  thì  $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$ . Phương trình đường thẳng tiếp xúc tại điểm  $(1, 1)$  là  $2(x - 1) + 2(y - 1) = 0$ , hay  $y = -x + 2$ .

Phần thảo luận trên có thể được diễn đạt hơi khác đi như sau. Xét phương trình  $f(x, y) = c$ . Giả sử  $(x_0, y_0)$  là một nghiệm của phương trình, và  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Khi đó nếu  $x$  đủ gần  $x_0$  thì  $y$  là một hàm của  $x$ , điều có thể thấy một cách trực quan từ Hình 1.4.3. Khi đó đạo hàm của  $y$  theo  $x$  có thể thu được bằng cách viết  $f(x, y(x)) = c$  rồi lấy đạo hàm theo  $x$  của hai vế theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp:

$$f_x \frac{dx}{dx} + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

suy ra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y},$$

cụ thể hơn

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{-f_x}{f_y}(x_0, y_0).$$

Phương pháp này đã được giới thiệu ở môn Vi tích phân hàm một biến ([Bmgt1]), gọi là “lấy đạo hàm theo biến  $x$ ”.

**Ví dụ 1.4.15.** Trở lại ví dụ tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $x^2 + y^2 = 2$  tại điểm  $(1, 1)$ .

Xem  $y$  là hàm của  $x$ , lấy đạo hàm hai vế theo  $x$ , ta được  $2x + 2y \cdot y'(x) = 0$ , suy ra  $y'(x) = \frac{-x}{y}$ . Tại điểm  $(1, 1)$  thì  $y'(1) = -1$ . Phương trình đường thẳng tiếp xúc tại điểm  $(1, 1)$  là  $y = 1 + (-1)(x - 1)$ , hay  $y = -x + 2$ .

## Mặt phẳng tiếp xúc của mặt cho ở dạng ẩn

Xét trường hợp  $n = 3$ . Nếu tại điểm  $(x_0, y_0, z_0)$  thỏa phương trình  $f(x, y, z) = c$  vectơ gradient  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  là khác 0 thì phương trình  $f(x, y, z) = c$  xác định một mặt cong trong  $\mathbb{R}^3$ , một mặt mức. Tại điểm  $(x_0, y_0, z_0)$  trên mặt này thì vectơ gradient  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  vuông góc với mặt, do đó là một vectơ pháp tuyến của mặt, chỉ phương của mặt phẳng tiếp xúc của mặt tại điểm đó.

Từ tính chất trên ta thu được ngay một phương trình cho mặt phẳng tiếp xúc của mặt mức  $f(x, y, z) = c$  tại một điểm  $(x_0, y_0, z_0)$  trên mặt. Điều kiện để một điểm  $(x, y, z)$  nằm trên mặt phẳng tiếp xúc tại điểm  $(x_0, y_0, z_0)$  là vectơ tiếp xúc  $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$  vuông góc với vectơ pháp tuyến  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ , tức là

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0.$$

Như vậy mặt phẳng tiếp xúc của mặt mức có phương trình

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

**Ví dụ 1.4.16.** Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  tại điểm  $(3, 1, 2)$ .

Mặt cầu này là một tập mức của hàm  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Vectơ gradient  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$  là một vectơ pháp tuyến của mặt tại điểm  $(x, y, z)$ . Tại điểm  $(3, 1, 2)$  thì  $\nabla f(3, 1, 2) = (6, 2, 4)$ . Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại điểm  $(3, 1, 2)$  là

$$6(x - 3) + 2(y - 1) + 4(z - 2) = 0.$$

**Ví dụ 1.4.17.** Cho mặt đồ thị  $z = g(x, y)$ . Đặt  $f(x, y, z) = g(x, y) - z$  thì đồ thị của  $g$  chính là tập mức  $f(x, y, z) = 0$  của  $f$ . Theo cách tiếp cận này thì mặt phẳng tiếp xúc của mặt  $z = g(x, y)$  tại  $(x_0, y_0)$  là

$$g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0,$$

chính là phương trình ta đã biết ở (1.3.1).

## Bài tập

**1.4.1.** Cho  $z$  là một hàm khả vi liên tục theo hai biến  $x$  và  $y$ , với  $x$  và  $y$  là hai hàm khả vi liên tục theo biến  $t$ . Giả sử  $x(1) = 2$ ,  $y(1) = -2$ ,  $x'(1) = 4$ ,  $y'(1) = -3$ ,  $z_x(2, -2) = -4$ ,  $z_y(2, -2) = 6$ . Hãy tính  $z'(1)$ .

**1.4.2.** Điện thế  $V$  trong một mạch điện đơn giản đang giảm dần vì pin yếu đi theo thời gian. Điện trở  $R$  đang dần tăng lên do thiết bị bị nóng lên. Theo định luật Ohm,  $V = IR$ . Dùng đạo hàm hàm hợp, hãy tìm xem cường độ dòng điện  $I$  đang thay đổi như thế nào khi  $R = 400\Omega$ ,  $I = 0,08A$ ,  $dV/dt = -0,01V/s$ , và  $dR/dt = 0,03\Omega/s$ .

**1.4.3.** Giả thiết số lượng cá thể  $C$  của một loài phụ thuộc vào lượng thức ăn  $A$  và lượng thú săn mồi  $S$ . Trong khi đó lượng thức ăn  $A$  và lượng thú săn mồi  $S$  lại thay đổi theo thời gian  $t$ . Hãy viết công thức định lượng diễn tả tốc độ thay đổi số lượng cá thể theo thời gian  $\frac{dC}{dt}$  thông qua tốc độ thay đổi của lượng thức ăn  $\frac{dA}{dt}$  và tốc độ thay đổi của lượng thú săn mồi  $\frac{dS}{dt}$ . Áp dụng, giả sử tại một thời điểm nhất định  $\frac{dA}{dt} = -2,4$ ;  $\frac{dS}{dt} = 3,1$ ;  $\frac{\partial C}{\partial A} = 4,05$ ;  $\frac{\partial C}{\partial S} = -0,4$ ; hãy tính  $\frac{dC}{dt}$  tại thời điểm đó.

**1.4.4.** Cho  $z = f(x, y)$ ,  $x = u - v$ ,  $y = v - u$ . Chứng tỏ  $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$ .

**1.4.5.** Tìm đạo hàm theo hướng của hàm tại điểm đã cho theo hướng của vectơ đã cho. Lưu ý cần lấy vectơ đơn vị để chỉ hướng.

- $f(x, y) = y\sqrt{x}$  tại điểm  $(1, 2)$  theo hướng của vectơ  $(2, 3)$ .
- $f(x, y) = x^y - y^2$  tại điểm  $(-2, 2)$  theo hướng của vectơ  $(1, -1)$ .
- $f(x, y) = x^2y^3$  tại điểm  $(1, 1)$  theo hướng của vectơ  $(4, 3)$ .
- $f(x, y) = x^2y + y^3$  tại điểm  $(3, 1)$  theo hướng của vectơ  $(0, 3)$ .
- $f(x, y) = ye^{x^2}$  tại điểm  $(0, 1)$  theo hướng của vectơ  $(1, 3)$ .
- $f(x, y) = 5x^2y^3$  tại điểm  $(1, 1)$  theo hướng từ điểm  $(1, 1)$  tới điểm  $(3, 2)$ .
- $f(x, y) = \sqrt{x^2y - y^3}$  tại điểm  $(2, 1)$  theo hướng từ điểm  $(2, 1)$  tới điểm  $(1, 3)$ .
- $f(x, y) = e^{x-2y}$  tại điểm  $(2, 1)$  theo hướng từ điểm  $(2, 1)$  tới điểm  $(0, 0)$ .
- $f(x, y) = x^2 + xy + 1$  tại điểm  $(0, 3)$  theo hướng từ điểm  $(0, 3)$  tới điểm  $(3, -1)$ .

**1.4.6.** Đặt hệ tọa độ trên một vùng trên mặt phẳng sao cho hướng trục  $x$  là hướng đông và hướng trục  $y$  là hướng bắc. Nhiệt độ tại một điểm có tọa độ  $(x, y)$  trong vùng được mô hình hóa bởi công thức  $T(x, y) = 100e^{-2x^2+3y^2}$ . Tại điểm có tọa độ  $(1, 2)$ :

- Nếu đi về hướng đông thì nhiệt độ tăng hay giảm?
- Nếu đi về hướng đông bắc thì nhiệt độ tăng hay giảm?
- Nên đi theo hướng nào để nhiệt độ giảm nhanh nhất?

**1.4.7.** Cho  $T(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$  là nhiệt độ tại điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng. Một con kì nhông đang nằm ở điểm  $(1, 3)$  đang muốn được ấm lên càng nhanh càng tốt. Nó nên bò theo hướng nào?

**1.4.8.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đường đã cho tại điểm đã cho.

- $x^2 + y^2 = 4$  tại điểm  $(1, \sqrt{3})$ .
- $x^2 - y^2 = 3$  tại điểm  $(2, 1)$ .
- $x^2y + xy^2 = 2$  tại điểm  $(1, 1)$ .
- $x^2 + y^2 + x^4y^4 = 1$  tại điểm  $(1, 0)$ .

**1.4.9.** Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt đã cho tại điểm đã cho.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  tại điểm  $(1, 1, \sqrt{2})$ .
- $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  tại điểm  $(1, 2, 2)$ .

(c)  $x^2y + y^2z - z^2x = 1$  tại điểm  $(1, 1, 0)$ .

(d)  $x^2 + y^2 + z^2 + x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4 - 9z = 21$  tại điểm  $(1, 1, 2)$ .

**1.4.10.** Tìm điểm tại đó mặt  $2x^2 + xy + y^2 + 4x + 8y - z + 14 = 0$  tiếp xúc với mặt phẳng  $4x + y - z = 0$ .

**1.4.11.** Cho  $z = f(x^2, y^4)$ . Tính  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**1.4.12.** Cho  $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Hãy kiểm tra các công thức sau về đạo hàm:

(a)  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

(b)  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ .

**1.4.13.** Cho  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Chứng tỏ nếu  $f, g$  có đạo hàm riêng theo mọi biến tại  $x \in D$ , thì

(a)  $\nabla(f + g)(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x)$ .

(b)  $\nabla(fg)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$ .

(c) nếu  $g(x) \neq 0$  thì

$$\nabla \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{1}{g^2(x)} (g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)).$$

## 1.5 Cực trị của hàm số nhiều biến

Như ta đã thấy với hàm một biến, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là một bài toán phổ biến, được gọi là bài toán cực trị hay bài toán tối ưu hóa. Ở bài này chúng ta phát triển một số phương pháp để khảo sát bài toán này. Ở đây có sự tương tự với hàm một biến, nhưng cũng có những điều mới do tính nhiều chiều.

Cũng giống như đối với hàm một biến, ta chia vấn đề thành hai phần: cực trị địa phương và cực trị toàn cục.

**Định nghĩa 1.5.1.** Hàm  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có **cực đại địa phương** (hay **cực đại tương đối**) tại  $a \in D$  nếu có một quả cầu  $B(a, r) \subset D$  sao cho  $f(a) \geq f(x)$  với mọi  $x \in B(a, r)$ . Điểm  $a$  được gọi là một điểm cực đại địa phương.

Tương tự  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có **cực tiểu địa phương** (hay **cực tiểu tương đối**) tại  $a \in D$  nếu có một quả cầu  $B(a, r) \subset D$  sao cho  $f(a) \leq f(x)$  với mọi  $x \in B(a, r)$ . Điểm  $a$  được gọi là một điểm cực tiểu địa phương.

Cực tiểu và cực đại được gọi chung là **cực trị**. Chú ý rằng nếu hàm có cực trị địa phương ở một điểm thì điểm đó phải là một điểm trong của miền xác định.

**Định nghĩa 1.5.2.** Hàm  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có **cực đại toàn cục** (hay **cực đại tuyệt đối**) tại  $a \in D$  nếu  $f(a) \geq f(x)$  với mọi  $x \in D$ . Khi đó  $f(a)$  là giá trị lớn nhất của  $f$ .

Tương tự  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có **cực tiểu toàn cục** (hay **cực tiểu tuyệt đối**) tại  $a \in D$  nếu  $f(a) \leq f(x)$  với mọi  $x \in D$ . Khi đó  $f(a)$  là giá trị nhỏ nhất của  $f$ .

Do định nghĩa cực trị địa phương, bài toán cực trị với tập xác định của hàm mục tiêu là tập mở thì được gọi bài toán không có ràng buộc, ngược lại bài toán với tập xác định của hàm mục tiêu không là tập mở được gọi là bài toán cực trị có ràng buộc.

### 1.5.1 Cực trị không có ràng buộc

Với hàm một biến, để hàm khả vi có cực trị địa phương tại một điểm thì đạo hàm phải bằng 0 tại điểm đó. Đối với hàm nhiều biến, một cực trị theo tất cả các biến hẳn nhiên phải là một cực trị theo từng biến, do đó đạo hàm theo từng biến phải bằng 0 tại điểm đó. Vậy một điều kiện cần để có cực trị địa phương là tất cả các đạo hàm riêng phải bằng 0.

**Định lý 1.5.3 (Điều kiện cần cấp 1).** Nếu  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi tại  $a$  và  $f$  có cực trị địa phương tại  $a$  thì  $\nabla f(a) = 0$ , nghĩa là  $\forall i = 1, \dots, n, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ .

Một cách khác để thấy điều này là từ ý nghĩa của vectơ gradient: nếu  $\nabla f(a) \neq 0$  thì tại  $a$  hàm  $f$  có hướng tăng và có hướng giảm, do đó nếu  $f$  có cực trị địa phương tại  $a$  thì phải có  $\nabla f(a) = 0$ .

*Chứng minh.* Đặt  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , một điểm trong của  $D$ . Hàm một biến  $\varphi_1 : t \mapsto f(t, a_2, \dots, a_n)$  xác định trong một khoảng mở  $I$  chứa  $a_1$  và khả vi tại  $a_1$ . Vì  $f$  có cực trị địa phương tại  $a$  nên  $\varphi_1$  có cực trị địa phương tại  $a_1$ . Do vậy  $0 = \varphi_1'(a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ . Tương tự  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$ .  $\square$

Trong trường hợp  $n = 2$ , kết quả này dẫn tới rằng tại điểm trên mặt đồ thị mà xảy ra cực trị địa phương thì vectơ pháp tuyến của mặt là thẳng đứng và mặt phẳng tiếp xúc là nằm ngang, một điều rất rõ về trực quan, xem Hình 1.5.1 và Hình 1.3.2.

Nếu tại  $a$  các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu thì  $a$  được gọi là một **điểm dừng** hay **điểm tới hạn**. Đây là những điểm ở đó có thể xảy ra cực trị địa phương. Như vậy ta **tìm cực trị địa phương trong các điểm dừng**.

Việc các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu tại điểm cực trị chỉ là điều kiện cần, nhưng không phải là điều kiện đủ.

**Ví dụ 1.5.4.** Xét hàm hai biến  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Ta có  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , nhưng  $f(x, 0) > f(0, 0) > f(0, y)$  với mọi  $x \neq 0$  và  $y \neq 0$ . Vậy  $(0, 0)$  là một điểm dừng, nhưng hàm không có cực trị địa phương tại  $(0, 0)$ . Điểm  $(0, 0)$  thường được gọi, dựa vào hình dạng đồ thị, là một **điểm yên**, xem Hình 1.5.1.

Như vậy cần lưu ý rằng cực trị địa phương phải xảy ra ở điểm dừng, nhưng điều ngược lại không đúng.

### Điều kiện đủ cho trường hợp hàm hai biến

Phát biểu điều kiện đủ trong trường hợp nhiều biến cùng với chứng minh khá phức tạp nên ta để lại ở phần tiếp theo sau. Thay vào đó ta phát biểu ngay kết quả trong trường hợp hàm hai biến.

Để tìm điều kiện đủ, tức là tìm điều kiện để có thể đưa ra kết luận về cực trị, ta nhớ lại trong hàm một biến tại các điểm dừng ta đã dùng dấu của đạo hàm bậc hai, giúp kiểm soát chặt chẽ hơn cách thay đổi của hàm. Cụ thể nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) > 0$  thì hàm  $f$  là lồi quanh  $x_0$ , hàm  $f$  có cực tiểu tại  $x_0$ , ngược lại nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) < 0$  thì hàm  $f$  là lõm quanh  $x_0$ , hàm  $f$  có cực đại tại  $x_0$ . Dưới đây ta phát triển kỹ thuật này cho hàm hai biến.

Các đạo hàm bậc hai có vai trò quan trọng trong vấn đề này. Bảng các đạo hàm bậc hai xếp dưới dạng một ma trận  $2 \times 2$  được gọi là **ma trận Hess**<sup>9</sup>, kí hiệu là

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

<sup>9</sup>tên một nhà toán học sống vào thế kỉ 19

Định thức của ma trận này là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Sau đây là tiêu chuẩn cực trị cho hàm hai biến.

**Các bước để tìm cực trị của hàm hai biến**

**Bước 1:** Tìm điểm dừng  $(x_0, y_0)$  bằng cách giải hệ phương trình  $\nabla f(x, y) = 0$ .

**Bước 2:** Tính định thức của ma trận Hess( $f, (x_0, y_0)$ ):

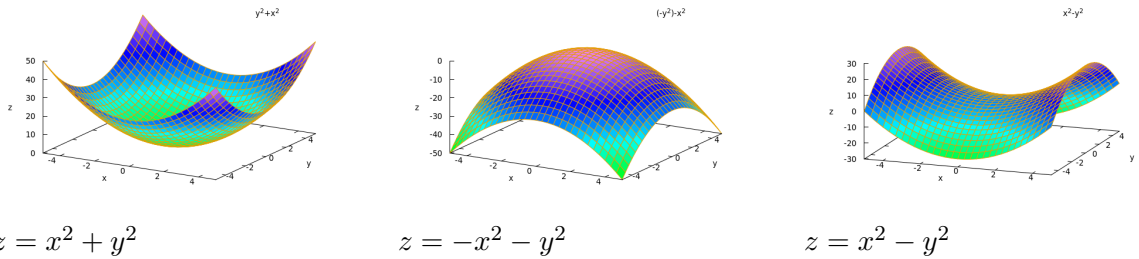
$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2.$$

**Bước 3:** Biện luận:

- Nếu  $D(x_0, y_0) > 0$  thì  $(x_0, y_0)$  là điểm cực trị địa phương của hàm  $f$ . Để phân loại điểm cực trị ta xét tiếp:
  - Nếu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  thì  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $(x_0, y_0)$ .
  - Nếu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  thì  $f$  có cực đại địa phương tại  $(x_0, y_0)$ .
- Nếu  $D(x_0, y_0) < 0$  thì điểm  $(x_0, y_0)$  không là điểm cực trị của  $f$ , và là một điểm yên của  $f$ .

**Ví dụ 1.5.5.** Xét  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Ta có  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_y(x, y) = 2y$ . Giải hệ phương trình  $2x = 0$  và  $2y = 0$  ta được điểm dừng duy nhất là  $(x, y) = (0, 0)$ .

Tính đạo hàm bậc hai, ta được  $f_{xx} = 2 > 0$ ,  $f_{xy} = f_{yx} = 0$ ,  $f_{yy} = 2$ . Tiếp theo  $D = [f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2] = 4 > 0$ . Vậy hàm có cực tiểu địa phương tại  $(0, 0)$ . Điều này ta thấy ngay từ hình vẽ đồ thị của hàm, và có thể kiểm lại được dễ dàng bằng cách khác. Tương



Hình 1.5.1:

tự với  $g(x, y) = -x^2 - y^2$  ta có  $g_x(x, y) = -2x$ ,  $g_y(x, y) = -2y$ . Điểm dừng duy nhất là  $(x, y) = (0, 0)$ . Ta có  $g_{xx} = -2 < 0$ ,  $g_{xy} = g_{yx} = 0$ ,  $g_{yy} = -2$ ,  $D = [g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2] = 4 > 0$ . Vậy hàm có cực đại địa phương tại  $(0, 0)$ .

Với  $h(x, y) = x^2 - y^2$  ta có  $h_x(x, y) = 2x$ ,  $h_y(x, y) = -2y$ . Điểm dừng duy nhất là  $(x, y) = (0, 0)$ . Ta có  $h_{xx} = 2$ ,  $h_{xy} = h_{yx} = 0$ ,  $h_{yy} = -2$ ,  $D = [h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2] = -4 < 0$ . Vậy hàm không có cực trị tại  $(0, 0)$ , đó là một điểm yên. Điều này ta thấy rõ từ hình vẽ đồ thị của hàm, Hình 1.5.1.

Hình 1.5.1 cũng minh họa phần nào nguyên nhân của tiêu chuẩn cực trị. Khi  $D(x_0, y_0) > 0$  thì hàm hoặc là lồi theo mọi hướng hoặc là lõm theo mọi hướng. Nếu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  thì

có một hướng mà hàm là lồi, do đó hàm là lồi theo mọi hướng, từ đó  $(x_0, y_0)$  là điểm cực tiểu địa phương. Tương tự khi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  thì có một hướng mà hàm là lõm, do đó hàm là lõm theo mọi hướng, từ đó  $(x_0, y_0)$  là điểm cực đại địa phương. Khi  $D(x_0, y_0) < 0$  thì hàm là lồi theo một hướng nhưng lại lõm theo một hướng khác, nên  $(x_0, y_0)$  là điểm yên.

**Ví dụ 1.5.6.** Tìm và phân loại các điểm cực trị của hàm  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

Bước 1: Tìm các điểm dừng. Tính,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x.$$

Cho những đạo hàm riêng này bằng 0,

$$x^3 - y = 0 \quad \text{và} \quad y^3 - x = 0.$$

Thế  $y = x^3$  từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai,

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).$$

Có 3 nghiệm thực:  $x = 0, 1, -1$ . Có ba điểm dừng là  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ , và  $(-1, -1)$ .

Bước 2: Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2.$$

và

$$D(x, y) = 144x^2y^2 - 16.$$

Bước 3: Vì  $D(0, 0) = -16 < 0$  nên  $(0, 0)$  là một điểm yên. Vì  $D(1, 1) = 128 > 0$  và  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 12 > 0$  nên  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $(1, 1)$ . Tương tự  $D(-1, -1) = 128 > 0$  và  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = 12 > 0$  nên  $f$  cũng có cực tiểu địa phương tại  $(-1, -1)$ .

### \* Trường hợp tổng quát và chứng minh

Cho  $f$  khả vi liên tục mọi cấp trong một quả cầu  $B(x, r)$ . Với  $h$  sao cho  $\|h\| < r$  ta đặt  $g(t) = f(x + th)$ ,  $t \in (-1, 1)$ . Giá trị của hàm  $g$  là giá trị của hàm  $f$  khi biến chỉ di chuyển dọc theo đoạn thẳng từ  $x$  tới  $h$ . Hàm  $g$  khả vi liên tục mọi cấp, và ta tính được đạo hàm của nó theo qui tắc đạo hàm hàm hợp:

$$g'(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th)h_i, \quad (1.5.1)$$

$$g'(0) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i, \quad (1.5.2)$$

$$g''(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + th)h_i h_j, \quad (1.5.3)$$

$$g''(0) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_i h_j. \quad (1.5.4)$$

Ta có thể đoán rằng dấu của  $g''(0)$  có thể có vai trò trong điều kiện đủ cho cực trị. Chẳng hạn nếu  $g''(0) > 0$  và  $g'(0) = 0$  thì theo kết quả về hàm một biến chắc chắn  $g(t) = f(x + th) \geq g(0) = f(x)$  với mọi  $t$  đủ bé (phụ thuộc vào  $h$ ).

Để trình bày chính xác ta dùng phương pháp khai triển Taylor.



**Mệnh đề 1.5.7 (Khai triển Taylor).** Cho  $f$  khả vi liên tục cấp hai trong một quả cầu  $B(x, r)$ . Với mọi  $h \in B(0, r)$  ta có

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) h_i h_j,$$

với  $\theta \in (0, 1)$  phụ thuộc vào  $h$ . Một công thức khác là

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j + \epsilon(h) \|h\|^2,$$

với  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .

*Chứng minh.* Áp dụng khai triển Taylor cho hàm một biến  $g$  tại 0 ta được

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(\theta)t^2,$$

với  $\theta$  nằm giữa 0 và  $t$ . Chú ý là ta có thể cho  $t$  thuộc một khoảng mở chứa 0 và 1 mà vẫn đảm bảo  $x + th \in B(x, r)$ . Cho  $t = 1$  ta được ngay công thức thứ nhất.

So sánh công thức thứ nhất và công thức thứ hai, ta chỉ cần chứng minh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \frac{h_i h_j}{\|h\|^2} = 0.$$

Dùng đánh giá  $|h_i h_j| \leq \frac{1}{2}(h_i^2 + h_j^2) \leq \frac{1}{2}\|h\|^2$  ta được

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \frac{h_i h_j}{\|h\|^2} \right| &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \frac{|h_i h_j|}{\|h\|^2} \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|. \end{aligned}$$

Cho  $h \rightarrow 0$  thì  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ , ta được kết quả.  $\square$

Bảng các đạo hàm bậc hai  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  xếp dưới dạng một ma trận  $n \times n$  được gọi là **ma trận Hess**, kí hiệu là

$$\text{Hess}(f, x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Bây giờ ta có thể phát biểu một điều kiện đủ cho cực trị địa phương:

**Định lý 1.5.8 (Điều kiện đủ cấp 2).** Giả sử  $f$  có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một quả cầu chứa  $x$  và  $x$  là một điểm dừng của  $f$ , tức  $\nabla f(x) = 0$ .

- (a) Nếu ma trận  $\text{Hess}(f, x)$  xác định âm, nghĩa là  $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  thì  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_j h_i < 0$ , thì  $f$  có cực đại địa phương tại  $x$ .
- (b) Nếu ma trận  $\text{Hess}(f, x)$  xác định dương, nghĩa là  $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  thì  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_j h_i > 0$ , thì  $f$  có cực tiểu địa phương tại  $x$ .
- (c) Nếu ma trận  $\text{Hess}(f, x)$  không xác định dương và cũng không xác định âm, thì  $f$  không có cực trị tại  $x$ , và  $x$  được gọi là một **điểm yên** của  $f$ .



*Chứng minh.* Áp dụng công thức Taylor, chú ý  $x$  là điểm dừng, nghĩa là tất cả các đạo hàm bậc nhất  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  đều bằng 0, ta được

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j + \epsilon(h) \|h\|^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{h_i h_j}{\|h\|^2} + \epsilon(h) \right) \|h\|^2, \end{aligned}$$

với  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .

Giả sử  $\text{Hess}(f, x)$  xác định dương. Với  $h \neq 0$ , đặt  $u = h / \|h\|$ , thì

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j$$

là một hàm liên tục theo biến  $u$  trên mặt cầu đơn vị  $S(0, 1)$ . Vì mặt cầu có tính đóng và bị chặn (compact) nên hàm này có giá trị lớn nhất  $\alpha < 0$  (xem Định lý 1.5.14). Vậy bây giờ ta có

$$f(x+h) - f(x) \leq (\alpha + \epsilon(h)) \|h\|^2.$$

Khi  $h$  đủ nhỏ thì  $\epsilon(h) < -\alpha$ , do đó  $f(x+h) < f(x)$ . Vậy  $x$  là một cực đại địa phương của  $f$ .

Trường hợp  $\text{Hess}(f, x)$  xác định âm là tương tự.

Nếu  $\text{Hess}(f, x)$  không xác định dương và cũng không xác định âm thì từ công thức  $g''(0) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j$  ở Phương trình (1.5.4) ta thấy tồn tại hướng  $h$  theo hướng đó  $g$  có cực đại ngặt tại 0, đồng thời lại tồn tại hướng  $h$  mà theo hướng đó  $g$  có cực tiểu ngặt tại 0. Vậy  $f$  không có cực trị tại  $x$ . (Điều này lý giải tên “điểm yên”, vì đồ thị của hàm phần nào trông giống một cái yên ngựa.)  $\square$

Tính xác định dương và xác định âm của ma trận thực ra không dễ kiểm tra, trừ phi chúng ta khảo sát sâu hơn về điều này (một chủ đề của môn Đại số tuyến tính nâng cao). Trong môn học này chúng ta chỉ dừng lại ở việc chỉ ra rằng trong trường hợp hai chiều,  $n = 2$ , có một cách rất thiết thực để kiểm tra điều này.

**Mệnh đề 1.5.9.** Cho ma trận

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Đặt  $D = \det H = ac - b^2$ .

(a) Nếu  $D > 0$  và  $a > 0$  thì  $H$  là xác định dương. (Chú ý nếu  $D > 0$  thì  $a$  và  $c$  cùng dấu, nên vai trò của  $a$  và  $c$  ở đây như nhau.)

(b) Nếu  $D > 0$  và  $a < 0$  thì  $H$  là xác định âm,

(c) Nếu  $D < 0$  thì  $H$  không xác định dương và không xác định âm.

Rõ ràng mệnh đề này cùng với Định lý 1.5.8 cho ta tiêu chuẩn cực trị cho hàm hai biến mà ta dùng trong mục trước.

*Chứng minh.* Giả sử  $a \neq 0$ , ta biến đổi với  $h = (h_1, h_2)$ ,

$$\Delta(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = a \left[ \left( h_1 + \frac{b}{a}h_2 \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}h_2^2 \right].$$

Nếu  $D > 0$  và  $a > 0$  thì rõ ràng  $\forall h \neq 0, \Delta(h) > 0$  (vì nếu  $h_2 = 0$  và  $(h_1 + \frac{b}{a}h_2 = 0$  thì  $h_1 = 0$ ). Tương tự, nếu  $D > 0$  và  $a < 0$  thì  $\forall h \neq 0, \Delta(h) < 0$ .

Nếu  $D < 0$ , lấy  $h = (1, 0)$  thì  $\Delta(h) = a$ , nhưng lấy  $h = (-b/a, 1)$  thì  $\Delta(h) = D/a$ , trái dấu. Vậy  $H$  không xác định dương và cũng không xác định âm.

Nếu  $a = 0$  thì  $D \leq 0$  và  $\Delta(1, 0) = 0$ , nên  $H$  không xác định dương và cũng không xác định âm.  $\square$

## 1.5.2 Cực trị có ràng buộc

Ta xét bài toán tìm cực trị của  $f(x)$  thỏa điều kiện  $g(x) = c$  trong đó  $c$  là một hằng số thực. Đây là một bài toán cực trị có ràng buộc, hay còn được gọi là cực trị có điều kiện. Ta vẫn tìm cực trị của một hàm  $f$ , tuy nhiên bây giờ miền xác định của hàm  $f$  là tập có dạng  $g^{-1}(\{c\})$ . Tập như vậy có thể không phải là một tập mở, thậm chí có phần trong bằng tập rỗng, khiến cho các phương pháp của chúng ta ở phần trước không áp dụng được, ngay khái niệm cực trị địa phương cũng không sử dụng được.

**Ví dụ 1.5.10.** Tìm cực trị của hàm  $f(x, y) = x + y$  thỏa  $x^2 + y^2 = 1$ .

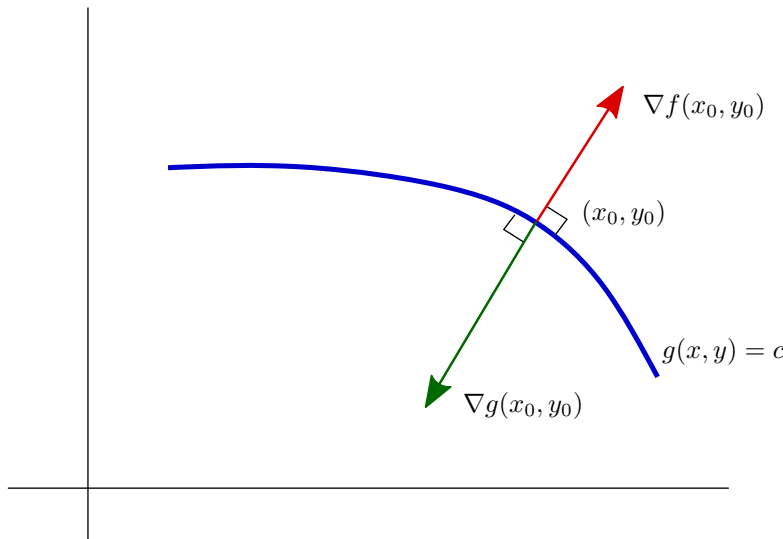
Ta có thể nhìn bài toán như là tìm cực trị của  $x + y$  trên đường tròn đơn vị. Ta chú ý rằng đường tròn đơn vị có phần trong bằng rỗng.

Ta hết ta khảo sát trường hợp hai chiều mà ta có trực quan hình học. Bài toán là

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x, y) \\ \text{thỏa } g(x, y) = c. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Như ta đã thảo luận trong Mục 1.4.3, dưới điều kiện  $g(x_0, y_0) = c$  và  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$  thì phương trình  $g(x, y) = c$  xác định một đường cong phẳng  $C$  quanh điểm  $(x_0, y_0)$ , là một **đường mức** của hàm  $g$ , và vectơ gradient của hàm ràng buộc  $g$  phải vuông góc với đường mức  $C$  này tại điểm  $(x_0, y_0)$ .

Bây giờ giả sử  $(x_0, y_0)$  là một nghiệm địa phương của Bài toán (1.5.5). Như thế hàm  $f(r(t))$  có cực trị địa phương tại  $t = 0$ , do đó đạo hàm phải bằng 0 tại  $t = 0$ , tức là  $0 = \frac{d}{dt}(f(r(t)))|_{t=0} = \nabla f(r(0)) \cdot r'(0)$ . Vậy vectơ gradient của hàm mục tiêu  $f$  cũng phải vuông góc với đường  $C$  tại điểm cực trị địa phương  $(x_0, y_0)$ .



Hình 1.5.2: Nguyên lý của phương pháp nhân tử Lagrange.

Như thế trên mặt phẳng ta có hai vectơ  $\nabla g(x_0, y_0)$  và  $\nabla f(x_0, y_0)$  cùng vuông góc với đường  $C$  tại điểm  $(x_0, y_0)$ , do đó hai vectơ này phải cùng phương, dẫn tới có một số thực  $\lambda$  sao cho  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ . Số thực này được gọi là **nhân tử Lagrange**. Lý luận trên là cơ sở cho phương pháp nhân tử Lagrange sau đây:

**Định lý 1.5.11 (Điều kiện cần cấp 1 – Phương pháp nhân tử Lagrange).** *Giả sử  $f$  và  $g$  khả vi liên tục trên tập mở  $\Omega$  trong  $\mathbb{R}^2$ . Nếu  $(x_0, y_0)$  là một nghiệm địa phương của Bài toán (1.5.5) thỏa  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ , thì phải tồn tại  $\lambda \in \mathbb{R}$  sao cho*

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0,$$

tức là

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

**Phương pháp nhân tử Lagrange**

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị địa phương của } f(x, y) \\ \text{thỏa } g(x, y) = c. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán phải thỏa hệ phương trình sau gồm 3 phương trình và 3 ẩn  $x, y, \lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = c. \end{cases}$$

**Ví dụ 1.5.12.** Tìm cực trị của hàm  $f(x, y) = x + y$  thỏa  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ta giải hệ

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2x) = 0 \\ 1 + \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = \frac{-1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Nghiệm là  $x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Vậy nếu bài toán có nghiệm thì nó phải ở các điểm  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  và  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Bây giờ ta tổng quát hóa các kết quả trên cho trường hợp hàm có số biến bất kì. Làm tương tự trường hợp  $n = 2$ , ta có thể thu được một tổng quát hóa của phương pháp nhân tử Lagrange:

**Định lý 1.5.13.** *Cho  $f$  và  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  khả vi liên tục trên một tập mở trong  $\mathbb{R}^n$ . Xét bài toán*

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x) \\ \text{thỏa } g_i(x) = c_i, 1 \leq i \leq p < n. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Nếu các điều kiện sau thỏa

(a)  $a$  là nghiệm địa phương của (1.5.6),

(b)  $\nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \dots, \nabla g_p(a)$  độc lập tuyến tính,

thì tồn tại  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  sao cho

$$\nabla f(a) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

### 1.5.3 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Trong phần này chúng ta khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, tức là tìm cực trị toàn cục.

Một tập con của không gian  $\mathbb{R}^n$  được gọi là **bị chặn** nếu nó được chứa trong một quả cầu với bán kính đủ lớn. Nói cách khác tập hợp các độ lớn của các phần tử của tập này là một tập hợp bị chặn các số thực.

Một tập đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$  còn được gọi là một **tập compact**<sup>10</sup>.

**Định lý 1.5.14.** *Một hàm liên tục trên một tập compact thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó.*

Đây là một tổng quát hóa của Định lý giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm một biến. Chứng minh của nó vượt ra khỏi phạm vi của môn học này, thường có trong các giáo trình nhập môn Giải tích.

Áp dụng định lý này, để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên một tập compact ta thực hiện các bước sau:

**Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm trên một tập compact**

**Bước 1:** Tìm các giá trị của  $f$  ở phần trong của tập  $D$ , dùng các phương pháp của cực trị không có ràng buộc.

**Bước 2:** Tìm các giá trị cực trị của  $f$  trên biên của tập  $D$ , dùng các phương pháp của cực trị có ràng buộc.

**Bước 3:** Số lớn nhất trong các giá trị ở Bước 1 và Bước 2 là giá trị lớn nhất và số nhỏ nhất trong các giá trị này là giá trị nhỏ nhất.

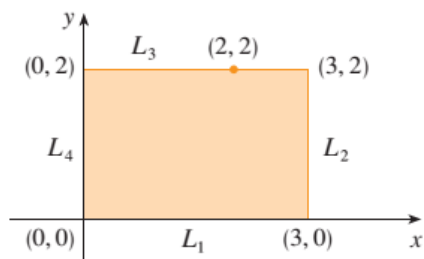
**Ví dụ 1.5.15.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$  trong hình chữ nhật  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ .

Vì  $f$  là một đa thức nên nó liên tục trên hình chữ nhật đóng và bị chặn  $D$  nên  $f$  có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Ta thực hiện Bước 1, xét phần trong của hình chữ nhật  $D$ . Giải hệ

$$f_x(x, y) = 2x - 2y = 0, \quad f_y(x, y) = -2x + 2 = 0,$$

ta có được điểm dừng duy nhất là  $(1, 1)$ , và giá trị của  $f$  ở đó là  $f(1, 1) = 1$ .



Hình 1.5.3:

Trong Bước 2 chúng ta nhìn các giá trị của  $f$  trên biên của  $D$ , bao gồm 4 đoạn thẳng  $L_1, L_2, L_3, L_4$  được biểu diễn trong Hình 1.5.3. Trên  $L_1$  chúng ta có  $y = 0$  và

$$f(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

<sup>10</sup>từ compact trong tiếng Anh có nghĩa là gọn, chặt, ...

Đây là một hàm tăng của  $x$ , do đó giá trị nhỏ nhất của nó là  $f(0, 0) = 0$  và giá trị lớn nhất của nó là  $f(3, 0) = 9$ . Trên  $L_2$  ta có  $x = 3$  và

$$f(3, y) = 9 - 4y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Đây là một hàm giảm của  $y$ , do đó giá trị cực đại của nó là  $f(3, 0) = 9$  và giá trị cực tiểu của nó là  $f(3, 2) = 1$ . Trên  $L_3$  chúng ta có  $y = 2$  và

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Bằng các phương pháp của vi phân hàm một biến, hay đơn giản bằng cách quan sát rằng  $f(x, 2) = (x - 2)^2$ , chúng ta thấy rằng giá trị cực tiểu của hàm số này là  $f(2, 2) = 0$  và giá trị cực đại là  $f(0, 2) = 4$ . Cuối cùng, trên  $L_4$  chúng ta có  $x = 0$  và

$$f(0, y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 2$$

với giá trị cực đại  $f(0, 2) = 4$  và giá trị cực tiểu  $f(0, 0) = 0$ . Do đó, trên biên, giá trị nhỏ nhất của  $f$  là 0 và giá trị lớn nhất là 9.

Trong Bước 3 chúng ta so sánh các giá trị này với giá trị  $f(1, 1) = 1$  tại điểm dừng và kết luận rằng giá trị lớn nhất của  $f$  trên  $D$  là  $f(3, 0) = 9$  và giá trị nhỏ nhất là  $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$ .

**Ví dụ 1.5.16.** Tiếp tục Ví dụ 1.5.12, hàm  $f$  chắc chắn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đường tròn đơn vị  $x^2 + y^2 = 1$ . Phương pháp nhân tử Lagrange đã khẳng định hai giá trị đó chỉ có thể đạt được ở hai điểm  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  và  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ . Để xác định ta chỉ cần tính giá trị  $f$  tại hai điểm này. Vì  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$  còn  $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$  nên hai giá trị này lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm.

## Bài tập

**1.5.1.** Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số:

- (a)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$ .
- (b)  $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$ .
- (c)  $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$ .
- (d)  $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$ .
- (e)  $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ .
- (f)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$ .
- (g)  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3x(1 - y) + y^3 + 3y$ .
- (h)  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3x - y^2$ .
- (i)  $f(x, y) = 1 - x^2 + 4xy - 4y^2$ .
- (j)  $f(x, y) = 3x^2 - x^3 - 2y^2 + y^4$ .

**1.5.2.** Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $f$  theo các ràng buộc được cho:

- (a)  $f(x, y) = x^2y$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (b)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ .
- (c)  $f(x, y) = x^2 - 3y + y^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
- (d)  $f(x, y) = xy - x - 2y$  trên tam giác  $D$  với các đỉnh  $(3, 0)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(0, 0)$ .

- (e)  $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ ;  $D$  là miền tam giác đóng trên mặt phẳng  $xy$  với các đỉnh  $(0, 0)$ ,  $(0, 6)$  và  $(6, 0)$ .
- (f)  $f(x, y) = x^2 + xy^2 - 2x + 3$  dưới ràng buộc  $x^2 + y^2 \leq 10$ .
- (g)  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ ;  $D$  là đĩa  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (h)  $f(x, y) = e^{-xy}$ ;  $x^2 + 4y^2 = 1$ .
- (i)  $f(x, y) = x^2y$  dưới ràng buộc  $x^2 + 2y^2 = 6$ .
- (j)  $f(x, y) = xy$  dưới ràng buộc  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .
- (k)  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .
- (l)  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ ;  $x + y + z = 1$ ,  $x - y + 2z = 2$ .

**1.5.3.** Tìm các điểm trên mặt  $xy^2z^3 = 2$  mà gần nhất với gốc tọa độ.

**1.5.4.** Tìm điểm trên đồ thị  $z = x^2 + y^2$  mà gần nhất tới điểm  $(0, 0, 2)$ .

**1.5.5.** Tìm điểm trên mặt phẳng  $2x + y - z = 3$  gần nhất tới gốc tọa độ.

**1.5.6.** Nhiệt độ trên mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  được mô hình hóa bằng hàm  $T(x, y, z) = 50 - 100(x + 2y + 3z)^2$ . Tìm nơi lạnh nhất trên mặt cầu.

**1.5.7.** Tìm điểm trên mặt bầu dục  $g(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$  mà tại đó nhiệt độ  $f(x, y, z) = 750 + 5x - 2y + 9z$  là cao nhất.

**1.5.8.** Một công ty sản xuất hai loại điện thoại di động. Gọi  $x$  là số điện thoại loại 1 (đơn vị nghìn cái), và  $y$  là số điện thoại loại 2 (đơn vị nghìn cái). Doanh thu được mô hình hóa bởi hàm  $R(x, y) = 3x + 2y$  (đơn vị tỉ đồng). Chi phí được mô hình hóa bằng hàm  $C(x, y) = 3x^2 - 3xy + 4y^2$  (đơn vị tỉ đồng).

- (a) Hãy tính  $C_x(3, 4)$  và giải thích ý nghĩa của kết quả.
- (b) Hãy tính doanh thu  $R(x, y)$  nếu mỗi điện thoại loại 1 có giá bán 3 triệu đồng và mỗi điện thoại loại 2 có giá bán 2 triệu đồng.
- (c) Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để được lợi nhuận tối đa?

**1.5.9.** Một công ty sản xuất hai loại máy thu hình: loại CRT và loại LCD. Gọi  $x$  là số máy thu hình loại CRT (đơn vị nghìn cái) và  $y$  là số máy thu hình loại LCD (đơn vị nghìn cái). Doanh thu được cho bởi hàm  $R(x, y) = x + 4y$  (đơn vị triệu đồng). Chi phí được mô hình hóa bằng hàm

$$C(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 7x - 12y + 9$$

Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để được lợi nhuận tối đa?

**1.5.10.** Một công ty sản xuất hai mẫu xe gắn máy. Gọi  $x$  là số xe theo mẫu thứ nhất,  $y$  là số xe theo mẫu thứ hai (đơn vị là nghìn chiếc). Chi phí sản xuất được cho bởi hàm  $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$  (đơn vị triệu đồng). Giá bán mỗi xe thuộc mẫu thứ nhất là 34 triệu đồng và giá bán mỗi xe thuộc mẫu thứ hai là 52 triệu đồng.

- (a) Tìm công thức cho doanh thu và lợi nhuận.
- (b) Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để có lợi nhuận lớn nhất?

**1.5.11.** Giả sử năng suất cây trồng  $S$  phụ thuộc vào hàm lượng chất Nitơ  $N$  và Photpho  $P$  trong đất theo công thức  $S = NPe^{-N-P}$ . Hãy tìm hàm lượng tối ưu cho năng suất.

**1.5.12.** Hãy dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh rằng trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. Cụ thể hơn, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm  $f(x, y) = xy$  dưới ràng buộc  $g(x, y) = x + y = c =$  hằng số và  $x \geq 0, y \geq 0$ .

**1.5.13.** \* Hãy dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh bất đẳng thức Cauchy: Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm thì  $\sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ . Cụ thể hơn, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \cdots x_n$  dưới ràng buộc  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c =$  hằng số và  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

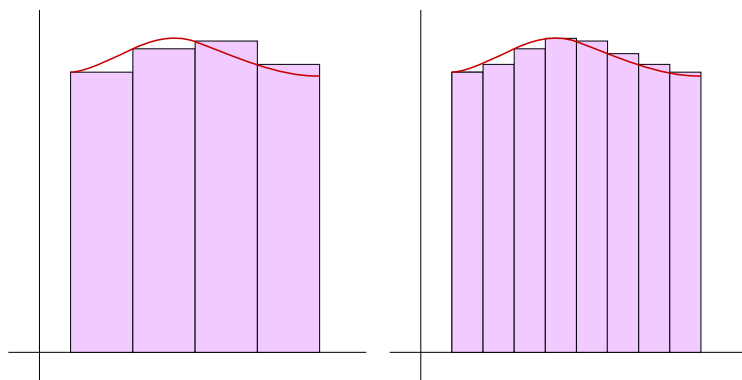
## Chương 2

# Tích phân của hàm nhiều biến

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu tích phân Riemann trong không gian nhiều chiều. Tích phân trên không gian nhiều chiều là sự phát triển tương tự của tích phân một chiều. Do đó các ý chính đã quen thuộc và không khó, để dễ theo dõi hơn người đọc có thể xem lại phần tích phân một chiều trong [Bmgt1]. Tuy phần trình bày sau đây cho số chiều bất kì nhưng người đọc nếu muốn có thể chỉ hình dung các trường hợp 1, 2, 3 chiều.

## 2.1 Định nghĩa và tính chất của tích phân bội

Cho  $I$  là một hình hộp, và  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta muốn tính tổng giá trị của hàm  $f$  trên hình hộp  $I$ . Ta chia nhỏ hình hộp  $I$  bằng những hình hộp con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi hình hộp nhỏ hơn đó, giá trị của hàm  $f$  sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ  $f$  bằng một hàm hằng. Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của  $f$ .



Sau đây là một cách giải thích hình học. Giả sử thêm hàm  $f$  là không âm, ta muốn tìm “thể tích” của khối bên dưới đồ thị của hàm  $f$  bên trên hình hộp  $I$ . Ta sẽ xấp xỉ khối đó bằng những hình hộp với đáy là một hình hộp con của  $I$  và chiều cao là một giá trị của  $f$  trong hình hộp con đó. Ta hy vọng rằng khi số hình hộp tăng lên thì ta sẽ gần hơn giá trị đúng của thể tích.

### 2.1.1 Tích phân trên hình hộp

Dưới đây ta bắt đầu làm chính xác hóa các ý tưởng ở trên.

Để khởi đầu chúng ta hãy xét trường hợp một chiều. Chiều dài của đoạn thẳng  $[a, b]$  bằng bao nhiêu? Ta muốn khái niệm chiều dài toán học mô phỏng khái niệm chiều dài vật lý thường dùng trong đời sống từ xưa. Như vậy trước hết chiều dài của một đoạn thẳng  $[a, b]$  là một số thực không âm. Vì chiều dài vật lý không phụ thuộc vào cách đặt hệ tọa độ, nếu ta tịnh tiến đoạn thẳng thì chiều dài không thay đổi, vậy nếu kí hiệu chiều dài của đoạn  $[a, b]$  là  $|[a, b]|$  thì cần có  $|[a+c, b+c]| = |[a, b]|$ . Nếu  $n$  là số nguyên dương, thì vì đoạn thẳng  $[0, na]$  gồm  $n$  đoạn thẳng  $[0, a], [a, 2a], [2a, 3a], \dots, [(n-1)a, na]$ , nên ta muốn có tính chất “cộng tính” thể hiện qua  $|[0, na]| = n|[0, a]|$ . Điều này dẫn tới  $|[0, a]| = n|[0, \frac{1}{n}a]|$ , hay  $|[0, \frac{1}{n}a]| = \frac{1}{n}[0, a]|$ . Do đó với  $m, n$  là số nguyên dương thì  $|[0, \frac{m}{n}a]| = \frac{m}{n}[0, a]|$ . Trong trường hợp riêng, ta có  $|[0, \frac{m}{n}]| = \frac{m}{n}[0, 1]|$ . Vì mọi số thực  $a$  là giới hạn của một dãy các số hữu tỉ, nên nếu như ta muốn chiều dài có “tính liên tục” thì ta cần có  $|[0, a]| = a|[0, 1]|$ , do đó phải có  $|[a, b]| = |[0, b-a]| = (b-a)[0, 1]|$ . Để chuẩn hóa ta thường lấy  $[0, 1]| = 1$ , và như thế  $|[a, b]| = (b-a)$ .

Như vậy để là chiều dài có những tính chất như thường dùng thì nó buộc phải được định nghĩa một cách duy nhất sai khác cách chọn chiều dài đơn vị, giống như việc chọn đơn vị đo trong vật lý.

Lý luận tương tự cho số chiều cao hơn, ta có thể đưa ra định nghĩa sau:

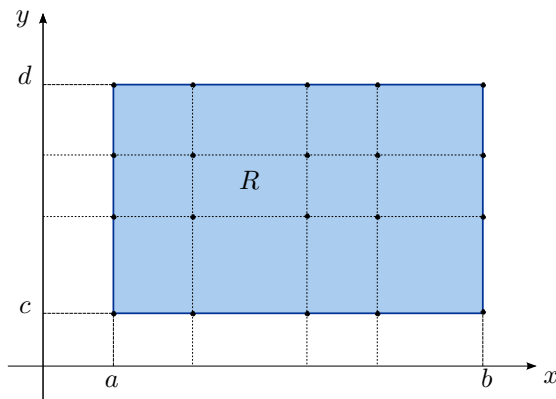
**Định nghĩa 2.1.1.** Ta định nghĩa một **hình hộp  $n$ -chiều** trong  $\mathbb{R}^n$  là một tập con của  $\mathbb{R}^n$  có dạng  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  với  $a_i < b_i$  với mọi  $1 \leq i \leq n$ , tức là tích của  $n$  đoạn thẳng. **Thể tích  $n$ -chiều của hình hộp**  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  được định nghĩa là số thực  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$ .

Ta thường dùng kí hiệu  $|I|$  để chỉ thể tích của  $I$ . Khi số chiều  $n = 1$  ta thường thay từ thể tích bằng từ **chiều dài**. Khi  $n = 2$  ta thường dùng từ **diện tích**.

Đối với khái niệm tổng, lý luận tương tự như đối với khái niệm thể tích, ta có thể đi đến kết luận là tổng của hàm hằng 1 trên hình hộp  $I$  là  $|I|$ .

Bây giờ ta bắt đầu quá trình chia nhỏ miền xác định. Một **phép chia** (hay phân hoạch) của một khoảng  $[a, b]$  là một tập con hữu hạn của khoảng  $[a, b]$  mà chứa cả  $a$  và  $b$ . Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là  $x_0, x_1, \dots, x_m$  với  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ . Mỗi khoảng  $[x_{i-1}, x_i]$  là một **khoảng con** của khoảng  $[a, b]$  tương ứng với phép chia.

Một phép chia của hình hộp  $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  là một tích Descartes của các phép chia của các khoảng  $[a_i, b_i]$ . Cụ thể nếu mỗi  $P_i$  là một phép chia của khoảng  $[a_i, b_i]$  thì  $P = \prod_{i=1}^n P_i$  là một phép chia của hình hộp  $I$ . Xem ví dụ ở Hình 2.1.1.



Hình 2.1.1: Một phép chia của hình chữ nhật  $[a, b] \times [c, d]$  gồm những điểm mà các tọa độ thứ nhất tạo thành một phép chia của  $[a, b]$  và các tọa độ thứ hai tạo thành một phép chia của  $[c, d]$ .

Một **hình hộp con** ứng với một phép chia  $P$  của một hình hộp  $I$  là một tích các

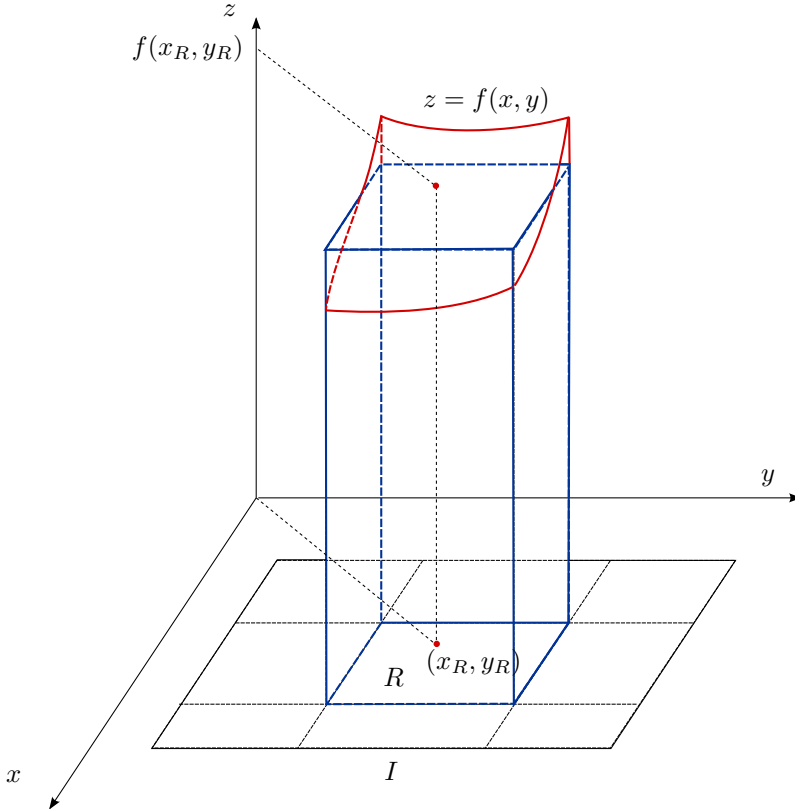


khoảng con của các cạnh của hình hộp  $I$ . Cụ thể một hình hộp con của hình hộp  $I$  có dạng  $\prod_{i=1}^n T_i$  trong đó  $T_i$  là một khoảng con của khoảng  $[a_i, b_i]$  ứng với phép chia  $P_i$ .

Bây giờ là việc xấp xỉ. Cho  $I$  là một hình hộp, và  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Với một phép chia  $P$  của  $I$ , thành lập **tổng Riemann**<sup>1</sup>

$$\sum_R f(x_R) |R|$$

ở đây tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con  $R$  của  $P$ , và  $x_R$  là một điểm bất kì thuộc  $R$ , xem Hình 2.1.2. Đây là một xấp xỉ của “tổng giá trị” của  $f$  trên  $I$ . Nếu  $f \geq 0$  thì đây là một xấp xỉ của “thể tích” của khối bên dưới đồ thị của  $f$  bên trên  $I$ .



Hình 2.1.2: Xấp xỉ Riemann.

Cuối cùng là quá trình giới hạn. “Giới hạn” của tổng Riemann khi phép chia “mịn hơn” sẽ là tích phân của hàm  $f$  trên  $I$ , kí hiệu là  $\int_I f$ .

Vậy  $\int_I f$  đại diện cho khái niệm “tổng giá trị” của hàm  $f$  trên  $I$ . Nếu  $f \geq 0$  thì  $\int_I f$  đại diện cho khái niệm “thể tích” của khối bên dưới đồ thị của  $f$  bên trên  $I$ .<sup>2</sup>

Để làm chính xác ý tưởng trên ta cần làm rõ quá trình qua giới hạn. Chúng ta đưa ra một cách định nghĩa tích phân Riemann như sau.

**Định nghĩa 2.1.2.** Ta nói  $f$  là **khả tích** (có tích phân) trên  $I$  nếu có một số thực, gọi là **tích phân** của  $f$  trên  $I$ , kí hiệu là  $\int_I f$ , có tính chất là với mọi  $\epsilon > 0$  có  $\delta > 0$  sao cho nếu tất cả các cạnh của các hình chữ nhật con của một phép chia đều có chiều dài nhỏ hơn  $\delta$  thì với mọi cách chọn điểm đại diện  $x_R$  thuộc hình hộp con  $R$  ta có  $\left| \sum_R f(x_R) |R| - \int_I f \right| < \epsilon$ .

<sup>1</sup>Bernard Riemann là người đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854, mặc dù tích phân đã được dùng trước đó.

<sup>2</sup>Kí hiệu  $\int$  do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính vi tích phân vào thế kỉ 17. Nó đại diện cho chữ cái “s” trong chữ Latin “summa” (tổng).

Như thế tổng Riemann gần tùy ý tới giá trị tích phân miễn là phép chia đủ mịn. Người đọc quan tâm chi tiết hơn có thể xem ở các giáo trình nâng cao hơn, chẳng hạn [Vugt3].

**Ví dụ 2.1.3.** Nếu  $f = c$  là hàm hằng có giá trị bằng hằng số thực  $c$  thì ta thấy ngay từ định nghĩa là mọi tổng Riemann đều bằng  $c|I|$ , nên  $\int_I c = c|I|$ . Đặc biệt  $\int_I 1 = |I|$ .

Khi số chiều  $n = 1$  ta có tích phân của hàm một biến quen thuộc từ trung học và đã được khảo sát trong môn Vi tích phân hàm một biến, với  $\int_{[a,b]} f$  thường được viết là  $\int_a^b f(x) dx$ . Như vậy **ta thừa hưởng tất cả các kết quả đã có trong Vi tích phân hàm một biến**, chẳng hạn như công thức Newton–Leibniz để tính tích phân.

Khi  $n = 2$  ta có **tích phân bội hai**, thường được viết là  $\iint_I f(x, y) dA$  hay  $\iint_I f(x, y) dxdy$ . Khi  $n = 3$  ta có **tích phân bội ba**, thường được viết là  $\iiint_I f(x, y, z) dV$  hay  $\iiint_I f(x, y, z) dxdydz$ .

**Ghi chú 2.1.4.** Hiện giờ  $dx, dxdy, dxdydz, dA, dV$  chỉ là kí hiệu để chỉ loại tích phân, không có ý nghĩa độc lập.

## 2.1.2 Tích phân trên tập tổng quát

Để ngắn gọn hơn ta thường dùng từ **miền** để chỉ một tập con của  $\mathbb{R}^n$ . Chúng ta **chỉ xét những miền bị chặn**. Nhớ lại rằng trong tích phân hàm một biến để xét tích phân trên khoảng không bị chặn ta đã phải dùng tới giới hạn của tích phân và xây dựng khái niệm tích phân suy rộng, điều mà ta không làm trong môn học này.

Cho  $D$  là một miền bị chặn, và cho  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Vì  $D$  bị chặn nên có hình hộp  $I$  chứa  $D$ . Mở rộng hàm  $f$  lên hình hộp  $I$  thành hàm  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in I \setminus D. \end{cases}$$

**Định nghĩa 2.1.5.** Ta nói  $f$  là **khả tích** trên  $D$  nếu  $F$  khả tích trên  $I$ , và khi đó tích phân của  $f$  trên  $D$  được định nghĩa là tích phân của  $F$  trên  $I$ :

$$\int_D f = \int_I F.$$

Để tích phân của  $f$  trên  $D$  được định nghĩa thì  $F$  phải bị chặn trên  $I$ , do đó  $f$  phải bị chặn trên  $D$ .

Tích phân  $\int_D f$  không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp  $I$ . Điều này dễ đoán, và người ta có thể kiểm tra chặt chẽ được ([Vugt3]).

Chúng ta thấy khi  $D$  là một hình hộp thì định nghĩa tích phân này trùng với định nghĩa đã có.

## 2.1.3 Thể tích

Ta định nghĩa thể tích thông qua tích phân:

**Định nghĩa 2.1.6.** Cho  $D$  là một tập con bị chặn của  $\mathbb{R}^n$ . **Thể tích**  $n$ -chiều của  $D$  được định nghĩa là tích phân của hàm 1 trên  $D$ :

$$|D| = \int_D 1.$$

Nếu  $D$  là hình hộp thì định nghĩa này trùng với định nghĩa của hình hộp đã có.

Ta thường thay từ thể tích bằng từ chiều dài khi  $n = 1$  và bằng từ diện tích khi  $n = 2$ .

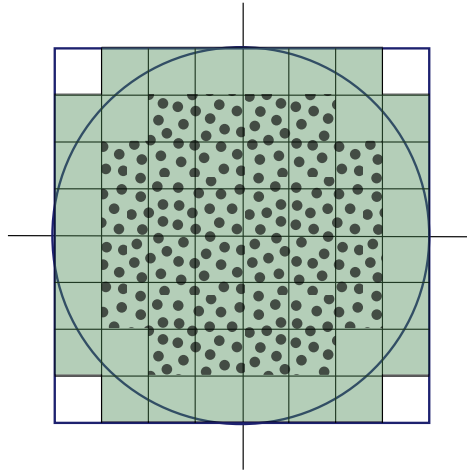
Có thể giải thích định nghĩa thể tích ở trên như sau. Đặt miền bị chặn  $D$  vào trong một hình hộp  $I$ . Xét hàm có giá trị bằng 1 trên  $D$  và bằng 0 ngoài  $D$ . Hàm này thường được gọi là **hàm đặc trưng** của  $D$ , kí hiệu là  $\chi_D$ <sup>3</sup>:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa nói rằng

$$|D| = \int_I \chi_D.$$

Xét một phép chia của  $I$ . Tùy cách chọn điểm đại diện trong mỗi hình chữ nhật con mà mỗi tổng Riemann của hàm đặc trưng tương ứng một xấp xỉ của thể tích của  $D$  bởi tổng thể tích của một số hình chữ nhật con của  $I$ . Tập  $D$  có thể tích khi và chỉ khi các xấp xỉ này gần tùy ý một số thực được gọi là thể tích của  $D$ . Xem minh họa ở Hình 2.1.3.



Hình 2.1.3: Các xấp xỉ dư và xấp xỉ thiếu diện tích của một hình tròn bằng diện tích của các hình chữ nhật.

Ý niệm thể tích đã có từ hàng nghìn năm trước nhưng ta nên chú ý đây có thể là lần đầu tiên ta định nghĩa thể tích theo chuẩn mực chính xác của toán học hiện đại.

### \* Sự có tích phân và sự có thể tích

Qua ý của tích phân ta thấy việc xấp xỉ dựa trên một giả thiết: nếu biến thay đổi ít thì giá trị của hàm thay đổi ít. Như vậy sự khả tích phụ thuộc chặt chẽ vào sự liên tục.

Mặt khác không nhất thiết phải liên tục thì mới khả tích. Sau đây là một ví dụ một hàm không liên tục nhưng khả tích.

**Ví dụ 2.1.7.** Cho  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với phép chia bất kì của  $[0, 1]$  sao cho chiều dài của các khoảng con nhỏ hơn  $\frac{\epsilon}{2}$  thì tổng Riemann nhỏ hơn  $\epsilon$ . Vì thế hàm  $f$  khả tích. Chú ý rằng  $f$  không liên tục tại  $\frac{1}{2}$ .

<sup>3</sup> $\chi$  là một chữ cái Hy Lạp, có thể đọc là “khi”

Để nói rõ không liên tục tới mức độ nào thì khả tích ta đưa ra một số khái niệm sau. Một tập con của  $\mathbb{R}^n$  là có **thể tích  $n$ -chiều không** nếu ta có thể phủ tập đó bằng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì. Có thể hiểu sơ lược **tập có độ đo không thì “không đáng kể đối với tích phân”**.

**Ví dụ 2.1.8.** (a) Tập rỗng  $\emptyset$  có thể tích  $n$ -chiều không.

(b) Tập hợp gồm một điểm trong  $\mathbb{R}^n$  có thể tích  $n$ -chiều không.

(c) Một đoạn thẳng trong  $\mathbb{R}^2$  có diện tích không.

(d) Hội của hai tập có thể tích không là một tập có thể tích không.

**Định lý 2.1.9.** Cho  $D$  là tập con có thể tích của  $\mathbb{R}^n$ . Khi đó nếu  $f$  bị chặn và liên tục trên  $D$  trừ một tập có thể tích không thì  $f$  khả tích trên  $D$ .

Chứng minh khó vượt ngoài phạm vi môn học này ([Vugt3]).

**Ví dụ 2.1.10.** Vì hình chữ nhật có thể tích nên hàm liên tục trên hình chữ nhật thì khả tích.

Về sự có thể tích, vì tập điểm không liên tục của hàm đặc trưng của một tập chính là biên của tập đó nên ta có:

**Hệ quả 2.1.11.** Một tập con bị chặn của  $\mathbb{R}^n$  có thể tích  $n$ -chiều khi và chỉ khi biên của nó có thể tích  $n$ -chiều không.

Ta có một miêu tả tiện dùng cho các tập không đáng kể:

**Mệnh đề 2.1.12.** Đồ thị của một hàm khả tích trên một tập con bị chặn của  $\mathbb{R}^n$  có thể tích không trong  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Ví dụ 2.1.13.** Đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng có diện tích không trong  $\mathbb{R}^2$ . Vậy một đoạn thẳng, một đoạn parabola, một đường tròn thì có diện tích không.

**Ví dụ 2.1.14 (hình tròn có diện tích).** Xét hình tròn cho bởi  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Biên của hình tròn này là đường tròn  $x^2 + y^2 = R^2$ . Đường tròn này là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới. Nửa đường tròn trên là đồ thị của hàm  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$ . Theo Mệnh đề 2.1.12, tập này có diện tích không. Tương tự nửa đường tròn dưới có diện tích không. Vậy đường tròn có diện tích không, do đó theo Hệ quả 2.1.11 ta kết luận hình tròn có diện tích.

**Ví dụ 2.1.15.** Tương tự, một hình tam giác thì có diện tích vì biên của nó là một hội của hữu hạn những đoạn thẳng, là những tập có diện tích không.

**Ví dụ 2.1.16 (quả cầu có thể tích).** Xét quả cầu cho bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Nửa mặt cầu trên là đồ thị của hàm  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  với  $(x, y)$  thuộc về hình tròn  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Vì hình tròn có diện tích và hàm trên liên tục, nên theo Định lý 2.1.9 hàm trên khả tích, và theo Mệnh đề 2.1.12 thì đồ thị của nó có thể tích không trong  $\mathbb{R}^3$ . Tương tự nửa mặt cầu dưới cũng có thể tích không, do đó mặt cầu có thể tích không, và do Hệ quả 2.1.11 nên quả cầu có thể tích.

Các ví dụ trên nhằm minh họa rằng chúng ta đã có thể thảo luận các đối tượng tích phân và thể tích một cách chặt chẽ, thống nhất. Tuy nhiên các vấn đề này không phải là trọng tâm của giáo trình này, nên ta sẽ không bàn thêm nữa.

### 2.1.4 Tính chất của tích phân

Ta có những tính chất cơ bản của tích phân, tương tự ở trường hợp hàm một biến:

**Mệnh đề 2.1.17.** Nếu  $f$  và  $g$  khả tích trên  $D$  thì:

- (a)  $f + g$  khả tích và  $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$ .
- (b) Với mọi số thực  $c$  thì  $cf$  khả tích và  $\int_D cf = c \int_D f$ .
- (c) Nếu  $f \leq g$  thì  $\int_D f \leq \int_D g$ .

Tuy chúng ta không chứng minh chặt chẽ các tính chất này nhưng không khó để giải thích chúng bằng cách dùng sự xấp xỉ bởi tổng Riemann. Chẳng hạn nếu  $f \leq g$  thì một xấp xỉ Riemann của  $f$  phải nhỏ hơn hay bằng xấp xỉ Riemann của  $g$  với cùng cách chia và cùng cách chọn điểm đại diện, do đó tích phân của  $f$  nhỏ hơn hay bằng tích phân của  $g$ . Người đọc nên thử đưa ra lý luận cho các tính chất còn lại.

Kết quả sau nói rằng **giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân**.

**Mệnh đề 2.1.18.** Cho  $D$  là tập con bị chặn của  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  và  $g$  bị chặn trên  $D$ , và  $f(x) = g(x)$  trừ ra một tập có thể tích không. Khi đó  $f$  khả tích khi và chỉ khi  $g$  khả tích, và khi đó  $\int_D f = \int_D g$ .

Một hệ quả nữa là thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng tới tích phân.

**Hệ quả 2.1.19.** Cho  $D_1$  và  $D_2$  là hai tập con bị chặn của  $\mathbb{R}^n$ . Giả sử  $D_1 \cap D_2$  có thể tích không. Nếu  $f$  khả tích trên  $D_1$  và trên  $D_2$  thì  $f$  khả tích trên  $D_1 \cup D_2$ , và

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Kết quả này cho phép ta **tính tích phân trên một miền bằng cách chia miền đó thành những miền đơn giản hơn**. Đây là dạng tổng quát của công thức quen thuộc cho hàm một biến:  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ .

Trong mệnh đề trên lấy  $f = 1$  ta có kết quả: Nếu  $D_1$  và  $D_2$  có thể tích và  $D_1 \cap D_2$  có thể tích không thì  $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$ . Đây chính là tính chất “cộng tính” của thể tích. Ứng dụng, khi tính diện tích một hình ta vẫn thường chia hình đó thành những hình đơn giản hơn bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong, rồi cộng các diện tích lại.

## Bài tập

**2.1.1.** Một hồ nước hình chữ nhật kích thước  $4\text{m} \times 8\text{m}$  có độ sâu không đều. Người ta đo được chiều sâu tại một số điểm trên hồ như trong bảng sau. Ví dụ trong bảng này độ sâu tại điểm cách bờ trái 5m và bờ trên 1m là 4,6m. Hãy ước lượng lượng nước trong hồ.

vị trí	1	3	5	7
1	3,1	4,5	4,6	4,0
3	3,7	4,1	4,5	4,4

**2.1.2.** Hãy cho một ví dụ minh họa rằng xấp xỉ Riemann ứng với một phép chia mịn hơn không nhất thiết tốt hơn.

**2.1.3.** Tại sao khoảng  $(a, b)$  có chiều dài bằng  $(b - a)$ ?

**2.1.4.** Tại sao miền phẳng bên dưới đồ thị  $y = 1 - x^2$ , bên trên đoạn  $-1 \leq x \leq 1$  có diện tích?

**2.1.5.** Tại sao một khối tứ diện thì có thể tích?

**2.1.6.** Các hàm sau có khả tích không? Nếu hàm khả tích thì tích phân của nó bằng bao nhiêu?

$$(a) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, y = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 5, & (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \neq x, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y = x. \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \neq x^2, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y = x^2. \end{cases}$$

$$(f) f(x, y) = 4, 0 < x < 1, 0 \leq y < 2.$$

$$(g) f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 3, & 1 < x \leq 2, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

**2.1.7.** Hãy cho một ước lượng cho giá trị của tích phân (nghĩa là cho biết tích phân có thể có giá trị từ đâu tới đâu)

$$\iint_{[0,1] \times [1,2]} e^{x^2 y^3} dx dy.$$

**2.1.8.** Điều sau đây là đúng hay sai, giải thích:

$$\iint_{[0,1] \times [1,4]} (x^2 + \sqrt{y}) \sin(xy^2) dA = 10.$$

**2.1.9.** Giả sử  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  có thể tích. Cho  $c \in \mathbb{R}$ . Giải thích vì sao  $\int_A c = c|A|$ .

**2.1.10.** Giả sử  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  và  $B$  có thể tích. Giải thích vì sao  $|A| \leq |B|$ .

**2.1.11.** Giả sử  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  khả tích trên  $A$  và  $B$ , và  $f \geq 0$ . Giải thích vì sao  $\int_A f \leq \int_B f$ .

**2.1.12.** Giải thích vì sao nếu  $f$  khả tích và  $|f|$  khả tích thì  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$ .

**2.1.13.** \* Tìm tập  $D \subset \mathbb{R}^2$  sao cho tích phân

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2) dA$$

đạt giá trị lớn nhất.

## 2.2 Công thức Fubini

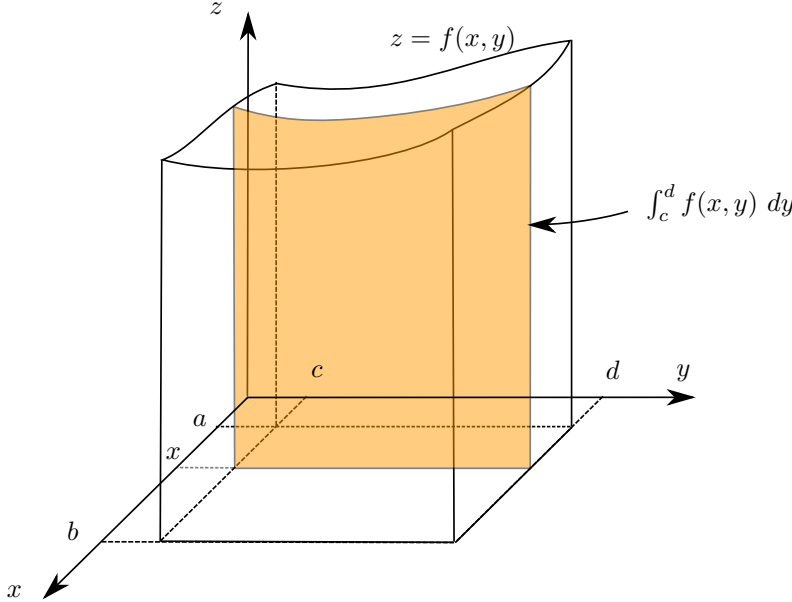
Công thức Fubini trong không gian hai chiều có dạng:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Một tích phân của tích phân được gọi là một **tích phân lặp** (iterated integral). Công thức Fubini đưa bài toán tính tích phân bội về bài toán tính tích phân của hàm một biến.

Về mặt số lượng công thức Fubini nói rằng tổng giá trị của hàm trên hình chữ nhật bằng tổng của các tổng giá trị trên các đoạn cắt song song.

Ta có thể giải thích bằng hình học công thức trên như sau. Giả sử  $f > 0$ . Khi đó  $\int_{[a,b] \times [c,d]} f$  là “thể tích” của khối bên dưới mặt  $z = f(x, y)$  bên trên hình chữ nhật  $[a, b] \times [c, d]$ . Khi đó  $\int_c^d f(x_0, y) dy$  là “diện tích” của mặt cắt (tiết diện) của khối bởi mặt phẳng  $x = x_0$ . Vậy công thức Fubini nói rằng **thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song**.



Có thể giải thích công thức này bằng cách xấp xỉ thể tích của khối như sau. Chia khoảng  $[a, b]$  thành những khoảng con. Ứng với những khoảng con này, khối được cắt thành những mảnh bởi những mặt cắt song song. Vì chiều dài mỗi khoảng con là nhỏ, ta có thể xấp xỉ thể tích của mỗi mảnh bởi diện tích một mặt cắt nhân với chiều dài của khoảng con.

Chi tiết hơn, ta xấp xỉ theo tổng Riemann: Giả sử  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  là một phép chia của khoảng  $[a, b]$  và  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  là một phép chia của khoảng  $[c, d]$ . Với  $x_i^*$  là điểm đại diện bất kì thuộc khoảng con  $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$  và  $y_j^*$  là điểm bất kì thuộc  $\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j]$  thì

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx &\approx \sum_{i=1}^m \left( \int_c^d f(x_i^*, y) dy \right) |\Delta x_i| \\ &\approx \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) |\Delta y_j| \right) |\Delta x_i| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} f(x_i^*, y_j^*) |\Delta x_i| |\Delta y_j| \\ &\approx \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Ta phát biểu công thức chính xác dưới đây ([Vugt3]):

**Định lý 2.2.1 (công thức Fubini <sup>4</sup>).** Cho  $A$  là một hình hộp trong  $\mathbb{R}^m$  và  $B$  là một hình hộp trong  $\mathbb{R}^n$ . Cho  $f$  khả tích trên hình hộp  $A \times B$  trong  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Giả sử với mỗi  $x \in A$

<sup>4</sup>Guido Fubini chứng minh một dạng tổng quát của công thức vào đầu thế kỉ 20, nhưng những kết quả dạng này đã được biết trước đó khá lâu.

tích phân  $\int_B f(x, y) dy$  tồn tại. Khi đó

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

**Ví dụ 2.2.2.** Tính tích phân  $\iint_{[0,1] \times [2,3]} x dx dy$ .

Vì hàm  $(x, y) \mapsto x$  là liên tục trên hình chữ nhật  $[0, 1] \times [2, 4]$  nên tích phân trên tồn tại, công thức Fubini áp dụng được, cho:

$$\iint_{[0,1] \times [2,4]} x dx dy = \int_0^1 \left( \int_2^4 x dy \right) dx = \int_0^1 xy \Big|_{y=2}^{y=4} dx = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Ta cũng có thể áp dụng công thức Fubini theo thứ tự khác:

$$\iint_{[0,1] \times [2,4]} x dx dy = \int_2^4 \left( \int_0^1 x dx \right) dy = \int_2^4 \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_2^4 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} y \Big|_{y=2}^{y=4} = 1.$$

**Hệ quả 2.2.3 (thể tích của miền dưới đồ thị).** Giả sử  $f$  là hàm xác định, không âm trên miền bị chặn  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Gọi  $E$  là miền dưới đồ thị của  $f$  bên trên miền  $D$ , tức  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Nếu  $E$  có thể tích thì thể tích đó bằng tích phân của  $f$  trên  $D$ :

$$|E| = \int_D f.$$

Đây là một công thức mà ta đã hướng tới ngay từ đầu khi xây dựng tích phân nhưng phải tới giờ mới xây dựng được.

*Chứng minh.* Vì  $E$  có thể tích nên nó bị chặn, có một hình hộp chứa nó. Ta có thể lấy hình hộp đó là  $I \times [0, c]$  với  $I$  là một hình hộp  $n$ -chiều trong  $\mathbb{R}^n$  chứa  $D$  và  $c$  đủ lớn. Áp dụng công thức Fubini:

$$|E| = \int_E 1 = \int_{I \times [0, c]} \chi_E = \int_I \left( \int_0^c \chi_E(x, y) dy \right) dx.$$

Nếu  $x \in I \setminus D$  thì  $\chi_E(x, y) = 0 \forall y \in [0, c]$ , do đó  $\int_0^c \chi_E(x, y) dy = 0$ . Nếu  $x \in D$  thì  $\chi_E(x, y) = 1$  khi và chỉ khi  $0 \leq y \leq f(x)$ , do đó  $\int_0^c \chi_E(x, y) dy = \int_0^{f(x)} 1 dy = f(x)$ . Do đó

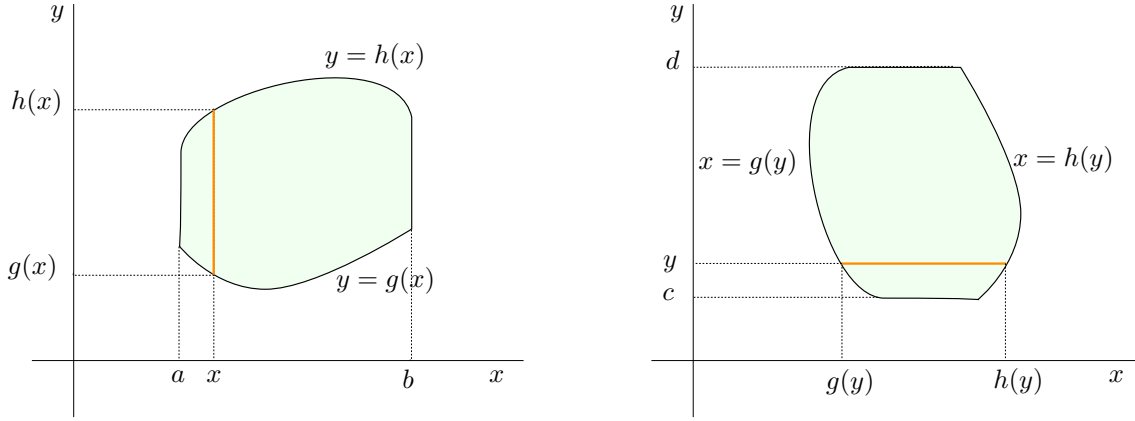
$$|E| = \int_D \left( \int_0^c \chi_E(x, y) dy \right) dx = \int_D f(x) dx.$$

□

**Ví dụ 2.2.4 (tính diện tích tam giác).** Xét  $D$  là tam giác với các đỉnh  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ , với  $a, b > 0$ . Đây là miền dưới đồ thị  $y = \frac{b}{a}x$  với  $0 \leq x \leq a$ . Như ta đã biết ở Ví dụ 2.1.15, tam giác  $D$  có diện tích. Vậy

$$|D| = \int_0^a \frac{b}{a} x dx = \frac{1}{2} ab.$$





Hình 2.2.1: Miền hai chiều đơn giản.

### 2.2.1 Công thức Fubini cho miền phẳng

Việc áp dụng công thức Fubini sẽ dễ dàng hơn đối với những miền “đơn giản”. Một tập con của  $\mathbb{R}^2$  được gọi là một **miền đơn giản theo chiều đứng** nếu nó có dạng  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ . Đây là một miền giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng đứng cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Tương tự, một tập con của  $\mathbb{R}^2$  được gọi là một **miền đơn giản theo chiều ngang** nếu nó có dạng  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$ .

**Mệnh đề 2.2.5.** Cho miền đơn giản theo chiều đứng  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ . Giả sử  $f, g$  và  $h$  liên tục. Khi đó

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Công thức có thể đúng dưới những điều kiện tổng quát hơn như ở Hệ quả 2.2.3 nhưng chúng ta chỉ phát biểu ở dạng thường dùng trong môn học này. Trường hợp miền đơn giản theo chiều nằm ngang là tương tự.

*Chứng minh.* Ta có thể chỉ ra với những điều kiện này thì miền  $D$  có diện tích, tuy nhiên lí luận chi tiết vượt ra khỏi phạm vi môn học này (xem [Vugt3]). Lấy một hình chữ nhật  $I = [a, b] \times [c, d]$  chứa  $D$ . Gọi  $F$  là mở rộng của  $f$  lên  $I$  bằng không ngoài  $D$ . Vì  $f$  liên tục trên tập có diện tích  $D$  nên  $f$  khả tích trên  $D$ , do đó  $F$  khả tích trên  $I$ . Ngoài ra  $\int_c^d F(x, y) \, dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy$  tồn tại. Áp dụng công thức Fubini cho  $F$ :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \iint_I F(x, y) \, dx dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d F(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

□

**Ghi chú 2.2.6.** Trong trường hợp miền không đơn giản ta có thể tìm cách chia miền thành những phần đơn giản để tính, dựa trên cơ sở Hệ quả 2.1.19.

**Ví dụ 2.2.7 (tính diện tích hình tròn).** Xét hình tròn  $D$  cho bởi phương trình  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Áp dụng công thức ở Mệnh đề 2.2.5 cho hàm  $f = 1$ ,  $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ ,

$h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , với  $-R \leq x \leq R$ , hay nhanh hơn dùng 2.2.8, ta có

$$|D| = \iint_D 1 \, dx dy = \int_{-R}^R \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \right) dx = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} \, dx.$$

Đổi biến  $x = R \sin t$ ,  $dx = R \cos t \, dt$ ,  $x = -R \implies t = -\pi/2$ ,  $x = R \implies t = \pi/2$ , ta được

$$\int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2 \cos^2 t \, dt = \pi R^2.$$

Vậy diện tích của hình tròn bán kính  $R$  là  $\pi R^2$ .

**Ví dụ 2.2.8.** Tính tích phân  $\iint_D e^{y^2} \, dA$ , trong đó  $D$  là tam giác với các đỉnh  $(0, 0)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(0, 2)$ .

Các giả thiết ở Mệnh đề 2.2.5 được thỏa. Ta có thể miêu tả  $D$  theo hai cách

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2y\}.$$

Theo cách miêu tả thứ nhất, tức là xem  $D$  là miền đơn giản theo chiều đứng, thì công thức Fubini cho:

$$I = \iint_D e^{y^2} \, dA = \int_0^4 \left( \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} \, dy \right) dx.$$

Tuy nhiên người ta biết nguyên hàm của hàm  $e^{y^2}$  theo biến  $y$  không phải là một hàm sơ cấp, do đó không có công thức cho nó.

Ta chuyển hướng dùng cách miêu tả thứ hai, xem  $D$  là miền đơn giản theo chiều ngang:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left( \int_0^{2y} e^{y^2} \, dx \right) dy = \int_0^2 x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=2y} dy = \int_0^2 2y e^{y^2} \, dy = e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\ &= e^4 - 1. \end{aligned}$$

## 2.2.2 Công thức Fubini cho miền ba chiều

Tương tự trường hợp hai chiều ta có thể nói về miền ba chiều đơn giản. Một tập con của  $\mathbb{R}^3$  được gọi là một *miền đơn giản theo chiều trục  $z$*  nếu nó có dạng  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ . Đây là miền nằm giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng cùng phương với trục  $z$  nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng. Tương tự có khái niệm miền đơn giản theo chiều trục  $x$  và trục  $y$ .

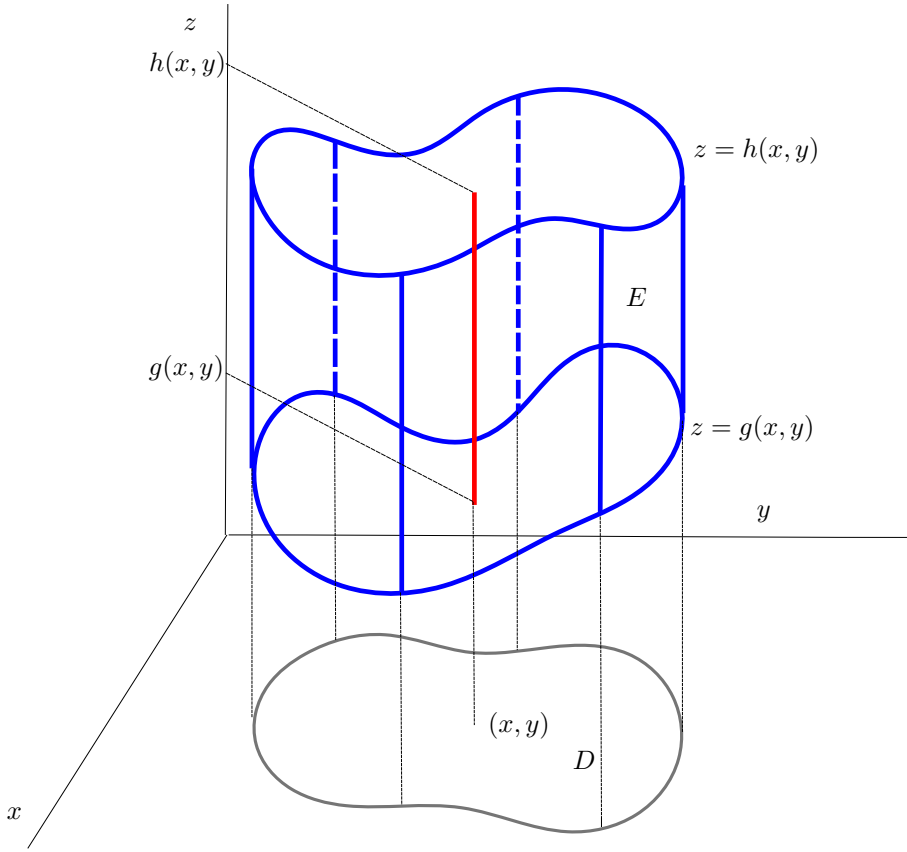
Tương tự trường hợp hai chiều ở Mệnh đề 2.2.5, ta có:

**Mệnh đề 2.2.9.** Cho miền  $D \subset \mathbb{R}^2$  có diện tích, và miền  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$ . Giả sử  $f$ ,  $g$  và  $h$  bị chặn và liên tục. Khi đó

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

*Chứng minh.* Ta có thể chỉ ra với những điều kiện này thì  $E$  có thể tích.

Lấy mở rộng  $F$  của  $f$  lên  $I \times [a, b]$  sao cho  $F$  bằng không ngoài  $E$ . Nếu  $(x, y) \notin D$  thì  $F$  có giá trị 0 trên  $\{(x, y)\} \times [a, b]$ . Nếu  $(x, y) \in D$  thì  $\int_a^b F(x, y, z) \, dz = \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz$ .

Hình 2.2.2: Miền ba chiều đơn giản theo chiều trục  $z$ .

Áp dụng công thức Fubini cho  $F$ :

$$\begin{aligned}
 \iiint_{I \times [a, b]} F(x, y, z) \, dV &= \iint_I \left( \int_a^b F(x, y, z) \, dz \right) dA \\
 &= \iint_D \left( \int_a^b F(x, y, z) \, dz \right) dA \\
 &= \iint_D \left( \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dA.
 \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 2.2.10.** Tính tích phân  $\iiint_E x \, dV$  với  $E$  là khối tứ diện với các đỉnh  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$ .

Bước chính là miêu tả khối  $E$ . Ta có thể xem  $E$  là một khối đơn giản theo chiều trục  $z$ , là miền bên dưới mặt phẳng  $P$  qua ba điểm  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$  và bên trên tam giác  $D$  với các đỉnh  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  trong mặt phẳng  $xy$ .

Trước hết cần viết phương trình mặt phẳng  $P$ . Ta có hai vectơ cùng phương với mặt phẳng này là  $(0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3)$  và  $(0, 0, 3) - (0, 2, 0) = (0, -2, 3)$ . Vectơ tích có hướng  $(-1, 0, 3) \times (0, -2, 3) = (6, 3, 2)$  vuông góc với mặt phẳng  $P$ , là một vectơ pháp tuyến. Một điểm  $(x, y, z)$  nằm trên  $P$  khi và chỉ khi vectơ  $(x, y, z) - (0, 0, 3)$  vuông góc với vectơ pháp tuyến  $(6, 3, 2)$ , đồng nghĩa với tích vô hướng của hai vectơ này bằng 0. Vậy phương trình của  $P$  là  $(x, y, z - 3) \cdot (6, 3, 2) = 0$ , tức là  $6x + 3y + 2z = 6$ . Nếu ta nhớ dạng tổng quát của phương trình mặt phẳng là  $ax + by + cz = d$  thì bằng cách thế giá trị vào ta có thể tìm được phương trình của  $P$  nhanh chóng hơn.

Ta có thể chọn coi tam giác  $D$  là miền đơn giản theo chiều trục  $y$  trong mặt phẳng  $xy$ . Khi đó ta có một miêu tả:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq z \leq (6 - 6x - 3y)/2\}.$$

Một miêu tả khối  $E$  như một miền đơn giản lập tức cho cách viết tích phân trên  $E$  như là tích phân lập, chú ý là các điều kiện áp dụng công thức Fubini ở Mệnh đề 2.2.9 đều được thỏa:

$$\begin{aligned} \iiint_E x \, dV &= \int_0^1 \left( \int_0^{2-2x} \left( \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{2-2x} x \left( 3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x(3-3x)y - \frac{3}{4}xy^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) \, dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nhờ công thức Fubini các tích phân nhiều chiều có thể được đưa về các tích phân một chiều. Các tích phân một chiều có thể được tính đúng hoặc tính xấp xỉ. Việc tính xấp xỉ về nguyên lý khá đơn giản, dựa trên việc tính một tổng Riemann. Việc tính đúng nói chung phức tạp hơn. Trong thực tế tính xấp xỉ lẫn tính đúng thường cần một lượng tính toán lớn và thích hợp để dùng máy tính. Người học có thể đọc lại phần tính tích phân trong giáo trình vi tích phân hàm một biến như [Bmgt1].

## Bài tập

Trong các bài tập tính toán cơ bản ở mục này các điều kiện để áp dụng các công thức đã được thỏa, người học có thể chỉ cần áp dụng các công thức.

### 2.2.1. Cho hàm

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \leq y \\ xy, & x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

Tích phân của  $f$  bằng bao nhiêu?

### 2.2.2. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \leq x^2, \\ xy^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y > x^2. \end{cases}$$

Tính tích phân của hàm  $f$ .

### 2.2.3. Tính:

(a) Tính:

$$\iint_D (\sqrt{x} - y^2) \, dA$$

trong đó  $D$  là miền bao bởi các đường cong  $y = x^2$ ,  $x = y^4$ .

(b) Gọi  $D$  là miền được bao bởi các đường cong  $x = y^2$ ,  $y - x = 3$ ,  $y = -3$ ,  $y = 2$ . Tính  $\iint_D x \, dA$ .

(c) Gọi  $D$  là miền trong góc phần tư thứ nhất, nằm bên trên đường hyperbola  $xy = 1$ , bên trên đường thẳng  $y = x$ , bên dưới đường thẳng  $y = 2$ . Tính  $\iint_D y \, dA$ .

(d) Tính tích phân của hàm  $x^2y^3$  trên miền được bao bởi các đường  $y = 4x^2$ ,  $y = 5 - \sqrt{3}x^2$ .

**2.2.4.** Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân lặp sau và tính chúng:

(a)  $\int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 x e^{-y^2} dy \right) dx.$

(b)  $\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 2} dx \right) dy.$

(c)  $\int_0^1 \left( \int_{3y}^3 \cos(x^2) dx \right) dy.$

(d)  $\int_0^2 \left( \int_{y^2}^4 y \cos(x^2) dx \right) dy.$

(e)  $\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \right) dx.$

**2.2.5.** Tính:

(a) Tính tích phân  $\iiint_E y dV$  trong đó  $E$  là khối tứ diện với 4 đỉnh  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$  và  $(0, 0, 1)$ .

(b) Tính tích phân  $\iiint_E z dV$  trong đó  $E$  là khối được bao bởi các mặt  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2x + 3y$ .

(c) Tìm thể tích của khối được bao bởi các mặt  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1 - x + y$ ,  $y = 1 - x^2$ .

**2.2.6.** Cho  $f$  là hàm liên tục, hãy viết lại tích phân  $\int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$  theo thứ tự  $dx dz dy$ .

**2.2.7.** Tính  $\int_0^2 \int_0^1 \int_{z^2}^4 x^3 z \cos(y^2) dy dx dz$ .

**2.2.8.** Giả sử  $f$  và  $g$  liên tục và  $f \leq g$  trên  $[a, b]$ . Gọi  $D$  là miền giữa đồ thị của  $f$  và  $g$ , tức  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ . Chứng minh rằng

$$|D| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

**2.2.9.** Cho  $g$  liên tục trên hình hộp  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , chứng tỏ

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} g(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^f g(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

**2.2.10 (thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song).** Giả sử tập  $E \subset \mathbb{R}^3$  có thể tích. Giả sử  $a \leq z \leq b$  với mọi  $(x, y, z) \in E$ . Giả sử với mỗi  $z \in [a, b]$  tập  $E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E\}$  có diện tích. Chứng tỏ

$$|E| = \int_a^b |E_z| dz.$$

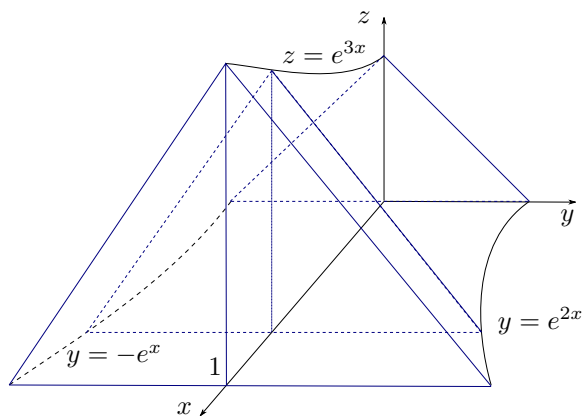
**2.2.11.** Tính thể tích của khối được miêu tả trong Hình 2.2.3.

**2.2.12 (khối tròn xoay).** Cho  $f$  là hàm liên tục trên khoảng  $[a, b]$  và  $f(x) \geq 0$  trên  $[a, b]$ . Chứng tỏ khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của  $f$  quanh trục  $x$  có thể tích và thể tích bằng  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

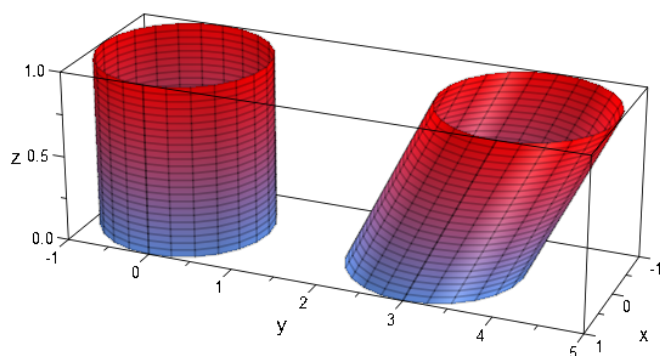
**2.2.13 (nguyên lý Cavalieri <sup>5</sup>).** Nếu hai khối ba chiều có thể tích, và có một phương sao cho mọi mặt phẳng với phương đó cắt hai khối theo hai mặt cắt có cùng diện tích, thì hai khối đó có cùng thể tích.

**2.2.14.** Chứng tỏ rằng thể tích của khối bao bởi mặt  $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  bằng với thể tích của khối bao bởi mặt  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  (Hình 2.2.4).

<sup>5</sup>Bonaventura Francesco Cavalieri là một nhà toán học sống vào đầu thế kỉ 17.



Hình 2.2.3:

Hình 2.2.4: Mặt  $x^2 + y^2 = 1$  (trái) và mặt  $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$  (phải).

## 2.3 Công thức đổi biến

Nhớ lại trong tích phân hàm một biến, để tính  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  ta thường làm như sau. Đặt  $x = \sin t$  thì  $dx = \cos t dt$ ,  $x = 0$  tương ứng  $t = 0$ ,  $x = 1$  tương ứng  $t = \pi/2$ , và

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mục đích của bài này là khảo sát tổng quát hóa phương pháp ở trên lên nhiều chiều: Với tích phân  $\int_A f(x) dx$ , nếu đổi biến  $x = \varphi(u)$  thì tích phân sẽ biến đổi như thế nào?

Cho  $A$  và  $B$  là hai tập mở trong  $\mathbb{R}^n$ . Một ánh xạ  $f : A \rightarrow B$  được gọi là một **phép đổi biến** nếu  $f$  là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược  $f^{-1}$  cũng khả vi liên tục.

**Ví dụ 2.3.1.** Trong  $\mathbb{R}^n$  phép tịnh tiến  $x \mapsto x + a$  là một phép đổi biến.

**Định lý 2.3.2 (Công thức đổi biến).** Công thức đổi biến

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det \varphi'| \quad (2.3.1)$$

được thỏa dưới những giả thiết:  $A$  là một tập mở trong  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  là một phép đổi biến từ  $A$  lên  $\varphi(A)$ ,  $A$  và  $\varphi(A)$  có thể tích,  $f$  và  $(f \circ \varphi) |\det \varphi'|$  khả tích.

Nhắc lại rằng, đặc biệt để tính toán,

$$\det \varphi' = \det J_\varphi.$$

Có một cách viết hình thức tương tự trường hợp một chiều như sau:

Đặt

$$x = \varphi(u)$$

thì

$$dx = |\det \varphi'(u)| du.$$

Nếu

$$x \in X \iff u \in U$$

thì

$$\int_X f(x) dx = \int_U f(\varphi(u)) |\det \varphi'(u)| du.$$

Dấu trị tuyệt đối có thể được bỏ đi nếu ta biết dấu của  $\det \varphi'$ . Nếu  $\det \varphi'$  luôn dương thì  $\varphi$  được gọi là một **phép đổi biến bảo toàn định hướng**. Nếu  $\det \varphi'$  luôn âm thì  $\varphi$  được gọi là một **phép đổi biến đảo ngược định hướng**.

Như trường hợp một chiều, đổi biến có thể dùng để làm cho hàm dưới dấu tích phân, tức dạng vi phân, đơn giản hơn. Trong trường hợp nhiều chiều, đổi biến hay được dùng để làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

**Ví dụ 2.3.3 (đổi biến một chiều).** Đây là phương pháp đổi biến trong tích phân cho hàm một biến quen thuộc. Thực vậy, cho  $x = \varphi(t)$  với  $t \in [a, b]$ , ở đây  $\varphi$  liên tục và  $\varphi : (a, b) \rightarrow \varphi((a, b))$  là một vi đồng phôi. Cho  $f$  khả tích trên  $\varphi([a, b])$ . Theo công thức đổi biến:

$$\int_{\varphi((a, b))} f(x) dx = \int_{(a, b)} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

Do  $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$  nên hoặc  $\varphi'(t) > 0, \forall t \in (a, b)$  hoặc  $\varphi'(t) < 0, \forall t \in (a, b)$ . Vì vậy hoặc  $\varphi$  là hàm tăng hoặc  $\varphi$  là hàm giảm trên  $[a, b]$ .

Nếu  $\varphi$  là hàm tăng (bảo toàn định hướng) thì  $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ . Do đó, dùng ?? để chuyển đổi giữa tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng, ta được

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{[a, b]} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{(a, b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{(\varphi(a), \varphi(b))} f(x) dx = \int_{[\varphi(a), \varphi(b)]} f(x) dx \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Nếu  $\varphi$  là hàm giảm (đảo ngược định hướng) thì  $\varphi([a, b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$  và  $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ . Do đó

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= - \int_{(a, b)} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt \\ &= - \int_{(\varphi(b), \varphi(a))} f(x) dx \\ &= - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Trong cả hai trường hợp ta được công thức đổi biến cho tích phân hàm một biến:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Nếu ta giả sử hàm  $f$  liên tục thì trong vi tích phân hàm một biến công thức đổi biến được chứng minh bằng cách dùng công thức Newton–Leibniz và qui tắc đạo hàm hàm hợp, và chỉ cần hàm  $\varphi$  là trơn.

**Ví dụ 2.3.4 (đổi biến hai chiều).** Với phép đổi biến  $(u, v) \mapsto (x, y)$  người ta thường dùng kí hiệu

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Với kí hiệu này công thức đổi biến có dạng như sau. Nếu phép đổi biến  $(u, v) \mapsto (x, y)$  mang tập  $A$  thành tập  $B$  thì

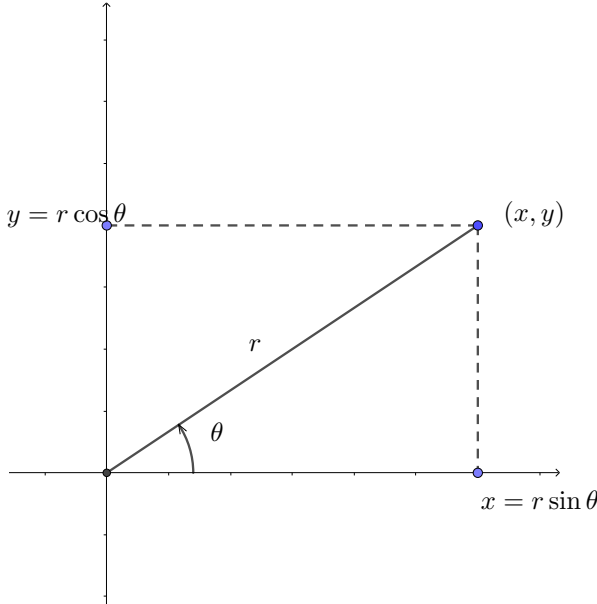
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Một cách hình thức ta có thể viết:

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

### 2.3.1 Tọa độ cực

Một điểm  $P = (x, y)$  trên mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  có thể được miêu tả bằng hai số thực  $(r, \theta)$ , với  $r$  là khoảng cách từ  $O$  tới  $P$ , và  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  là góc từ vectơ  $(1, 0)$  (tia  $Ox$ ) tới vectơ  $\overrightarrow{OP}$ . Vậy  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



Tuy nhiên tương ứng  $(x, y) \mapsto (r, \theta)$  này không là song ánh và không liên tục trên tia  $Ox$ . Vì vậy ta phải hạn chế miền xác định là mặt phẳng bỏ đi tia  $Ox$ . Khi đó ánh xạ ngược là

$$\begin{aligned} (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \theta) &\mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$



Ta tính được

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r > 0,$$

vì vậy đây là một phép đổi biến. Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$dxdy = r \, drd\theta.$$

**Ví dụ 2.3.5 (tích phân trên hình tròn).** Gọi  $B'^2(O, R)$  là hình tròn đóng tâm  $O$  bán kính  $R$ . Để áp dụng công thức đổi biến ta dùng phép đổi biến  $\varphi$  từ hình chữ nhật mở  $(0, R) \times (0, 2\pi)$  sang miền  $D$  là  $B'^2(O, R)$  bỏ đi đường tròn biên và tia  $Ox$ . Giả sử  $f$  khả tích trên  $B'^2(O, R)$ . Tập bị bỏ đi có diện tích không, do đó nó không ảnh hưởng đến tích phân, nên:

$$\begin{aligned} \iint_{B'^2(O, R)} f(x, y) \, dxdy &= \iint_D f(x, y) \, dxdy = \iint_{(0, R) \times (0, 2\pi)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, drd\theta \\ &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, drd\theta. \end{aligned}$$

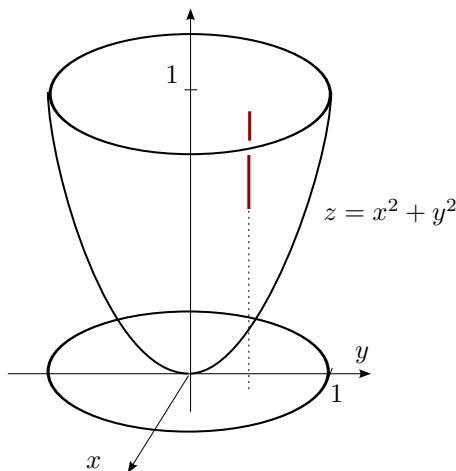
Chẳng hạn diện tích của hình tròn là:

$$|B'^2(O, R)| = \iint_{B'^2(O, R)} 1 \, dxdy = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \cdot r \, d\theta \, dr = \pi R^2.$$

Như vậy chú ý rằng với mục đích lấy tích phân thì để đơn giản ta thường lấy cận trong tọa độ cực là  $r \geq 0$  và  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Ví dụ 2.3.6.** Cho  $E$  là khối được bao bởi các mặt  $z = x^2 + y^2$  và  $z = 1$ . Tính  $\iiint_E z \, dxdydz$ .

“Bao” ở đây chỉ là một miêu tả trực quan, vì thế ta nên vẽ hình rồi từ đó đưa ra một miêu tả toán học, tức là miêu tả dưới dạng tập hợp.



Xem  $E$  là một khối đơn giản theo chiều trục  $z$ , nằm trên mặt  $z = x^2 + y^2$ , dưới mặt  $z = 1$ . Như vậy  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ . Chiều khối  $E$  xuống mặt phẳng

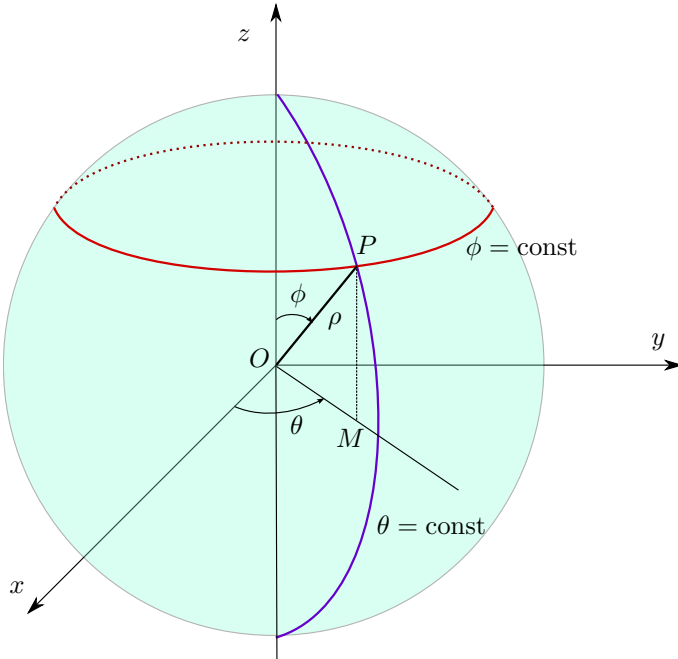
$xOy$  ta được hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Áp dụng công thức Fubini:

$$\begin{aligned}
 \iiint_E z \, dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left( \int_{x^2+y^2}^1 z \, dz \right) dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=x^2+y^2}^1 dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2} (1 - (x^2 + y^2)^2) dx dy \\
 &= \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{1}{2} (1 - (r^2)^2) r \, dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (r - r^5) \, d\theta \right) dr = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Trong ví dụ này một điểm  $(x, y, z)$  trong  $\mathbb{R}^3$  được miêu tả bằng cách dùng tọa độ cực  $(r, \theta)$  để miêu tả  $(x, y)$ . Người ta thường gọi hệ tọa độ  $(r, \theta, z)$  là hệ **tọa độ trụ**.

### 2.3.2 Tọa độ cầu

Một điểm  $P = (x, y, z)$  trong  $\mathbb{R}^3$  có thể được miêu tả bằng bộ ba số thực  $(\rho, \phi, \theta)$ , với  $\rho$  là khoảng cách từ  $O$  tới  $P$ ,  $\phi$  là góc giữa vectơ  $(0, 0, 1)$  (tia  $Oz$ ) và vectơ  $\overrightarrow{OP}$ , và nếu gọi  $M = (x, y, 0)$  là hình chiếu của điểm  $P$  xuống mặt phẳng  $Oxy$  thì  $\theta$  là góc từ vectơ  $(1, 0, 0)$  (tia  $Ox$ ) tới vectơ  $\overrightarrow{OM}$ .



Hình 2.3.1:  $\rho = \text{const}$  ứng với một mặt cầu. Trên mỗi mặt cầu các đường  $\phi = \text{const}$  là các đường vĩ tuyến, các đường  $\theta = \text{const}$  là các đường kinh tuyến, với  $0 \leq \rho$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Bộ  $(\rho, \phi, \theta)$  đại diện cho (cao độ, vĩ độ, kinh độ) của một điểm trong không gian.

Trong hình 2.3.1 ta tính được ngay  $z = PM = \rho \cos \phi$ ,  $OM = \rho \sin \phi$ ,  $x = OM \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = OM \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$ . Tương tự như trường hợp tọa độ cực, để có một phép đổi biến thực sự ta phải hạn chế miền xác định bằng cách bỏ đi tập  $\{(x, y, z) \in$

$\mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0$ , tức một nửa của mặt phẳng  $xOz$ , ứng với  $\rho = 0, \phi = 0, \phi = \pi, \theta = 0, \theta = 2\pi$ . Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0\} \\ (\rho, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \end{aligned}$$

là một song ánh, có

$$\det J_\varphi(\rho, \phi, \theta) = \det \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin \phi > 0.$$

Vậy đây là một phép đổi biến. Cũng như trường hợp tọa độ cực, phần bị bỏ đi thường không ảnh hưởng tới tích phân nên ta thường không nhắc tới chi tiết kĩ thuật này.

Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

Có tài liệu dùng thứ tự trong tọa độ cầu là  $(\rho, \theta, \phi)$ . Thứ tự tọa độ trong tọa độ cầu liên quan tới định hướng trên mặt cầu, tuy không ảnh hưởng tới tích phân bội nhưng sẽ ảnh hưởng tới tích phân mặt ở chương sau.

**Ví dụ 2.3.7 (thể tích quả cầu).** Gọi  $B^3(O, R)$  là quả cầu mở tâm  $O$  bán kính  $R$  trong  $\mathbb{R}^3$ . Thể tích của quả cầu này là:

$$|B^3(O, R)| = \iiint_{B^3(O, R)} 1 \, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Sau đây là một số ví dụ các phép đổi biến khác.

**Ví dụ 2.3.8 (diện tích hình bầu dục).** Một hình bầu dục (e-líp, ellipse)  $D$  trong mặt phẳng là tập hợp các điểm thỏa

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leq 1$$

trong đó  $a, b > 0$ . Viết lại công thức ở dạng

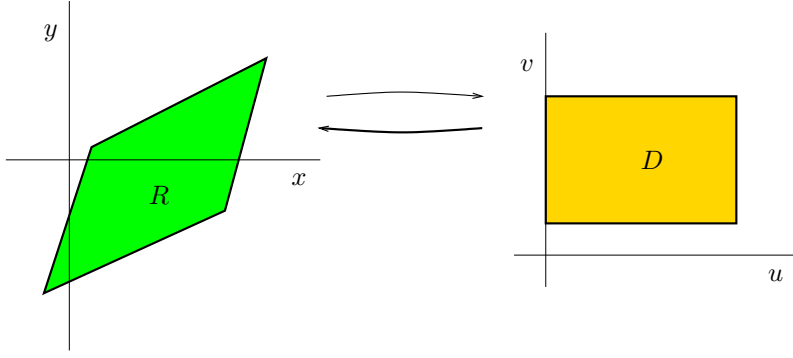
$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 \leq 1,$$

ta thấy có thể làm phép đổi biến

$$\begin{aligned} u &= \frac{x - x_0}{a} \\ v &= \frac{y - y_0}{b}. \end{aligned}$$

Phép đổi biến này đưa hình bầu dục về hình tròn  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Đây chẳng qua là một phép co giãn (vị tự) trục tọa độ biến hình bầu dục thành hình tròn hợp với phép tịnh tiến về gốc tọa độ. Ta tính được  $dudv = \frac{1}{ab} dx dy$ , từ đó

$$|D| = \iint_D 1 \, dx dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} 1 \cdot ab \, dudv = ab \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} 1 \, dudv = ab\pi.$$



**Ví dụ 2.3.9 (một phép đổi biến khác).** Tính  $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$  trong đó  $R$  là hình bình hành bao bởi các đường thẳng  $x-2y=0$ ,  $x-2y=4$ ,  $3x-y=1$ , và  $3x-y=8$ .

Đặt  $u = x - 2y$  và  $v = 3x - y$ . Miền bao bởi các đường thẳng  $u = 0$ ,  $u = 4$ ,  $v = 1$ , và  $v = 8$  là hình chữ nhật  $D = [0, 4] \times [1, 8]$  trong mặt phẳng  $(u, v)$ .

Ta có  $x = (u - 2v)/(-5)$  và  $y = (3u - v)/(-5)$ , nên

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} = 1/5 \neq 0,$$

suy ra ánh xạ  $(x, y) \mapsto (u, v)$  là một phép đổi biến từ phần trong của  $D$  sang phần trong của  $R$ . Biên của  $D$  và  $R$  không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục.

Công thức đổi biến cho:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dxdy &= \iint_D \frac{u}{v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\ &= \frac{1}{5} \iint_D \frac{u}{v} dudv = \frac{1}{5} \int_0^4 \left( \int_1^8 \frac{u}{v} dv \right) du = \frac{8}{5} \ln 8. \end{aligned}$$

### 2.3.3 Giải thích công thức đổi biến

Chúng ta sẽ không chứng minh công thức đổi biến vì một chứng minh sẽ khó và dài vượt khỏi phạm vi môn học này. Dưới đây chúng ta đưa ra một giải thích, tuy chưa phải là một chứng minh, nhưng sẽ giúp ta hiểu rõ hơn công thức.

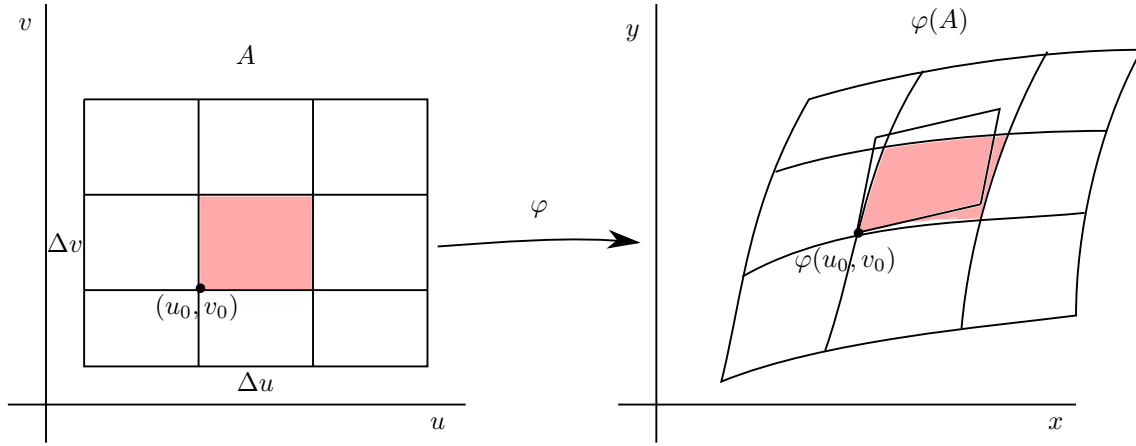
Để cho đơn giản, xét trường hợp  $A$  là một hình chữ nhật. Ánh xạ  $\varphi$  mang miền  $A$  trên mặt phẳng  $(u, v)$  sang miền  $\varphi(A)$  trên mặt phẳng  $(x, y)$ .

Xét một phép chia  $A$  thành những hình chữ nhật con. Ta xem tác động của  $\varphi$  lên một hình chữ nhật con đại diện  $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ , có diện tích  $\Delta u \Delta v$ . Hàm trơn  $\varphi$  mang mỗi cạnh của hình chữ nhật này thành một đoạn cong trên mặt phẳng  $(x, y)$ , do đó ta được một “hình chữ nhật cong” trên mặt phẳng  $(x, y)$  với một đỉnh là điểm  $\varphi(u_0, v_0)$ .

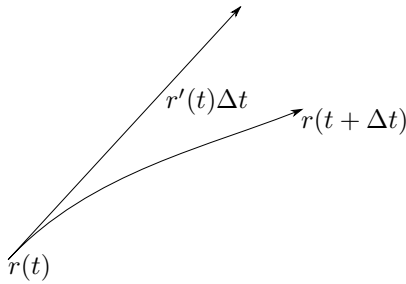
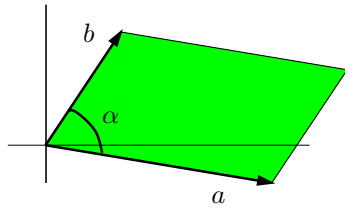
Bây giờ ta tính diện tích hình chữ nhật cong này bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Đoạn cong từ  $\varphi(u_0, v_0)$  tới  $\varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$  sẽ được xấp xỉ tuyến tính bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại  $\varphi(u_0, v_0)$ . Vì vectơ tiếp xúc chính là  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$  nên đoạn tiếp tuyến này cho bởi vectơ  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u$ .

Tương tự, đoạn cong  $\varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$  được xấp xỉ bởi vectơ tiếp xúc  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v$ . Vậy hình chữ nhật cong được xấp xỉ bởi hình bình hành sinh bởi hai vectơ tiếp xúc trên.

Vấn đề bây giờ là tính diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ. Giả sử  $a = (a_1, a_2)$



Hình 2.3.2: Minh họa công thức đổi biến.

Hình 2.3.3: Xấp xỉ tuyến tính đường cong:  $r(t + \Delta t) - r(t) \approx r'(t)\Delta t$ .

và  $b = (b_1, b_2)$ , diện tích của hình bình hành sinh bởi  $a$  và  $b$  là

$$\begin{aligned}
 |a| |b| \sin \alpha &= \sqrt{|a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{|a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2} \\
 &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
 &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(a, b)|.
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

Ta vừa được một kết quả đáng chú ý, giải thích ý nghĩa hình học của định thức: giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận chính là diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ cột của ma trận. Bản thân dấu của định thức cũng có thể được giải thích, nhưng ta gác việc này lại.

Người đọc kỹ tính có thể thắc mắc rằng công thức tính diện tích thông qua hàm sin ở trên chưa được thiết lập trong lý thuyết của chúng ta. Đây là một phản đối xác đáng. Lý luận trên chưa phải là một chứng minh mà chỉ cho thấy sự không mâu thuẫn với những kết quả đã biết.

Trở lại công thức đổi biến, vậy diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$  và  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$  là

$$\begin{aligned}
|\det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u, \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \right)| &= |\det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right)| \Delta u \Delta v \\
&= |\det J_\varphi(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v.
\end{aligned}$$

Điều này cũng giải thích sự xuất hiện của dấu trị tuyệt đối.

## Bài tập

Một số bài tập tính toán có thể dùng máy tính và tính xấp xỉ.

### 2.3.1. Tính:

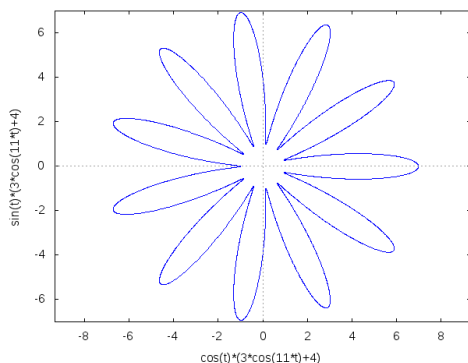
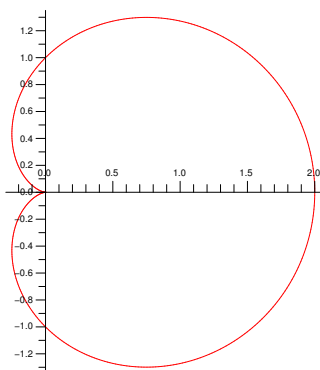
- Tính thể tích của khối được bao bởi mặt  $z = 4 - x^2 - y^2$  và mặt phẳng  $xOy$ .
- Tính thể tích của khối được bao bởi mặt  $z = 9 - x^2 - y^2$ ,  $y \leq x$ , trong góc phần tám thứ nhất (tức  $x, y, z \geq 0$ ).
- Tính tích phân  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$  trong đó  $D$  là miền được bao bởi hai đường cong  $x^2 + y^2 = 4$  and  $x^2 + y^2 = 9$ .
- Tính tích phân  $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$  trong đó  $D$  là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn  $x^2 + y^2 = 9$ , đường thẳng  $y = 0$  và  $y = \sqrt{3}x$ .
- Tính tích phân  $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dA$  trong đó  $D$  là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ , đường thẳng  $y = 0$  và  $y = x$ .
- Tính tích phân  $\iint_D x^2 dA$  trong đó  $D$  là miền được bao bởi e-líp  $3x^2 + 4y^2 = 8$ .
- Tính tích phân  $\iiint_E \cos[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] dV$  trong đó  $E$  là quả cầu đơn vị  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .
- Tính thể tích của khối được bao phía trên bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  và được bao phía dưới bởi mặt paraboloid  $z = x^2 + y^2$ .
- Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  và bị chặn dưới bởi mặt nón  $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ ,  $z \geq 0$ .
- Tìm thể tích của khối bị chặn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  và mặt trụ  $x^2 + y^2 = 2y$ .
- Tính thể tích của miền phía dưới mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  phía trên mặt phẳng  $z = 1/\sqrt{2}$ .
- Tính thể tích của khối bên dưới mặt  $z = 4 - x^2 - y^2$  bên trên mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ .
- Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt  $z = 9 - x^2 - y^2$ ,  $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$ .
- Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt  $z = 3 - 2y$ ,  $z = x^2 + y^2$ .
- Tính tích phân  $\iiint_E x dV$  trong đó  $E$  là khối được bao bởi hai mặt  $z = 6 - x^2 - y^2$  và  $z = x^2 + 3y^2$ .

**2.3.2.** Tính thể tích của khối được miêu tả bởi điều kiện  $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2)$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 0$ .

### 2.3.3. Tính:

- Tính diện tích của miền được bao bởi đường cong hình bông hoa  $r = 4 + 3 \cos(11\theta)$  (đây là đường trong mặt phẳng  $xy$  được cho bởi phương trình tham số  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  với  $r$  như trên).
- Tính diện tích miền được bao bởi đường cong hình trái tim  $r = 1 + \cos \theta$ .
- Đường cong trong mặt phẳng  $xy$  cho bởi phương trình  $r = \sqrt{\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  cùng với tia  $Ox$  bao một miền  $D$  hình vỏ ốc được vẽ trong hình 2.3.6. Hãy tính tích phân  $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$ .

### 2.3.4. Tính:

Hình 2.3.4: Đường  $r = 4 + 3 \cos(11\theta)$ .Hình 2.3.5: Đường  $r = 1 + \cos \theta$ .

- (a) Tính tích phân  $\iint_R (x^2 + 2xy) dA$  trong đó  $R$  là hình bình hành bao bởi các đường thẳng  $y = 2x + 3$ ,  $y = 2x + 1$ ,  $y = 5 - x$ ,  $y = 2 - x$ .
- (b) Tính tích phân  $\iint_R (x + y)^2 dA$  trong đó  $R$  là hình bình hành bao bởi các đường thẳng  $y = -x$ ,  $y = -x + 1$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 2x - 3$ .
- (c) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $y = 1/x$ ,  $y = 2/x$ .
- (d) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong  $y^2 = x$ ,  $3y^2 = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ .

**2.3.5.** Xét khối bầu dục  $E$  được bao bởi mặt có phương trình  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ . Hãy tính thể tích của  $E$  bằng cách đổi biến để đưa về thể tích của quả cầu. Tìm công thức thể tích của khối bầu dục tổng quát.

**2.3.6.** Tìm diện tích của miền phẳng được bao bởi đường cong  $x^2 - 2xy + 2x + 3y^2 - 2y = 2$ .

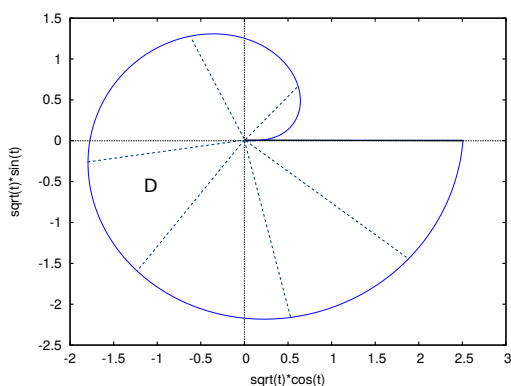
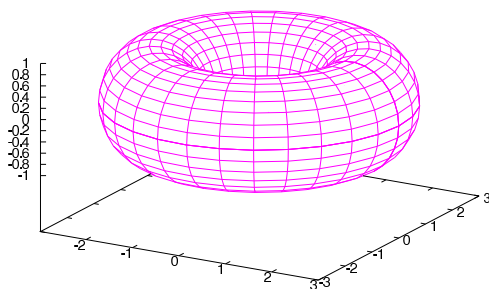
**2.3.7.** Gọi  $D$  là miền phẳng được xác định bởi  $x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 2y \leq 1$ . Hãy tính tích phân  $\iint_D x dx dy$ . Hãy tổng quát hóa.

**2.3.8.** Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm  $f(x) = x - x^3$  và trục  $x$  quanh trục  $y$ .

**2.3.9.** Dùng máy tính hãy vẽ mặt cầu mấp mô cho bởi phương trình trong tọa độ cầu  $\rho = 1 + \sin^2(3\theta) \sin^4(5\phi)$ . Tính thể tích của khối bao bởi mặt này.

**2.3.10.** Hãy giải bài 2.2.12 (thể tích khối tròn xoay) bằng cách đổi biến.

**2.3.11.** Giải bài 2.2.14 bằng cách dùng công thức đổi biến.

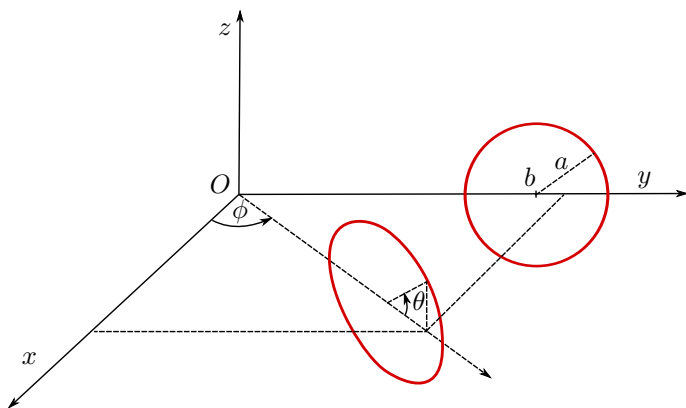
Hình 2.3.6: Đường  $r = \sqrt{\theta}$ .

Hình 2.3.7: Mặt xuyến.

**2.3.12.** Mặt xuyến (torus) có thể được miêu tả như là mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay quanh trục  $z$  một đường tròn trên mặt phẳng  $Oyz$  không cắt trục  $z$ . Hãy kiểm tra rằng mặt xuyến có phương trình dạng ẩn:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2, \quad 0 < a < b,$$

và dạng tham số:  $((b + a \cos \theta) \cos \phi, (b + a \cos \theta) \sin \phi, a \sin \theta)$ ,  $0 \leq \phi, \theta \leq 2\pi$ . (Hình 2.3.8.) Hãy



Hình 2.3.8:

tính thể tích của khối bao bởi mặt xuyến.

**2.3.13 (thể tích của khối nón).** Giả sử  $D$  là một miền trong mặt phẳng  $Oxy$ . Cho  $A$  là một điểm phía trên mặt phẳng  $Oxy$  trong  $\mathbb{R}^3$ . Tập hợp tất cả các điểm nằm trên các đoạn thẳng nối  $A$  với các điểm thuộc  $D$  được gọi là một **khối nón** hay khối chóp. Chẳng hạn một khối tứ diện là một khối nón. Miền  $D$  được gọi là đáy của khối nón, còn khoảng cách từ  $A$  tới mặt phẳng  $Oxy$  được gọi là chiều cao của khối nón. Hãy chứng tỏ **thể tích của khối nón đúng bằng một phần ba diện tích đáy nhân chiều cao**.



**2.3.14.** Trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  một phép quay quanh gốc tọa độ một góc  $\alpha$  có thể được miêu tả bằng 2 cách: Trong tọa độ cực, đó là ánh xạ  $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$ . Tương ứng trong tọa độ Euclid đó là

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ một phép quay quanh gốc tọa độ mang một hình có diện tích thành một hình có cùng diện tích.

**2.3.15 (phép dời hình bảo toàn diện tích).** Một phép dời hình trong  $\mathbb{R}^2$  được định nghĩa là một song ánh từ  $\mathbb{R}^2$  vào chính nó bảo toàn khoảng cách.

Người ta biết trong mặt phẳng một phép dời hình bất kì là một hợp của các phép tịnh tiến, phép quay quanh gốc tọa độ, và phép lấy đối xứng qua trục  $x$ .

Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ diện tích của một hình phẳng không thay đổi qua một phép dời hình.

## 2.4 Ứng dụng của tích phân bội

Tích phân là tổng, đó là ý nghĩa chính của tích phân. Vì vậy mỗi khi có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Về cơ bản, nếu tại mỗi điểm  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  có tương ứng các giá trị  $f(x_i)$  của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó dĩ nhiên là  $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ . Nếu tập hợp  $D$  các điểm đang xét là vô hạn thì hàm  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  có khi được gọi là **hàm mật độ** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là  $\int_D f$ .

### 2.4.1 Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  có tương ứng các giá trị  $f(x_i)$  thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ . Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , thì giá trị trung bình của  $f$  được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân:  $\frac{1}{|D|} \int_D f$ .

**Ví dụ 2.4.1.** Nhiệt độ tại điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng là  $50e^{-x^2-y^2}$  (độ Celcius). Hãy tìm nhiệt độ trung bình trên đĩa tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.

Gọi  $D$  là đĩa tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Nhiệt độ trung bình trên  $D$  được cho bởi

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D|} \iint_D 50e^{-x^2-y^2} dx dy &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 50e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= 50 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 31,6. \end{aligned}$$

### 2.4.2 Tâm khối lượng

Ta giới thiệu khái niệm tâm khối lượng (center of mass). Trong trường hợp hai chất điểm có khối lượng  $m_1$  tại điểm  $p_1$  và có khối lượng  $m_2$  tại điểm  $p_2$  thì tâm khối lượng của hệ hai điểm này, theo nguyên tắc đòn bẩy của vật lý, nằm tại điểm

$$\frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2}.$$

Đối với hệ gồm  $n$  chất điểm, bằng qui nạp ta tìm được vị trí của tâm khối lượng là

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i p_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

với tổng khối lượng là  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Xét trường hợp khối lượng liên tục, giả sử ta có một khối vật chất chiếm phần không gian  $E$  trong  $\mathbb{R}^3$ . Tại mỗi điểm  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  gọi  $\rho(p)$  là mật độ khối lượng của khối tại  $p$ , đó là giới hạn của khối lượng trung bình quanh  $p$ , có thể hiểu là khối lượng tại điểm  $p$ . Khối lượng của khối chính là tích phân của mật độ khối lượng:

$$m = \int_E \rho.$$

Từ công thức của trường hợp rời rạc ở trên ta suy ra vị trí của tâm khối lượng trong trường hợp liên tục sẽ là

$$\frac{\int_E \rho p}{\int_E \rho} = \frac{\int_E \rho p}{m}.$$

Ở đây tích phân của hàm vectơ được hiểu là vectơ tích phân của từng thành phần. Cụ thể hơn, nếu  $p = (x, y, z)$  thì tâm khối lượng nằm ở điểm  $\frac{1}{m}(\int_E \rho x, \int_E \rho y, \int_E \rho z)$ .

**Ví dụ 2.4.2.** Ta tìm tâm khối lượng của nửa hình tròn đồng chất. Gọi  $D$  là nửa trên của hình tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  và gọi hằng số  $\rho$  là mật độ khối lượng của nó. Khối lượng của khối này là  $m = \iint_D \rho \, dA = \rho \pi R^2/2$ . Tọa độ của tâm khối lượng là

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m} \iint_D \rho x \, dxdy = 0, \\ y &= \frac{1}{m} \iint_D \rho y \, dxdy = \frac{\rho}{m} \int_0^R \int_0^\pi (r \sin \theta) r \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi} R. \end{aligned}$$

### 2.4.3 Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên

Một biến ngẫu nhiên  $X$  là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào  $\mathbb{R}$ . Trong trường hợp tập giá trị  $D$  của  $X$  là hữu hạn thì ta nói  $X$  là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Với mỗi giá trị  $x \in D$  có một số thực  $0 \leq f(x) \leq 1$  là xác suất để  $X$  có giá trị  $x$ , kí hiệu là  $P(X = x)$ . Hàm  $f$  được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên  $X$ . Xác suất để  $X$  có giá trị trong tập  $C \subset D$  được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Một hệ quả là  $\sum_{x \in D} f(x) = P(X \in D) = 1$ . Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (expected value) theo xác suất của  $X$  được cho bởi:

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f(x).$$

**Ví dụ 2.4.3.** Xét một trò chơi với con xúc sắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi  $X$  là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là  $f(10) = 5/6$  và  $f(60) = 1/6$ . Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất  $X$ . Ta có  $E(X) = 10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$ , như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi.

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục, tập giá trị của biến ngẫu nhiên  $X$  là một tập con vô hạn  $D$  của  $\mathbb{R}$ . Tương tự với trường hợp rời rạc, có một hàm phân bố xác suất, hay mật độ xác suất (probability density function)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sao cho  $f(x) \geq 0$  và xác suất để  $X$  có giá trị trong tập  $C \subset D$  được cho bởi

$$P(X \in C) = \int_C f.$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa  $P(X \in D) = \int_D f = 1$ .

Trung bình hay kỳ vọng của biến ngẫu nhiên  $X$  được cho bởi:

$$E(X) = \int_D xf.$$

Chú ý sự tương tự của công thức này với công thức của tâm khối lượng.

**Ví dụ 2.4.4.** Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi  $T$  là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực  $t \geq 0$  là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi  $f(t) = 0,1e^{-0,1t}$ . Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành sẽ là

$$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 0,1e^{-0,1t} dt \approx 18\%.$$

Trong trường hợp có  $n$  biến ngẫu nhiên thì tập giá trị của biến ngẫu nhiên là một tập con của  $\mathbb{R}^n$ , hàm phân bố xác suất sẽ là một hàm  $n$  biến, và các tích phân trên sẽ là tích phân bội.

**Ví dụ 2.4.5.** Xét tình huống một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ, nhưng không quá 10 phút, và đợi ở trạm 5 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm, gọi là  $X$ , được cho bởi  $f_1(x) = -0,02x + 0,2$ ,  $0 \leq x \leq 10$ . Một người thường đi xe buýt vào giờ này nhưng hay bị trễ, có khi tới 20 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm, gọi là  $Y$ , được cho bởi  $f_2(y) = -0,005y + 0,1$ ,  $0 \leq y \leq 20$ . Hỏi xác suất để người này đón được chuyến xe buýt này là bao nhiêu?

Ở đây có hai biến xác suất độc lập nên hàm phân bố xác suất chung là  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ . Xác suất cần tìm được cho bởi

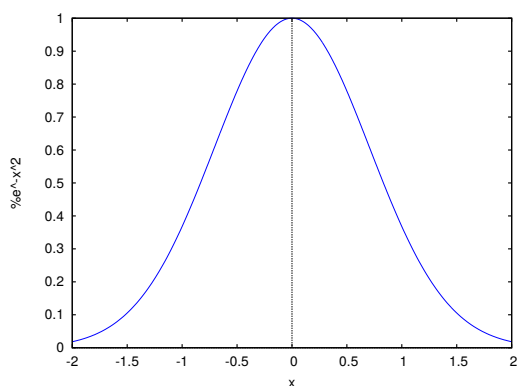
$$\begin{aligned} P(Y \leq X + 5) &= \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 10, y \leq x+5\}} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{10} \int_0^{x+5} f(x, y) dy dx \approx 65\%. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.4.6 (Tích  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ).** Tích phân  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  rất quan trọng trong môn Xác suất (xem Bài tập 2.4.8). Ở đây ta sẽ tính nó thông qua tích phân bội.

Gọi  $B'(R)$  là hình tròn đóng tâm 0 bán kính  $R$ , tức  $B'(R) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ . Gọi  $I(R)$  là hình vuông tâm 0 với chiều dài cạnh  $2R$ , tức  $I(R) = [-R, R] \times [-R, R]$ .

Vì  $B'(R) \subset I(R) \subset B'(R\sqrt{2})$  nên

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA \leq \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA \leq \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$



Hình 2.4.1: Đường cong  $e^{-x^2}$  thường được gọi là đường hình chuông.

Vì

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA = \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} re^{-r^2} dA = \pi(1 - e^{-R^2}),$$

nên từ bất đẳng thức trên, lấy giới hạn ta được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi.$$

Mặt khác theo công thức Fubini:

$$\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

nên

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Vậy ta được công thức nổi tiếng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

## Bài tập

### 2.4.1. Tính:

- Tìm tâm khối lượng của hình chữ nhật đồng chất  $[-1, 1] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ .
- Tìm tâm khối lượng của vật có hình dạng một miếng mỏng chiếm miền trên mặt phẳng bao bởi đường  $y = 12,37x^2$  và đường  $y = 8,5$  với hàm mật độ khối lượng  $\rho(x, y) = 103,6x^4y^{1,2}$ .
- Tìm tâm khối lượng của hình trái tim ở Hình 2.3.5.
- Tìm tâm khối lượng của hình vỏ ốc ở Hình 2.3.6.
- Chứng tỏ tâm khối lượng của một tam giác chính là trọng tâm (giao điểm của ba đường trung tuyến) của tam giác.
- Tìm tâm khối lượng của một khối đồng chất có dạng hình nón nhọn cân chiều cao là  $h$  và với đáy là hình tròn bán kính  $R$ .

- (g) Tìm tâm khối lượng của khối tứ diện đồng chất được bao bởi các mặt  $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  với  $a, b, c > 0$ .

**2.4.2.** Cho  $D \subset \mathbb{R}^2$  là một tập đồng chất, có diện tích, đối xứng qua gốc tọa độ  $O$  tức là nếu  $p \in D$  thì  $-p \in D$ . Hãy tìm tâm khối lượng của  $D$ .

**2.4.3.** Xét một mô hình đơn giản cho cấu trúc hành tinh Trái đất, gồm phần lõi cứng ở gần tâm có mật độ khối lượng cao và phần ngoài có mật độ khối lượng giảm dần từ trong ra ngoài. Gọi  $\rho$  là khoảng cách từ một điểm tới tâm, thì mật độ khối lượng tại điểm đó được mô hình hóa như sau:

$$f(\rho) = \begin{cases} 13 \cdot 10^9, & 0 \leq \rho \leq 1000, \\ \frac{13 \cdot 10^{12}}{\rho}, & 1000 \leq \rho \leq 6400, \end{cases}$$

ở đây đơn vị khối lượng là kg và đơn vị chiều dài là km. Hãy ước lượng khối lượng của Trái đất.

**2.4.4.** Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình chữ nhật  $[0, 1] \times [0, 2]$  với đơn vị chiều dài là km. Giá đất trong khu vực này trong được mô hình hóa bằng hàm  $p$ , ở vị trí  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$  thì  $p(x, y) = 200 - 10(x - \frac{1}{2})^2 - 15(y - 1)^2$  (triệu đồng/m<sup>2</sup>). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.

**2.4.5.** Giả sử rằng gốc tọa độ ở trung tâm thành phố và mật độ dân số tại điểm có tọa độ  $(x, y)$  có mô hình  $p(x, y) = 2000(x^2 + y^2)^{-0,2}$  người trên km<sup>2</sup>, hãy tìm số dân trong bán kính 5 km từ trung tâm thành phố.

**2.4.6.** Kim tự tháp Vua Khufu là kim tự tháp lớn nhất ở Ai Cập, được xây dựng trong khoảng từ năm 2580 TCN tới 2560 TCN. Đáy của nó là một hình vuông với chiều dài cạnh là 230,4 mét và chiều cao là 146,5 mét.

- Hãy ước lượng thể tích của kim tự tháp.
- Kim tự tháp được làm bằng đá vôi. Mật độ khối lượng của đá vôi vào khoảng 2400 kg/m<sup>3</sup>. Hãy ước lượng khối lượng của kim tự tháp.
- Hãy ước lượng công xây dựng kim tự tháp này. (Công này ít nhất bằng thế năng trọng trường của khối kim tự tháp.)
- Mỗi người nhận khoảng 2000 kcal năng lượng mỗi ngày từ thức ăn. Giả sử mỗi người dùng được 20% năng lượng đó để làm việc, 340 ngày một năm, trong 20 năm, thì cần ít nhất bao nhiêu người để xây dựng kim tự tháp này? (Giả sử họ không có máy móc, chưa kể những phần khác của công việc và những yếu tố khác, nên đây chỉ là một ước lượng thô.)

**2.4.7.** Hai công ty sản xuất hai sản phẩm cạnh tranh với nhau. Gọi  $X, Y$  là biến xác suất ứng với thời điểm hư hỏng của hai sản phẩm tính theo thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất (theo năm), và giả sử hai biến này là độc lập với nhau. Giả sử các hàm mật độ xác suất được cho bởi  $f(x) = 0,2e^{-0,2x}$  và  $g(y) = 0,1e^{-0,1y}$ . Hãy tính xác suất sản phẩm của công ty thứ nhất bị hư trước sản phẩm của công ty thứ hai trong thời gian bảo hành 3 năm.

**2.4.8.** Chứng tỏ hàm được dùng trong mô hình phân bố chuẩn (normal distribution) của môn Xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

thỏa mãn tính chất cần có của hàm phân bố xác suất:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

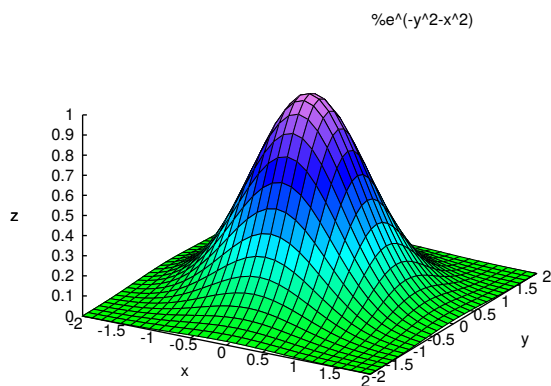
**2.4.9.** Hãy đưa ra một giải thích cho công thức sau, thường được dùng trong xác suất khi có hai biến ngẫu nhiên:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

Từ đó hãy đưa ra công thức cho mô hình phân bố chuẩn của hai biến ngẫu nhiên.

**2.4.10 (hàm Gamma).** Hàm Gamma là một mở rộng của hàm giai thừa lên tập hợp các số thực. Ta định nghĩa

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{R}, z > 0.$$

Hình 2.4.2: Hàm  $e^{-(x^2+y^2)}$ .

- (a) Chứng tỏ  $\Gamma(z)$  được xác định.
- (b) Kiểm tra rằng  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Suy ra với số nguyên dương  $n$  thì  $\Gamma(n+1) = n!$ .
- (c) Kiểm tra công thức  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

**2.4.11 (công thức Pappus).** Hãy tìm lại công thức của Pappus<sup>6</sup>: Thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền phẳng quanh một trục bên ngoài bằng diện tích của miền nhân với chiều dài của đường đi của tâm khối lượng của miền.

Cụ thể hơn, gọi  $D$  là miền bao bởi hai đồ thị của hai hàm  $f$  và  $g$  trên đoạn  $[a, b]$ , với  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  trên  $[a, b]$ . Gọi  $(x_0, y_0)$  là tâm khối lượng của  $D$ . Khi đó thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền  $D$  quanh trục  $x$  bằng  $2\pi y_0 |D|$ .

Ứng dụng, hãy tìm lại công thức thể tích của khối xuyến.

<sup>6</sup>Pappus xứ Alexandria, một nhà hình học sống vào thế kỷ thứ 4 sau Công nguyên.

## Chương 3

# Giải tích vectơ

Trong chương trước chúng ta đã khảo sát thể tích của miền trong không gian  $n$ -chiều và tích phân trên những miền đó. Tuy nhiên những câu hỏi chẳng hạn như về chu vi của đường tròn, diện tích của mặt cầu, hay nói chung là độ đo của tập con “ $k$ -chiều” trong không gian  $n$ -chiều với  $k < n$  và tích phân trên đó thì chúng ta chưa xét. Chương này sẽ trả lời những câu hỏi này cho trường hợp đường ( $k = 1$ ) và mặt ( $k = 2$ ).

Chương này cũng giới thiệu các quan hệ giữa phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm nhiều biến thông qua phép tính tích phân đường, phép tính tích phân mặt, và các công thức liên hệ chúng, như các công thức Green, công thức Stokes, công thức Gauss–Ostrogradsky.

## 3.1 Tích phân đường

### 3.1.1 Chiều dài của đường đi

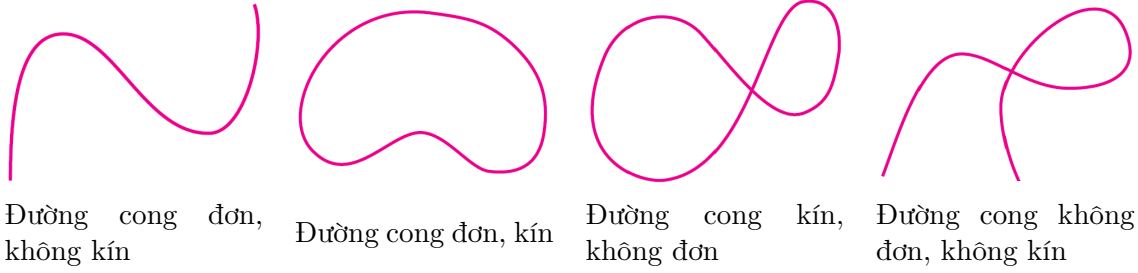
Khi nói tới một “đường” ta thường nghĩ tới một “con đường”, tức là một tập hợp điểm, ví dụ một đường thẳng hay một đường tròn. Mục đích của chúng ta trong mục này là thực hiện các đo đạc trên đường, chẳng hạn như đo chiều dài của đường. Các đo đạc đó sẽ được thực hiện qua một chuyển đi trên con đường. Tuy nhiên ta có thể đi trên một con đường theo nhiều cách khác nhau, và ta chưa có căn cứ để cho rằng các đo đạc bằng các cách đi khác nhau trên cùng một con đường sẽ cho ra cùng một kết quả. Do đó trước mắt chúng ta sẽ làm việc với từng cách đi cụ thể mà ta gọi là đường đi.

Một **đường đi** (path) là một ánh xạ từ một khoảng đóng  $[a, b]$  vào  $\mathbb{R}^n$  (một tương ứng mỗi thời điểm với một vị trí).

Tập hợp các điểm mà đường đi đã đi qua được gọi là **vết của đường đi** (đây là “con đường” như đã bàn ở trên). Với đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  thì vết của  $r$  tập ảnh  $r([a, b]) = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$ .

Đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  được gọi là:

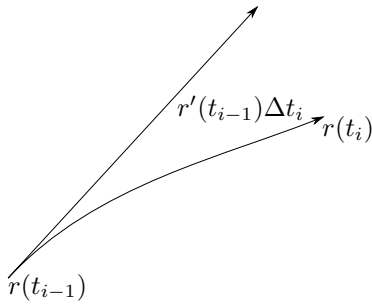
- **đóng** hay **kín** nếu  $r(a) = r(b)$ , tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- **đơn** nếu nó không đi qua điểm nào hai lần (không có điểm tự cắt). Chính xác hơn, nếu  $r$  không phải là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu  $r$  là đơn ánh trên  $[a, b]$ ; nếu  $r$  là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu  $r$  là đơn ánh trên  $[a, b)$ .
- **liên tục** nếu  $r$  là hàm liên tục trên  $[a, b]$ .



Đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  được gọi là **trơn** nếu  $r$  là hàm trơn trên  $[a, b]$ , nghĩa là nếu  $r$  mở rộng được thành một hàm trơn trên một khoảng  $(c, d)$  chứa  $[a, b]$ . Điều này đồng nghĩa với việc  $r$  có đạo hàm phải tại  $a$  và đạo hàm trái tại  $b$ .

Nếu  $r$  là một đường đi trơn thì đạo hàm  $r'(t)$  có ý nghĩa vật lý là **vận tốc** chuyển động (velocity) tại thời điểm  $t$ . Độ lớn của vận tốc  $|r'(t)|$  là **tốc độ** (speed) tại thời điểm  $t$ .

Cho đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Xét một phép chia  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  của  $[a, b]$ . Trên mỗi khoảng con  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq m$ , ta xấp xỉ tuyến tính đường đi:  $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$ . Nói cách khác, ta xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều với vận tốc không đổi  $r'(t_{i-1})$ . Quãng đường đi được trong khoảng thời gian từ  $t_{i-1}$  tới  $t_i$  được xấp xỉ bởi vectơ  $r'(t_{i-1})\Delta t_i$ , với chiều dài là  $|r'(t_{i-1})\Delta t_i|$ .



Hình 3.1.1: Xấp xỉ tuyến tính:  $r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})\Delta t_i$ .

Như vậy “chiều dài” của đường đi được xấp xỉ bởi  $\sum_{i=1}^m |r'(t_{i-1})| \Delta t_i$ . Đây chính là tổng Riemann của hàm  $|r'(t)|$  trên khoảng  $[a, b]$ .

Vậy ta đưa ra định nghĩa sau:

**Định nghĩa 3.1.1.** Chiều dài của đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  được định nghĩa là

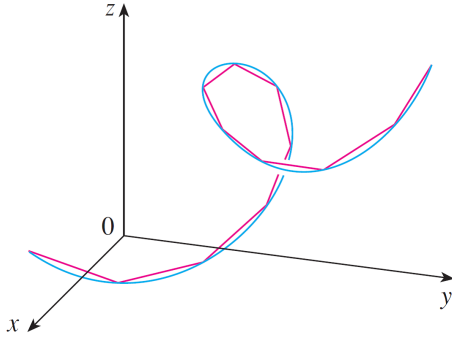
$$\int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

Định nghĩa này chứa công thức đã quen biết: quãng đường đi được = tốc độ  $\times$  thời gian.

**Ví dụ 3.1.2.** Giả sử một vật di chuyển trên một đường với tốc độ hằng  $v$ , trong khoảng thời gian từ  $a$  tới  $b$ . Khi đó quãng đường vật đã đi được có chiều dài là  $\int_a^b v \, dt = v(b - a)$ , đúng như ta chờ đợi.

Một ý tưởng khác để đưa ra định nghĩa độ dài đường là lấy giới hạn tổng độ dài các đoạn thẳng gấp khúc nối các điểm liên tiếp trên đường cong, khi số điểm dần đến vô hạn (Hình 3.1.2). Cách tiếp cận này cũng cho ra kết quả tương tự như trên.





Hình 3.1.2:

### 3.1.2 Tích phân đường loại một

Cho đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Giả sử  $f$  là một hàm thực xác định trên vết của đường, tức  $f : r([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta muốn tính **tổng giá trị của hàm trên đường**.

Ta làm một cách tương tự như đã làm khi định nghĩa chiều dài đường đi. Xét một phép chia  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ . Trên khoảng con  $[t_{i-1}, t_i]$  ta xấp xỉ tuyến tính đường đi  $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$ . Khi đó phần đường từ  $r(t_{i-1})$  đến  $r(t_i)$  được xấp xỉ bằng  $r'(t_{i-1})\Delta t_i$ . Trên phần đường này ta xấp xỉ hàm  $f$  bởi hàm hằng với giá trị  $f(r(t_{i-1}))$ . Do đó tổng giá trị của  $f$  trên phần đường từ  $r(t_{i-1})$  đến  $r(t_i)$  được xấp xỉ bằng  $f(r(t_{i-1})) |r'(t_{i-1})| \Delta t_i$ . Tổng giá trị của  $f$  trên đường  $r$  được xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^m f(r(t_{i-1})) |r'(t_{i-1})| \Delta t_i.$$

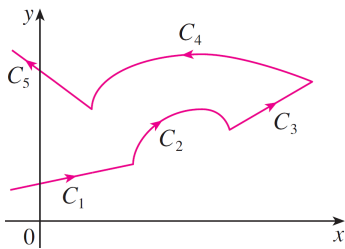
Vậy ta định nghĩa:

**Định nghĩa 3.1.3.** Cho  $f$  là một hàm xác định trên vết của đường  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tích phân của  $f$  trên  $r$  được kí hiệu là  $\int_r f ds$  và được định nghĩa là:

$$\int_r f ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt.$$

Để có tích phân thì đường đi phải khả vi. Nếu đường đi chỉ **khả vi từng khúc**, tức là có các số  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$  sao cho trên mỗi khoảng  $[t_{i-1}, t_i]$  ánh xạ  $r$  là khả vi, thì gọi  $r_i$  là hạn chế của đường  $r$  lên khoảng  $[t_{i-1}, t_i]$ , ta định nghĩa:

$$\int_r f ds = \sum_{i=1}^m \int_{r_i} f ds.$$



Hình 3.1.3: Đường khả vi từng khúc.

**Ví dụ 3.1.4.** Nếu  $f \equiv 1$  thì  $\int_r 1 \, ds = \int_a^b |r'(t)| \, dt$  là chiều dài của đường đi  $r$ .

**Ví dụ 3.1.5.** Xét trường hợp hai chiều,  $n = 2$ . Viết  $r(t) = (x(t), y(t))$ , khi đó

$$\int_r f \, ds = \int_a^b f((x(t), y(t))) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

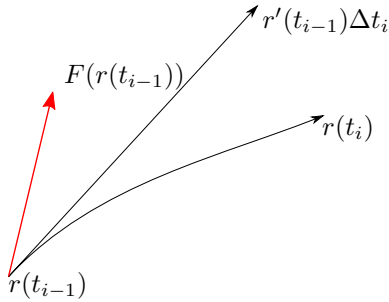
$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

### 3.1.3 Tích phân đường loại hai

Một trường vectơ là một tương ứng mỗi điểm với một vectơ. Chính xác hơn, một **trường vectơ** trên tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  là một ánh xạ  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Đôi khi để nhấn mạnh hoặc để dùng kí hiệu thường có trong vật lý ta để thêm mũi tên trên kí hiệu trường, viết là  $\vec{F}$ .

Cho đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  và cho  $F$  là một trường vectơ xác định trên vết của  $r$ . Ta muốn tính **tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi**.

**Ví dụ 3.1.6.** Trong vật lý, nếu một vật di chuyển theo một đường dưới tác động của một trường lực thì tổng tác động của lực, tức tổng thành phần của lực cùng chiều chuyển động, được gọi là **công** (work) của trường lực. Trong trường hợp đơn giản, nếu lực là hằng  $\vec{F}$  và vật chuyển động đều trên một đường thẳng theo một vectơ  $\vec{s}$  thì công của lực bằng chiếu của  $\vec{F}$  xuống  $\vec{s}$  nhân với  $|\vec{s}|$ , tức là  $|\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{s}) |\vec{s}| = \vec{F} \cdot \vec{s}$ .



Hình 3.1.4: Xấp xỉ tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi.

Xét một phép chia  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  của  $[a, b]$ . Trên mỗi khoảng con  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq m$ , ta xấp xỉ đường bằng xấp xỉ tuyến tính:  $r(t) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$ . Khi đó phần đường từ  $r(t_{i-1})$  đến  $r(t_i)$  được xấp xỉ bằng  $r'(t_{i-1})\Delta t_i$ . Trên phần đường này trường  $F$  có thể được xấp xỉ bằng trường hằng, đại diện bởi vectơ  $F(r(t_{i-1}))$ . Tổng của thành phần cùng chiều đường đi của trường  $F$  trên phần đường từ  $r(t_{i-1})$  đến  $r(t_i)$  được xấp xỉ bằng  $F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$ . Tổng thành phần tiếp tuyến của  $F$  dọc theo  $r$  được xấp xỉ bằng  $\sum_{i=1}^m F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$ .

Vậy ta định nghĩa:

**Định nghĩa 3.1.7.** Cho  $F$  là một trường vectơ trên vết của một đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tích phân của  $F$  trên  $r$  được kí hiệu là  $\int_r F \cdot d\vec{s}$  và được định nghĩa là:

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt.$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một.

**Ghi chú 3.1.8.** Có một số cách kí hiệu khác cho tích phân đường loại hai, chẳng hạn  $\int_r F \cdot d\vec{r}$ ,  $\int_r F \cdot d\vec{l}$ .

**Ví dụ 3.1.9.** Xét trường hợp hai chiều,  $n = 2$ . Viết  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  và  $r(t) = (x(t), y(t))$ . Khi đó

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Ta đưa ra hai tích phân mới:

$$\int_r P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) dt.$$

$$\int_r Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t) dt.$$

Người ta thường viết

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_r P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

$$d\vec{s} = r'(t) dt, \quad dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt.$$

### 3.1.4 Sự phụ thuộc vào đường đi

Như đã bàn ở đầu chương, ta rất quan tâm tới việc các kết quả đo đạc có thay đổi hay không nếu ta đi theo những đường đi khác nhau trên cùng một con đường.

Cho  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  là một phép đổi biến. Nếu  $\varphi'(t) > 0$  với mọi  $t \in [c, d]$  thì ta nói  $\varphi$  **bảo toàn định hướng**. Nếu  $\varphi'(t) < 0$  với mọi  $t \in [c, d]$  thì ta nói  $\varphi$  **đảo ngược định hướng**.

Nếu  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  là một đường đi thì  $r \circ \varphi$  là một đường đi cùng vết với  $r$ . Ta nói  $r \circ \varphi$  và  $r$  sai khác một phép đổi biến. Ta có kết quả đơn giản sau đây về sự bất biến của tích phân đường qua một phép đổi biến.

**Định lý 3.1.10 (đổi biến trong tích phân đường).** (a) *Tích phân đường loại một không thay đổi qua phép đổi biến.*

(b) *Tích phân đường loại hai không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng và đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.*

*Chứng minh.* Cho  $f$  là một hàm thực và  $F$  là một trường vectơ xác định trên vết của đường  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Cho  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  là một phép đổi biến. Ta xét trường hợp  $\varphi$  đảo ngược định hướng, trường hợp còn lại là tương tự. Theo công thức đổi biến của tích phân bội, với phép đổi biến  $u = \varphi(t)$  thì

$$\begin{aligned} \int_r f ds &= \int_a^b f(r(u)) |r'(u)| du = \int_c^d f(r(\varphi(t))) |r'(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_c^d f(r(\varphi(t))) |r'(\varphi(t))\varphi'(t)| dt \\ &= \int_c^d f(r \circ \varphi(t)) |(r \circ \varphi)'(t)| dt \\ &= \int_{r \circ \varphi} f ds. \end{aligned}$$

Trong khi đó

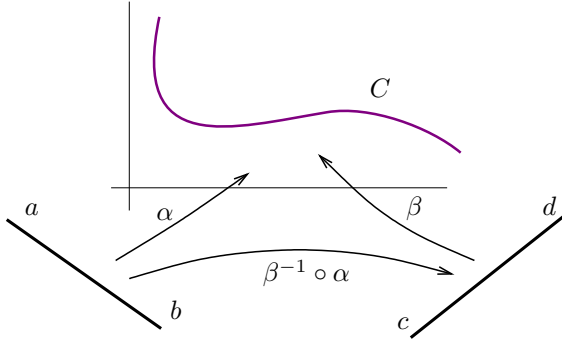
$$\begin{aligned}
 \int_r F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(u)) \cdot r'(u) du = \int_c^d [F(r(\varphi(t))) \cdot r'(\varphi(t))] |\varphi'(t)| dt \\
 &= - \int_c^d [F(r(\varphi(t))) \cdot r'(\varphi(t))] \varphi'(t) dt \\
 &= - \int_c^d F(r \circ \varphi(t)) \cdot (r \circ \varphi)'(t) dt \\
 &= - \int_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{s}.
 \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 3.1.11.** Cả hai loại tích phân đường không thay đổi dưới một phép tịnh tiến của biến thời gian  $t \mapsto t + c$  với  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 3.1.12.** Với đường đi  $r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  thì đường  $r(a+b-t)$ ,  $t \in [a, b]$ , khởi đầu ở  $r(b)$  và kết thúc ở  $r(a)$ , được gọi là **đường ngược** của đường  $r$ , kí hiệu là  $-r$ . Ta nói đường  $-r$  trái chiều với đường  $r$ . Định lý 3.1.10 nói **nếu đảo ngược định hướng của đường thì tích phân đường loại một không thay đổi trong khi đó tích phân đường loại hai bị đổi dấu**.

Đường đi  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  được gọi là **chính qui**<sup>1</sup> nếu  $r$  trơn trên  $[a, b]$  và vận tốc  $r'(t)$  luôn khác không.



Người ta có thể chứng tỏ hai đường đi đơn chính qui với cùng vết khác biệt bởi một phép đổi biến ([Vugt3]). Từ đó ta nói hai đường đi đơn chính qui có cùng vết là **có cùng định hướng** nếu chúng sai khác một phép đổi biến bảo toàn định hướng, và ngược lại nếu phép đổi biến là đảo ngược định hướng thì ta nói hai đường là **trái định hướng**.

Ta có kết quả chính của phần này ([Vugt3]):

**Định lý 3.1.13 (tích phân trên đường cong).** (a) *Tích phân đường loại một dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết thì bằng nhau.*

(b) *Tích phân đường loại hai dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết thì bằng nhau nếu cùng định hướng và đối nhau nếu trái định hướng.*

Như vậy ta có thể nói đến tích phân đường loại một (chẳng hạn chiều dài) trên một **tập điểm**, ví dụ như một đường tròn, một đồ thị, ... nếu tập điểm ấy là vết của một

<sup>1</sup>Trong quyển sách của Stewart [Ste16] thuật ngữ đường trơn chính là thuật ngữ đường chính qui ở đây.

đường đi đơn chính qui nào đó. Trong trường hợp này ta nói vết đó là một **đường cong** (curve).

Để tính tích phân trên một đường cong ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui bất kì để thực hiện tính toán. Đối với tích phân đường loại hai thì ta được cho thêm một “định hướng” trên đường cong và ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui có cùng định hướng bất kì để tính.

**Ví dụ 3.1.14.** Giả sử hàm thực  $f$  xác định trên khoảng  $[a, b]$ . Gọi  $\gamma$  là một đường chính qui bất kì đi từ  $a$  tới  $b$ . Vì khoảng  $[a, b]$  cũng là vết của đường đơn chính qui  $\alpha(t) = t$  với  $t \in [a, b]$  nên

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\alpha} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Đây chính là tích phân của hàm  $f$  trên khoảng  $[a, b]$ . Vậy tích phân của hàm thực trên khoảng là một trường hợp riêng của tích phân đường loại một.

**Ví dụ 3.1.15 (chiều dài của đường tròn).** Xét đường đi  $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , một đường đi với tốc độ hằng quanh đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ . Chiều dài của đường này là  $\int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R$ . Nếu ta lấy một đường đi khác  $\alpha(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , thì chiều dài của đường này là  $\int_0^1 2\pi R \, dt = 2\pi R$ .

Bây giờ ta có thể nói chiều dài của đường tròn bằng  $2\pi R$ , không phụ thuộc vào cách chọn một tham số hóa đơn chính qui để tính.

**Ví dụ 3.1.16.** Cho trường  $\vec{F}(x, y) = (2y, -3x)$  và  $C$  là đường cong  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , định hướng từ  $(0, 0)$  tới  $(1, 1)$ . Hãy tính  $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ .

Ta cần đưa ra một tham số hóa cho đường cong  $C$ . Vì  $C$  là một đồ thị, ta có ngay tham số hóa  $C_1(x) = (x, x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Ta cũng có thể dùng các tham số hóa khác như  $C_2(y) = (\sqrt{y}, y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , hoặc  $C_3(t) = (\ln t, \ln^2 t)$ ,  $1 \leq t \leq e$ . Đây đều là các đường đi đơn, chính qui với vết  $C$ , theo định hướng đã cho. Với  $C_1$ :

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_1(x)) \cdot C_1'(x) \, dx = \int_0^1 (2x^2, -3x) \cdot (1, 2x) \, dx = -\frac{4}{3}.$$

Với  $C_2$ :

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_2(y)) \cdot C_2'(y) \, dy = \int_0^1 (2y, -3\sqrt{y}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}, 1\right) \, dy = -\frac{4}{3}.$$

Với  $C_3$ :

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_1^e \vec{F}(C_3(t)) \cdot C_3'(t) \, dt = \int_1^e (2 \ln^2 t, -3 \ln t) \cdot \left(\frac{1}{t}, \frac{2 \ln t}{t}\right) \, dt \\ &= \int_1^e -4 \frac{\ln^2 t}{t} \, dt = -\frac{4}{3} \ln^3 t \Big|_1^e = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### \* Liên hệ giữa hai loại tích phân đường

Ta đưa ra định nghĩa **hướng tiếp tuyến** của đường cong được định hướng  $C$ , vết của một đường đi đơn chính qui  $r(t)$  theo hướng đã định,  $a \leq t \leq b$ , tại điểm  $p = r(t)$ ,  $a < t < b$ , là hướng của vectơ vận tốc  $r'(t)$ . Hướng này không phụ thuộc vào cách chọn đường đi đơn chính qui trên đó. Vì vậy việc định hướng cho đường cong đồng nghĩa với việc chọn hướng tiếp tuyến.

Tại điểm  $p = r(t)$  **vectơ tiếp tuyến cùng chiều đơn vị** được định nghĩa, đó là  $T(p) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ , không phụ thuộc vào cách chọn đường đi  $r$  theo định hướng của  $C$ .

Nếu  $F$  là một trường vectơ trên  $C$  thì

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \left[ F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \right] |r'(t)| dt \\ &= \int_a^b [F(r(t)) \cdot T(r(t))] |r'(t)| dt = \int_C F \cdot T ds.\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này tích phân đường loại hai có thể được biểu diễn qua tích phân đường loại một. Biểu thức trên cũng khẳng định lại ý nghĩa của tích phân loại hai, đó là tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường.

## Bài tập

### 3.1.1. Tính:

- (a) Chiều dài của đường  $r(t) = (2\sqrt{2}t, e^{-2t}, e^{2t})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- (b) Tính  $\int_C 4ydx + 2xdy$ , với  $C$  là đường  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
- (c) Tìm khối lượng của sợi dây hình parabol  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , với mật độ khối lượng  $\rho(x, y) = y/x$ .
- (d)  $\int_C \sin z^2 dx + e^x dy + e^y dz$ , với  $C$  là đường  $(2, t, e^t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- (e)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , với  $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, z, -xy)$  và  $C$  là đường  $(\cos \theta, \sin \theta, \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 9\pi/4$ .
- (f) Tìm công của trường  $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2, z^2 + x, yz)$  trên đường  $(t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**3.1.2.** Cho trường  $F(x, y) = (2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y})$ . Tính tích phân đường của trường này dọc theo một đường đi từ điểm  $(0, 0)$  tới điểm  $(1, 1)$  bằng các cách sau:

- (a) dùng đường thẳng,
- (b) dùng đường gấp khúc,
- (c) dùng đường khác.

**3.1.3.** (a) Một vật di chuyển trong trường trọng lực của Quả đất từ một điểm có cao độ 100 mét đến một điểm có cao độ 200 mét. Hỏi công của trọng lực là âm, bằng không, hay dương?  
 (b) Cho  $C$  là một đường và  $n$  là vectơ pháp tuyến. Hỏi  $\int_C n \cdot d\vec{s}$  là âm, bằng không, hay dương?

**3.1.4.** Phân tử DNA trong không gian ba chiều có hình dạng đường xoắn ốc kép, mỗi đường có thể được mô hình hóa bởi đường  $(R \sin t, R \cos t, ht)$  (hãy vẽ đường này). Bán kính của mỗi đường xoắn ốc khoảng 10 angstrom (1 angstrom =  $10^{-8}$  cm). Mỗi đường xoắn ốc xoắn lên khoảng 34 angstrom sau mỗi vòng xoay. Hãy ước tính chiều dài của mỗi vòng xoay của phân tử DNA.

**3.1.5.** \* Một sợi dây với hai đầu cố định dưới tác động của trọng trường sẽ có hình dạng một đường xích (catenary) với phương trình  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ , với  $\cosh$  là hàm hyperbolic cosine cho bởi  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ .

Đài tưởng niệm Gateway Arch ở Saint Louis nước Mỹ có dạng một đường xích đảo ngược. Vị trí điểm tâm hình học (cũng là tâm khối lượng của mặt cắt vuông góc) (centroid) của cổng được thiết kế theo công thức  $y = 693,8597 - 68,7672 \cosh 0,0100333x$  với  $y$  là khoảng cách tới mặt đất và  $-299,2239 \leq x \leq 299,2239$ , đơn vị đo là feet. Hãy tính chiều dài của đường tâm hình học.

**3.1.6.** \* Cầu Akashi-Kaikyo ở Nhật Bản hiện là một trong những cây cầu treo dài nhất thế giới. Hai tháp cao 297m tính từ mặt biển. Chiều dài nhịp chính (khoảng cách giữa hai tháp) là 1991m. Mỗi sợi cáp chính có dạng một đường parabola. Điểm thấp nhất của sợi cáp chính cách mặt biển khoảng 97m. Hãy tính chiều dài của một sợi cáp chính, bằng tính chính xác hoặc tính xấp xỉ.

**3.1.7.** Khi nào thì chiều dài của một đường đi bằng 0?

**3.1.8.** \* Cho đường đi chính qui  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Đặt

$$s(t) = \int_a^t |r'(u)| \, du.$$

Hàm  $s$  được gọi là **hàm chiều dài** của  $r$ . Đặt chiều dài của  $r$  là  $l = s(b)$ .

- (a) Chứng tỏ hàm  $s(t)$  có hàm ngược trơn. Gọi hàm đó là  $t(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ .
- (b) Kiểm tra rằng đường  $\alpha(s) = r(t(s))$  có cùng vết với đường  $r$ . Chứng tỏ tốc độ của  $\alpha$  luôn là 1.

Việc thay  $r$  bởi  $\alpha$  được gọi là **tham số hóa lại theo chiều dài**. Tham số hóa theo chiều dài được đặc trưng bởi tính chất tốc độ luôn bằng 1.

Chú ý rằng  $\frac{ds}{dt}(t) = |r'(t)|$ . Điều này thường được viết dưới dạng kí hiệu là  $ds = |r'(t)|dt$ .

**3.1.9.** Hãy kiểm tra rằng đường tròn tâm 0 bán kính  $R$  có tham số hóa theo chiều dài là

$$R(\cos\left(\frac{t}{R}\right), \sin\left(\frac{t}{R}\right)), 0 \leq t \leq 2\pi R.$$

**3.1.10.** Giả sử đường  $\gamma$  trong  $\mathbb{R}^n$  được tham số hóa theo chiều dài có vết  $C$ . **Độ cong** của đường  $C$  là tốc độ biến thiên của phương chuyển động, được cho bởi  $k = |\gamma''|$ .

- (a) Chứng tỏ độ cong của một đường thẳng bằng 0 tại mọi điểm.
- (b) Chứng tỏ độ cong của một đường tròn bán kính  $R$  đúng bằng  $\frac{1}{R}$  tại mọi điểm.
- (c) Hãy tính độ cong của đường xoắn (Ví dụ 1.4.2).

## 3.2 Công thức Newton–Leibniz và Công thức Green

### 3.2.1 Trường bảo toàn

**Định nghĩa 3.2.1.** Một trường vectơ  $F$  được gọi là **bảo toàn** nếu có hàm số thực  $f$ , gọi là một **hàm thế** của  $F$ , sao cho  $\nabla f = F$ .

Vectơ  $\nabla f(x)$  đại diện cho đạo hàm  $f'(x)$ , vì thế ta có thể hiểu là  $f' = F$ : hàm thế  $f$  chính là một **nguyên hàm** của hàm  $F$ .

Một trường bảo toàn còn được gọi là một **trường gradient**.

**Ví dụ 3.2.2 (trường hằng).** Giả sử  $c \in \mathbb{R}^n$  và  $F$  là trường trên  $\mathbb{R}^n$  cho bởi  $F(x) = c$ . Một nguyên hàm của  $F$  là  $f(x) = c \cdot x$ , vậy  $F$  là bảo toàn.

**Định lý 3.2.3 (công thức Newton–Leibniz).** Giả sử  $r$  là một đường đi trơn bất đầu ở  $A$  và kết thúc ở  $B$ . Cho  $f$  là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của  $r$ . Khi đó:

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

Định lý trên có một hệ quả là tích phân  $\int_r \nabla f \cdot d\vec{s}$  không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi  $r$  từ điểm  $A$  tới điểm  $B$ . Ta nói tích phân này là **độc lập với đường đi**.

Công thức trên có thể được hiểu như:

$$\int_A^B f' = f(B) - f(A).$$

Đây là dạng tổng quát hóa của công thức Newton–Leibniz của hàm một biến vốn được thường gọi là Định lý cơ bản của Vi Tích phân, vì vậy công thức này cũng được gọi là **Định lý cơ bản của tích phân đường**.

*Chứng minh.* Giả sử  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r(a) = A$  và  $r(b) = B$ . Khi đó theo công thức đạo hàm của hàm hợp và công thức Newton–Leibniz của hàm một biến:

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t) dt = f \circ r(b) - f \circ r(a).$$

□

**Hệ quả 3.2.4 (tích phân của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi).** Nếu  $F$  là một trường bảo toàn liên tục trên miền  $D$  thì tích phân của  $F$  trên một đường đi trơn trong  $D$  chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi.

**Hệ quả 3.2.5 (tích phân của trường bảo toàn trên đường đi kín bằng không).** Nếu  $F$  là một trường bảo toàn liên tục trên miền  $D$  thì tích phân của  $F$  trên một đường đi trơn kín trong  $D$  bằng không.

Những kết quả trong phần trên có thể được mở rộng cho các đường trơn từng khúc.

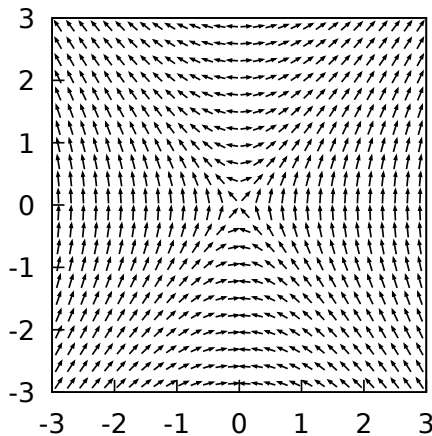
**Ví dụ 3.2.6.** Tính tích phân  $\int_C y dx + (x + 6y) dy$  trong đó  $C$  là một đường đi từ  $(1, 0)$  tới  $(2, 1)$ .

Ta tìm một hàm thế cho trường  $(y, x + 6y)$ . Ta giải hệ phương trình đạo hàm riêng để tìm nguyên hàm:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 6y. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được  $f(x, y) = \int y dx = xy + D(y)$ . Thay vào phương trình thứ hai ta được  $D'(y) = 6y$ , suy ra  $D(y) = \int 6y dy = 3y^2 + E$ . Vậy ta tìm được một hàm thế là  $f(x, y) = xy + 3y^2$ . Suy ra tích phân đã cho bằng  $f(2, 1) - f(1, 0) = 5$ .

**Ví dụ 3.2.7.** Dự đoán trường vectơ trong hình sau có bảo toàn quanh điểm giữa hay không?



Lấy một đường kín quanh điểm giữa, chẳng hạn một đường tròn hay đường vuông, ta thấy tích phân của trường dọc theo đường đó bằng 0. Do đó ta dự đoán trường trong hình là bảo toàn.

### \* Ý nghĩa vật lý của khái niệm trường bảo toàn

**Ví dụ 3.2.8.** Xét vật có khối lượng  $m$  ở trong không gian gần bề mặt quả đất. Ta xấp xỉ bằng cách giả sử trọng trường không đổi trong phần không gian này. Nếu ta đặt trục  $z$  vuông góc với mặt đất, chỉ ra ngoài, và gốc tọa độ trên mặt đất thì trọng lực tác động



lên vật là  $\vec{F} = -mg\vec{k} = (0, 0, -mg)$  trong đó  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  là hằng số trọng trường gần mặt đất. Ta tìm được hàm thế của trường này có dạng  $f(z) = -mgz + C$ . Trong vật lý ta thường cho thế năng của vật ở trên mặt đất là dương, còn thế năng tại mặt đất bằng 0, do đó thế năng của vật được cho bởi hàm  $U(z) = mgz$ . Như vậy hàm thế trong vật lý là đối của hàm thế trong toán.

**Ví dụ 3.2.9 (trường trọng lực).** Chính xác hơn, giả sử một vật có khối lượng  $M$  nằm ở gốc tọa độ trong  $\mathbb{R}^3$ , và một vật có khối lượng  $m$  nằm ở điểm  $\vec{r} = (x, y, z)$ , theo cơ học Newton, vật có khối lượng  $m$  sẽ chịu tác động của lực hấp dẫn từ vật có khối lượng  $M$  bằng

$$F(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

Ta tìm một nguyên hàm cho  $F$  bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -mMG \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -mMG \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -mMG \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, lấy tích phân theo  $x$  ta được

$$f(x, y, z) = \int -mMG \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx = \frac{mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + C(y, z).$$

Thay vào hai phương trình còn lại, ta được  $C(y, z)$  thực sự chỉ là một hằng số  $C$ . Vậy trường trọng lực là một trường bảo toàn với một hàm thế là  $f(\vec{r}) = \frac{mMG}{|\vec{r}|}$ .

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của **tổng lực**  $F$ . Giả sử trường  $F$  là bảo toàn với  $f$  là một hàm thế. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm  $t$  là  $r(t)$ . Giả sử  $r(t_0) = x_0$  và  $r(t_1) = x_1$ . Ta định nghĩa **động năng** (năng lượng từ chuyển động) của vật là  $K(t) = \frac{1}{2}m|r'(t)|^2$ ; và **thế năng** (năng lượng từ vị trí) của vật là  $U(x) = -f(x)$ .

Theo định lý cơ bản của tích phân đường:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = f(x_1) - f(x_0) = -(U(x_1) - U(x_0)).$$

Vậy công của trường bằng đối của biến thiên thế năng. Mặt khác theo cơ học Newton:  $F = ma = mr''$ . Do đó:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} mr''(t) \cdot r'(t) dt.$$

Bây giờ chú ý hệ thức (xem Bài tập 1.4.12)  $(r' \cdot r')' = r'' \cdot r' + r' \cdot r'' = 2r'' \cdot r'$ , hay  $r'' \cdot r' = \frac{1}{2}(|r'|^2)'$ , ta biến đổi

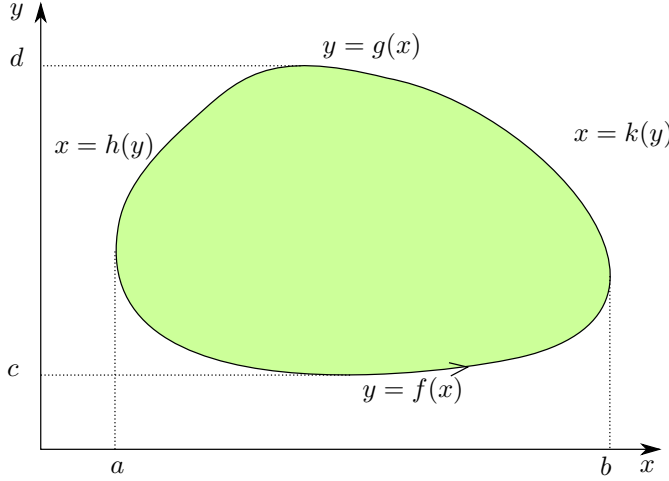
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} &= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} (|r'(t)|^2)' dt \\ &= \frac{1}{2} m |r'(t_1)|^2 - \frac{1}{2} m |r'(t_0)|^2 = K(t_1) - K(t_0). \end{aligned}$$

Vậy công của trường bằng biến thiên động năng. Ta kết luận  $K(t) + U(r(t))$  không đổi, vậy **tổng động năng và thế năng, tức năng lượng cơ học, được bảo toàn trong quá trình chuyển động trong trường bảo toàn.**

### 3.2.2 Công thức Green

Trong phần này ta chỉ làm việc trên mặt phẳng Euclid hai chiều  $\mathbb{R}^2$ .

Giả sử  $D$  là một miền đơn giản có biên trơn từng khúc trên  $\mathbb{R}^2$ . Cụ thể, như là một miền đơn giản theo chiều thẳng đứng,  $D$  có dạng  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$  trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là hàm trơn, trong khi đó theo chiều nằm ngang thì  $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\}$  trong đó  $h(y)$  và  $k(y)$  là hàm trơn.



**Biên của  $D$  phải được định hướng tương thích với  $D$ .** Miêu tả trực quan là: biên được định hướng sao cho khi đi trên biên thì miền nằm bên tay trái; hoặc: đặt bàn tay phải theo hướng của biên thì miền nằm ở phía lòng bàn tay. Chính xác như sau:  $\partial D$  được định hướng cùng chiều với định hướng của các đường đi  $\gamma_1(x) = (x, f(x))$ ,  $a \leq x \leq b$  và đường  $-\gamma_2$  với  $\gamma_2(x) = (x, g(x))$ ,  $a \leq x \leq b$ . Có thể kiểm tra được rằng đây cũng là định hướng của đường  $-\gamma_3$  với  $\gamma_3(y) = (h(y), y)$ ,  $c \leq y \leq d$  và đường  $\gamma_4$  với  $\gamma_4(y) = (k(y), y)$ ,  $c \leq y \leq d$ .

**Định lý 3.2.10 (công thức Green).** Cho  $D$  là một miền đơn giản với biên trơn từng khúc được định hướng tương thích. Giả sử  $(P, Q)$  là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Khi đó:

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \, dx \, dy.$$

*Chứng minh.* Ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P \, dx &= \int_{\gamma_1} P \, dx + \int_{\gamma_2} P \, dx - \int_{\gamma_3} P \, dx - \int_{\gamma_4} P \, dx \\ &= \int_a^b P(x, f(x)) \, dx - \int_a^b P(x, g(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Xem  $D$  là miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, do các đạo hàm riêng của trường là liên tục trên  $D$  nên ta có

$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} \, dA &= - \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \right) \, dx \\ &= \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))] \, dx. \end{aligned}$$

Vậy

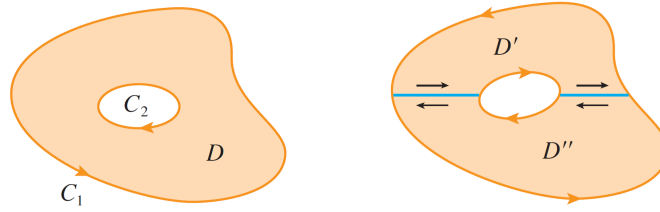
$$\int_{\partial D} P \, dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} \, dA.$$

Tương tự, xem  $D$  là miền đơn giản theo chiều nằm ngang, ta được

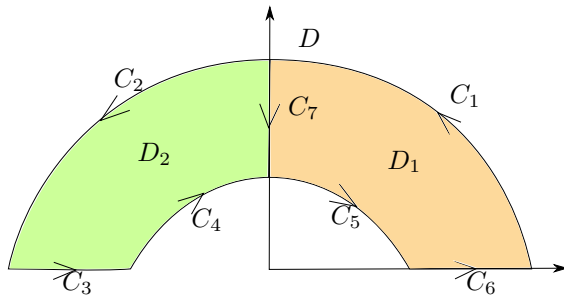
$$\int_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA.$$

Cộng lại ta được kết quả.  $\square$

Đối với một miền không đơn giản nhưng có thể được phân chia thành một hội của hữu hạn những miền đơn giản với những phần chung chỉ nằm trên biên, ta có thể áp dụng công thức Green cho từng miền đơn giản rồi cộng lại.



**Ví dụ 3.2.11.** Công thức Green vẫn đúng cho miền  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$ , mặc dù miền này không phải là một miền đơn giản.



Chia  $D$  thành hội của hai miền đơn giản  $D_1$  và  $D_2$  được miêu tả trong hình vẽ. Chú ý rằng khi được định hướng dương ứng với  $D_2$  thì đường  $C_7$  được định hướng ngược lại, trở thành  $-C_7$ , do đó hai tích phân đường tương ứng triệt tiêu. Áp dụng công thức Green cho  $D_1$  và  $D_2$  ta được:

$$\begin{aligned} \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA &= \iint_{D_1} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA + \iint_{D_2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA \\ &= \int_{\partial D_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\partial D_2} F \cdot d\vec{s} \\ &= \left( \int_{C_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_7} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_5} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F \cdot d\vec{s} \right) + \\ &\quad + \left( \int_{C_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F \cdot d\vec{s} + \int_{-C_7} F \cdot d\vec{s} \right) \\ &= \int_{C_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F \cdot d\vec{s} + \\ &\quad + \int_{C_5} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\partial D} F \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Điều kiện để trường vectơ phẳng là bảo toàn

**Định lý 3.2.12 (điều kiện cần để trường bảo toàn).** Nếu trường  $F = (P, Q)$  trơn và bảo toàn trên một tập mở chứa tập  $D$  thì trên  $D$  ta phải có

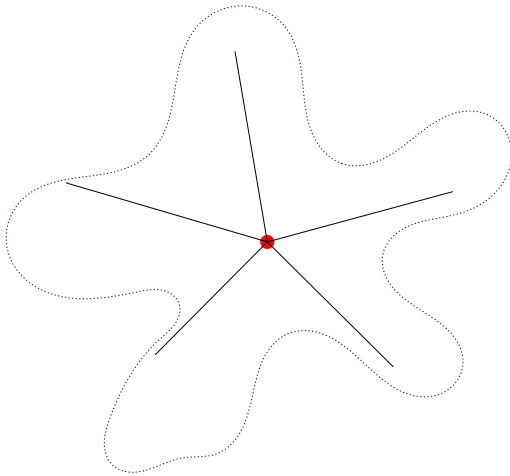
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

*Chứng minh.* Giả sử  $f$  là hàm thế của  $F$ . Khi đó  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$  và  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ . Với giả thiết về tính trơn như trên thì các đạo hàm riêng của  $P$  và  $Q$  tồn tại và liên tục trên  $D$ , và  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  và  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Vì  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  và  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau, do đó  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .  $\square$

**Ví dụ 3.2.13 ( $P_y = Q_x$  cần nhưng không đủ).** Dưới đây là một ví dụ kinh điển. Xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ta có  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  trên miền xác định là mặt phẳng bỏ đi điểm  $(0, 0)$ . Mặt khác, tính toán trực tiếp cho thấy nếu  $C$  là đường tròn bán kính đơn vị tâm tại  $(0, 0)$  ngược chiều kim đồng hồ thì  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi$  khác 0. Vậy  $\vec{F}$  không phải là một trường vectơ bảo toàn trên miền xác định của nó. Xem thêm ở Bài tập 3.2.9.



Hình 3.2.1: Miền hình sao.

Một tập  $D \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là một **miền hình sao** nếu có một điểm  $p_0 \in D$  sao cho với mọi điểm  $p \in D$  thì đoạn thẳng nối  $p_0$  và  $p$  được chứa trong  $D$ .

**Ví dụ 3.2.14.**  $\mathbb{R}^n$  là một miền hình sao. Một tập con lồi của  $\mathbb{R}^n$  là một miền hình sao.  $\mathbb{R}^n$  trừ đi một điểm không là miền hình sao.

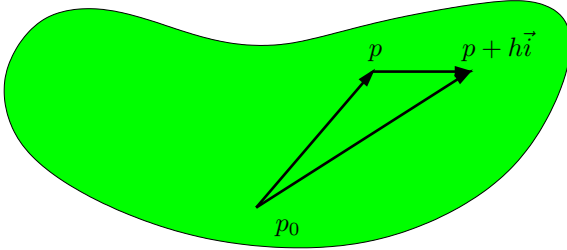
Kết quả dưới đây nói rằng nếu miền là mở hình sao thì điều kiện  $P_y = Q_x$  cũng là một điều kiện đủ để trường là bảo toàn.

**Định lý 3.2.15 (bổ đề Poincaré).** Giả sử  $F = (P, Q)$  là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao  $D$ . Nếu  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  trên  $D$  thì  $F$  là bảo toàn trên  $D$ .

*Chứng minh.* Để gợi ý, ở đây ta dùng kí hiệu  $\int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s}$  để chỉ tích phân của  $F$  trên đoạn thẳng  $p_0 + t(p - p_0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , nối điểm  $p_0$  với điểm  $p$ . Đặt

$$f(p) = \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s}.$$

thì đây chính là một hàm thế của  $F$ . Ta sẽ kiểm tra rằng  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ , chứng minh  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$



Hình 3.2.2: Bỏ đề Poincaré cho miền hình sao.

là tương tự. Theo định nghĩa của đạo hàm, với  $\vec{i} = (1, 0)$ , ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} \right].$$

Chú ý do  $D$  mở nên nếu  $h$  đủ nhỏ thì điểm  $p + h\vec{i}$  sẽ nằm trong  $D$ . Nếu ba điểm  $p_0$ ,  $p$  và  $p + h\vec{i}$  không cùng nằm trên một đường thẳng thì chúng tạo thành một tam giác. Tam giác này là một miền đơn giản do đó ta có thể áp dụng định lý Green cho miền này, dùng giả thiết  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , ta được tích phân đường trên biên của tam giác bằng 0, tức là

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} = \int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s}.$$

Công thức này cũng đúng nếu ba điểm là thẳng hàng. Viết  $p = (x, y)$ , và lấy đường đi thẳng từ  $p$  tới  $p + h\vec{i}$  là  $r(t) = (x + t, y)$  với  $0 \leq t \leq h$ , ta được

$$\int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} = \int_x^{x+h} P(t, y) dt.$$

Do đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t, y) dt = P(x, y).$$

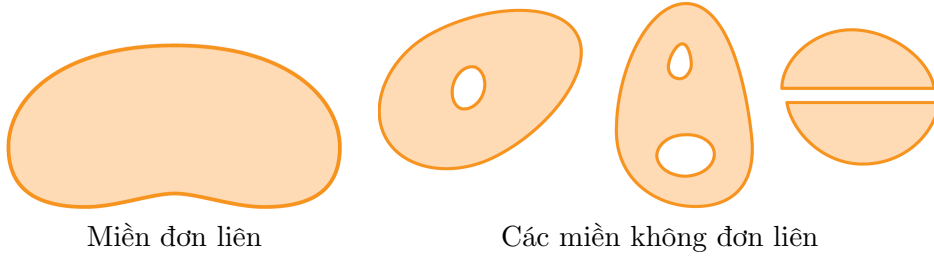
Đẳng thức cuối cùng là một kết quả quen thuộc trong Vi tích phân 1, có thể được kiểm dễ dàng sử dụng việc hàm  $P$  liên tục theo  $x$ , xem Bài tập 3.2.24.  $\square$

**Ví dụ 3.2.16.** Trường  $\vec{F}(x, y) = (e^{x^2}, y^3)$  có bảo toàn hay không?

Ta có  $\frac{\partial e^{x^2}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial y^3}{\partial x}$ . Miền xác định của trường là  $\mathbb{R}^2$ , một miền mở hình sao. Bỏ đề Poincaré áp dụng được, cho ta kết luận trường là bảo toàn trên miền xác định.

Nếu có một trường  $(P, Q)$  mà  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  nhưng lại không bảo toàn thì bỏ đề Poincaré cho biết miền xác định của trường không phải là một miền hình sao. Như vậy một giả thiết giải tích đã đưa đến một kết luận hình học.

Kết luận của bỏ đề Poincaré vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là **miền đơn liên**, đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng. Chi tiết chính xác vượt ra ngoài phạm vi môn học này.



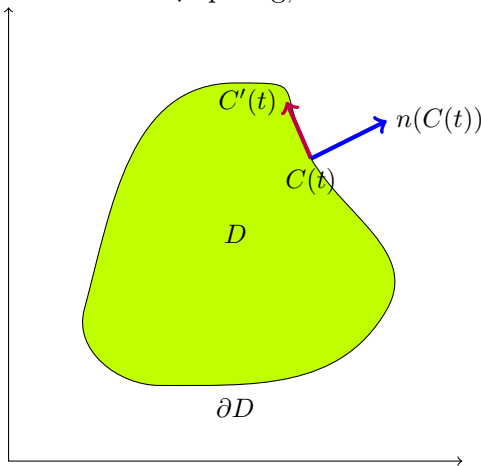
### \* Dạng thông lượng của công thức Green

Cho  $D$  là miền phẳng và  $F$  là một trường trên  $D$  sao cho ta có thể áp dụng công thức Green. Giả sử  $\partial D$  được tham số hóa theo chiều dương bởi  $C(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Vectơ vận tốc của đường biên là  $C'(t) = (x'(t), y'(t))$ . **Vectơ pháp tuyến ngoài**  $n$  của  $\partial D$  tại điểm  $(x(t), y(t))$  là

$$n = \frac{1}{|C'(t)|} (y'(t), -x'(t)).$$

Ta giải thích điều này sau đây. Vectơ  $(-y'(t), x'(t))$  vuông góc  $(x'(t), y'(t))$  (do tích vô hướng bằng 0), vậy  $n$  cùng phương với  $(-y'(t), x'(t))$ . Chiều của  $n$  được xác định theo nguyên tắc chiều từ pháp tuyến ngoài sang tiếp tuyến phải cùng chiều với chiều dương chuẩn tắc của mặt phẳng, tức là chiều từ  $(1, 0)$  sang  $(0, 1)$ .



Từ công thức Green:

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot n \, ds &= \int_a^b \langle (P(C(t)), Q(C(t))), \frac{1}{|C'(t)|} (y'(t), -x'(t)) \rangle |C'(t)| \, dt \\ &= \int_C -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA. \end{aligned}$$

Người ta thường đặt

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

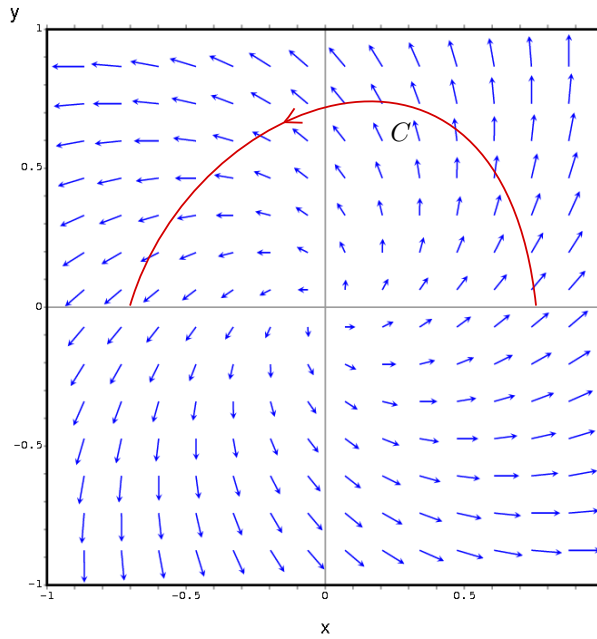
Toán tử  $\operatorname{div}$  sẽ được thảo luận nhiều hơn sau. Vậy

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot n \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dA.} \quad (3.2.1)$$

Tích phân  $\int_C F \cdot n \, ds$  là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của  $F$  dọc theo biên  $\partial D$ . Nếu  $F$  là một trường vectơ vận tốc thì tích phân này thể hiện **thông lượng** (flux) qua  $\partial D$ .

## Bài tập

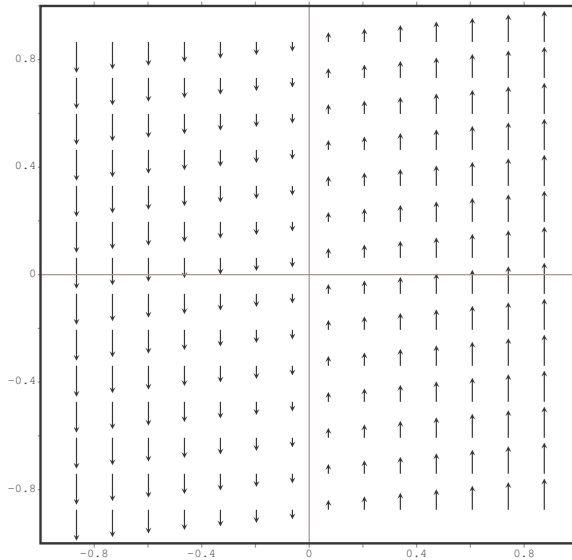
**3.2.1.** Hình 3.2.3 vẽ của một trường vectơ.



Hình 3.2.3:

- (a) Ước đoán trường có bảo toàn không?
- (b) Ước đoán tích phân của trường dọc theo đường  $C$  là âm, dương hay bằng 0?

**3.2.2.** Ước đoán trường trong Hình 3.2.4 có bảo toàn không?



Hình 3.2.4:

**3.2.3.** Tính:

- (a) Tìm một hàm  $f(x, y, z)$  sao cho  $f(0, 0, 0) = 6$  và  $\nabla f(x, y, z) = (2y, 2x, e^z)$ .
- (b) Tính công của trường lực  $F(x, y, z) = (2, 3y, 4z^2)$  khi vật đi từ điểm  $(1, 1, 1)$  tới điểm  $(1, 0, 0)$ .

- (c) Giải bài 3.1.2 bằng cách dùng hàm thế.
- (d) Tìm hàm thế cho trường  $(e^x \sin y - yz, e^x \cos y - yz, z - xy)$ .
- (e) Tính tích phân  $\int_C (2y - 3z) dx + (2x + z) dy + (y - 3x) dz$  với  $C$  là đường gấp khúc đi từ  $(0, 0, 0)$  tới  $(0, 1, 2)$  tới  $(3, 4, 3)$  rồi tới  $(2, 3, 1)$ .
- (f) Tính  $\int_C (x - 4y^2) dx + (\ln y - 8xy) dy$  với  $C$  là một đường trên nửa mặt phẳng  $y > 0$  đi từ điểm  $(-3, 4)$  tới điểm  $(2, 6)$ .
- (g) Tính  $\int_C (\sqrt{x} + 8xy) dx + (\sqrt{y} + 4x^2) dy$  với  $C$  là một đường trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng đi từ điểm  $(3, 2)$  tới điểm  $(4, 1)$ .
- (h) Trường sau có bảo toàn không? Nếu có tìm một hàm thế:

$$\left( xy - \sin z, \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x \cos z \right).$$

**3.2.4.** Cho  $C$  là đường  $y = x^3$  từ điểm  $(0, 0)$  tới điểm  $(1, 1)$ .

- (a) Tính  $\int_C 3y dx + 2x dy$ .
- (b) Dùng câu trên, tính  $\int_C (3y + ye^x) dx + (2x + e^x + e^y) dy$ .

**3.2.5.** Cho  $C$  là đường e-líp  $4x^2 + y^2 = 4$ .

- (a) Tính  $\int_C (e^x \sin y + 2y) dx + (e^x \cos y + 2x - 2y) dy$ .
- (b) Tính  $\int_C (e^x \sin y + 4y) dx + (e^x \cos y + 2x - 2y) dy$ .

**3.2.6 (điện trường là bảo toàn).** Định luật Coulomb<sup>2</sup> là một định luật của vật lý có được từ thực nghiệm được phát biểu như sau: Nếu trong  $\mathbb{R}^3$  có hai điện tích  $q_1$  và  $q_2$  thì điện tích  $q_1$  sẽ tác động lên điện tích  $q_2$  một lực bằng

$$F(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \vec{r},$$

trong đó  $\vec{r}$  là vectơ từ điểm mang điện tích  $q_1$  sang điểm mang điện tích  $q_2$ , và  $\epsilon_0$  là một hằng số. Để đơn giản ta giả sử điện tích  $q_1$  nằm ở gốc tọa độ, khi đó  $\vec{r} = (x, y, z)$  là vị trí của điện tích  $q_2$ . Chứng tỏ điện trường là một trường bảo toàn.

**3.2.7.** Chứng tỏ công của trọng trường do vật ở vị trí  $O$  tạo ra khi một vật khác di chuyển từ vị trí  $P$  tới vị trí  $Q$  chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ  $O$  tới  $P$  và khoảng cách từ  $O$  tới  $Q$ .

**3.2.8.** Tính công của trường lực bảo toàn tác động lên vật di chuyển từ điểm  $P$  tới điểm  $Q$  theo đường  $C$  trong Hình 3.2.5. Trong hình các đường cong khác  $C$  là các đường mức của một hàm thế với các mức tương ứng được ghi. Chú ý các đường mức này đều vuông góc với trường vectơ, vì trường là gradient của một hàm, xem Mục 1.4.3.

**3.2.9 (tiếp tục Ví dụ 3.2.13).** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , xét trường

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

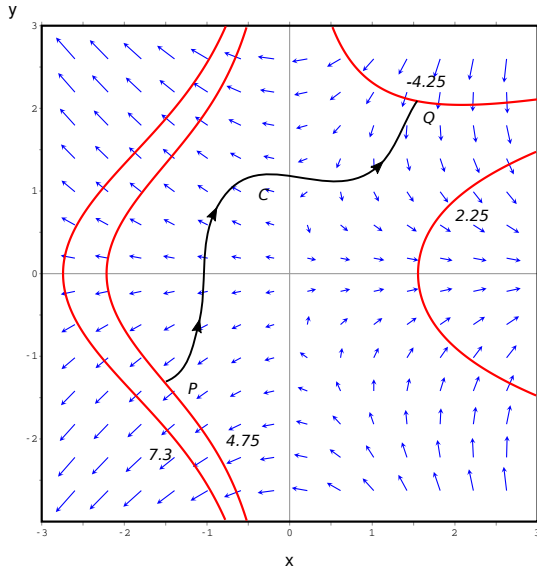
- (a) Kiểm tra rằng nếu  $x \neq 0$  thì  $F$  có một hàm thế là  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , với  $\theta$  chính là biến góc trong tọa độ cực. Người ta thường viết một cách hình thức

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

- (b) Có thể mở rộng  $\theta$  thành một hàm trơn trên toàn miền xác định của  $F$  không?
- (c) Tích phân  $\frac{1}{2\pi} \int_C d\theta$  được gọi **số vòng**, tính theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, của đường đi  $C$  quanh điểm  $O$ . Chứng tỏ số vòng của đường đi  $(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2n\pi$  đúng bằng  $n$ .

<sup>2</sup>Định luật này được phát biểu lần đầu tiên bởi Charles Coulomb năm 1785.





Hình 3.2.5:

**3.2.10.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

- Kiểm tra rằng  $P_y = Q_x$  trên miền xác định của  $F$ .
- Trường  $F$  có bảo toàn trên miền xác định không?

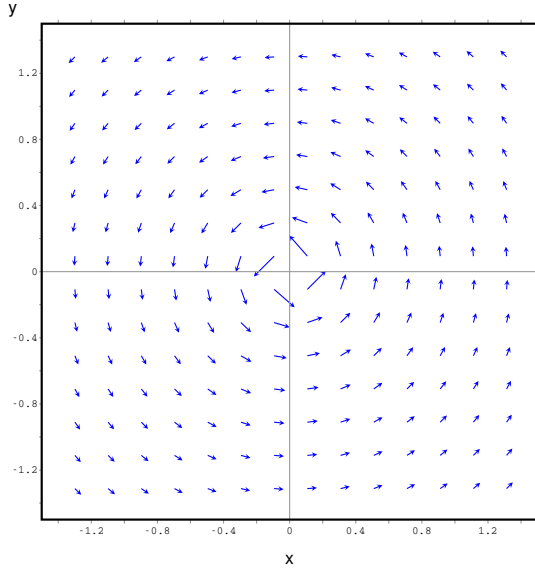
## Công thức Green

**3.2.11.** Tính:

- Cho  $C$  là biên của hình vuông  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân  $\int_C x^3 dx + (x + \sin(2y)) dy$ .
- Cho  $F(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ . Gọi  $T$  là tam giác với các đỉnh  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ , định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giải thích tại sao  $\int_T F \cdot d\vec{s} = 0$  bằng ba cách.
- Tính  $\int_C (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$  trong đó  $C$  là chu tuyến (đường biên) theo chiều dương của tam giác  $OAB$  với  $O = (0, 0)$ ,  $A = (2, 0)$ ,  $B = (4, 2)$  bằng cách tính trực tiếp và bằng công thức Green.
- Cho  $F(x, y) = (x^2 + y, x + \sqrt{y^4 + y^2 + 1})$ . Trường này có bảo toàn không? Gọi  $C(t) = (1 - \cos^2 t, \sin 2t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Tính  $\int_C F \cdot d\vec{s}$ .
- Cho  $F(x, y) = (y - 2xye^{-x^2}, e^{-x^2} + y)$ . Tính tích phân của trường này trên cung tròn đơn vị trong góc phần tư thứ nhất đi từ  $(1, 0)$  tới  $(0, 1)$ .
- Hãy kiểm chứng công thức Green trong trường hợp miền được bao bởi hai đường cong  $y = x$  và  $y = x^2$  và trường là  $(xy, y^2)$ .
- Tính tích phân  $\int_C 4y dx + 2x^3 dy$  với  $C$  gồm đoạn thẳng từ  $(-1, 0)$  tới  $(1, 0)$  và đoạn cong  $y = 1 - x^2$  nối hai điểm này bằng cách tính trực tiếp và cách dùng công thức Green.
- Tính tích phân  $\int_C x dx - 5y dy$  với  $C$  là đường e-líp  $x = 2 + 4 \cos \theta$ ,  $y = 3 + 2 \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  bằng 2 cách.

**3.2.12.** Gọi  $D$  là một miền trên đó công thức Green có thể áp dụng được. Chứng tỏ diện tích của  $D$  có thể được tính theo công thức

$$|D| = - \int_{\partial D} y dx = \int_{\partial D} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$



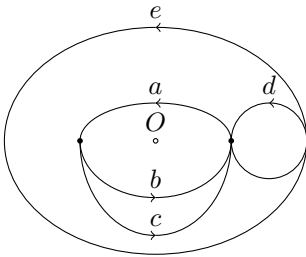
Hình 3.2.6: Trường  $\left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ .

**3.2.13.** Cho đường cong trong mặt phẳng  $(x, y)$  viết bằng phương trình dùng tọa độ cực  $r = 4 + 3 \cos(11\theta)$ , với  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (xem Hình 2.3.4). Dùng Bài tập 3.2.12, hãy tính diện tích của miền được bao bởi đường cong này.

**3.2.14.** Cho đường cong hình sao (astroid)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ .

- Vẽ đường này.
- Tính diện tích của miền bao bởi đường cong trên bằng cách dùng tích phân bội.
- Tính diện tích miền này bằng cách dùng tích phân đường, dùng tham số hóa của đường astroid:  $x = 2 \cos^3 \theta$ ,  $y = 2 \sin^3 \theta$ .

**3.2.15.** Cho  $\vec{F} = (P, Q)$  là trường vectơ trơn xác định trên mặt phẳng trừ điểm  $O$ , có  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  tại mọi điểm. Giả sử  $\int_a \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$  và  $\int_b \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2$  (xem Hình 3.2.7). Hãy tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $c$ ,  $d$ , và  $e$ .



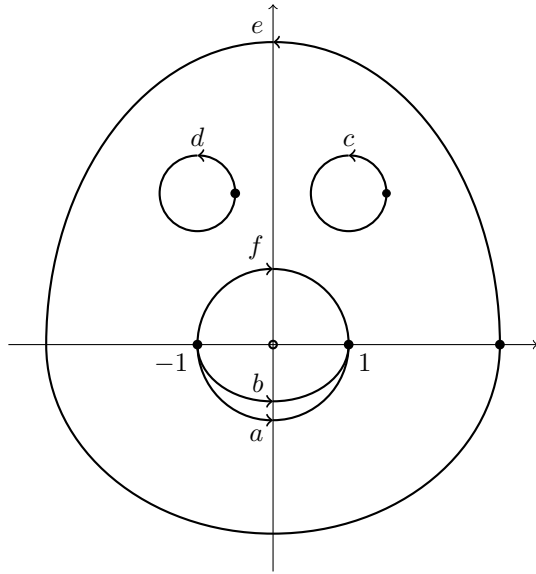
Hình 3.2.7:

**3.2.16.** Cho  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ . Cho  $C_1$  là đường e-líp  $9x^2 + 4y^2 = 36$  và  $C_2$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$ , đều được định hướng cùng chiều kim đồng hồ. Chứng tỏ tích phân của  $F$  trên  $C_1$  và trên  $C_2$  là bằng nhau.

**3.2.17.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( 2x - \frac{y}{x^2 + y^2}, 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

- (a) Trong hình vẽ  $a$  là một nửa đường tròn đi từ  $(-1, 0)$  tới  $(1, 0)$ . Tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $a$ .



- (b) Tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $f$  (một nửa đường tròn đi từ  $(-1, 0)$  tới  $(1, 0)$ ).  
 (c) Dùng công thức Green, hãy tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $c$  và  $d$ .  
 (d) Hãy tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $b$  (một đường đi từ  $(-1, 0)$  tới  $(1, 0)$ ).  
 (e) Hãy tính tích phân của  $\vec{F}$  trên  $e$ .

**3.2.18 (tích phân từng phần).** Cho  $D$  là miền đơn giản trên mặt phẳng có biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho  $f$  và  $g$  là hàm thực khả vi liên tục trên một tập mở chứa  $D$ . Hãy chứng minh công thức tích phân từng phần sau:

$$\iint_D f_x g \, dxdy = \int_{\partial D} f g \, dy - \iint_D f g_x \, dxdy.$$

**3.2.19.** Cho  $D$  là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho  $f$  là một hàm trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Hãy kiểm rằng:

- (a)

$$\int_{\partial D} f_x \, dx + f_y \, dy = 0.$$

- (b)

$$\int_{\partial D} -f_y \, dx + f_x \, dy = \iint_D \Delta f \, dxdy.$$

Ở đây với  $f(x, y)$  là hàm thực trên miền  $D \subset \mathbb{R}^2$  kí hiệu toán tử Laplace tác động vào  $f$  là  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

**3.2.20.** Cho  $D$  là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho  $(P, Q)$  là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Hãy kiểm rằng

$$\int_{\partial D} (QP_x - PQ_x) \, dx + (PQ_y - QP_y) \, dy = 2 \iint_D (PQ_{xy} - QP_{xy}) \, dxdy.$$

**3.2.21.** Kí hiệu đạo hàm của  $f$  theo hướng cho bởi vectơ đơn vị  $v$  là  $D_v f$ . Nhắc lại công thức  $D_v f = \nabla f \cdot v$ . Kí hiệu  $n$  là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của  $\partial D$ . Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các **công thức Green**, với giả thiết dạng thông lượng của công thức Green 3.2.1 có thể áp dụng được.

- (a)  $\int_{\partial D} D_n f \, ds = \iint_D \Delta f \, dA.$   
 (b)  $\int_{\partial D} (f \nabla g) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA.$   
 (c)  $\int_{\partial D} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g - g \Delta f) \, dA.$

**3.2.22 (diện tích của đa giác).** (a) Một tam giác trong mặt phẳng có 3 đỉnh có tọa độ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . Chứng tỏ diện tích của tam giác này bằng

$$\frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3|.$$

- (b) Tổng quát hơn, giả sử một đa giác trong mặt phẳng bao một miền mà công thức Green áp dụng được. Giả sử các đỉnh của đa giác này có tọa độ  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  với thứ tự theo định hướng “đa giác nằm bên trái” của công thức Green. Để cho tiện, đặt  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ . Khi đó ta có công thức cho diện tích của đa giác là

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

**3.2.23.** Giả sử nhiệt độ tại một điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng được cho bởi  $f(x, y)$ . Dùng công thức Green 3.2.21, hãy giải thích vì sao nếu phân bố nhiệt độ là **điều hòa**, nghĩa là  $\Delta f = 0$ , thì trên mỗi miền kín lượng nhiệt đi ra luôn đúng bằng lượng nhiệt đi vào.

**3.2.24.** Liên quan tới phần chứng minh của Định lý 3.2.15, hãy kiểm tra: Nếu  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và  $x \in [a, b]$  thì  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt = f(x)$ . Hãy chỉ ra rằng định lý cơ bản của Vi Tích phân hàm một biến nói rằng  $\int_a^x f(t) \, dt$  là một nguyên hàm của  $f$  trên  $[a, b]$  là một hệ quả của kết quả trên.

## 3.3 Tích phân mặt

Giống như đường, đối với chúng ta một **mặt** là một ánh xạ  $r$  từ một tập con  $D$  của  $\mathbb{R}^2$  vào  $\mathbb{R}^3$ . Tập ảnh  $r(D)$  được gọi là **vết** của mặt.

**Ví dụ 3.3.1.** Nửa trên của mặt cầu đơn vị là vết của mặt  $(x, y, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  với  $x^2 + y^2 \leq 1$  (tọa độ Euclid). Đó cũng là vết của mặt  $(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$  với  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  và  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  (tọa độ cầu).

### 3.3.1 Diện tích mặt

Cho mặt

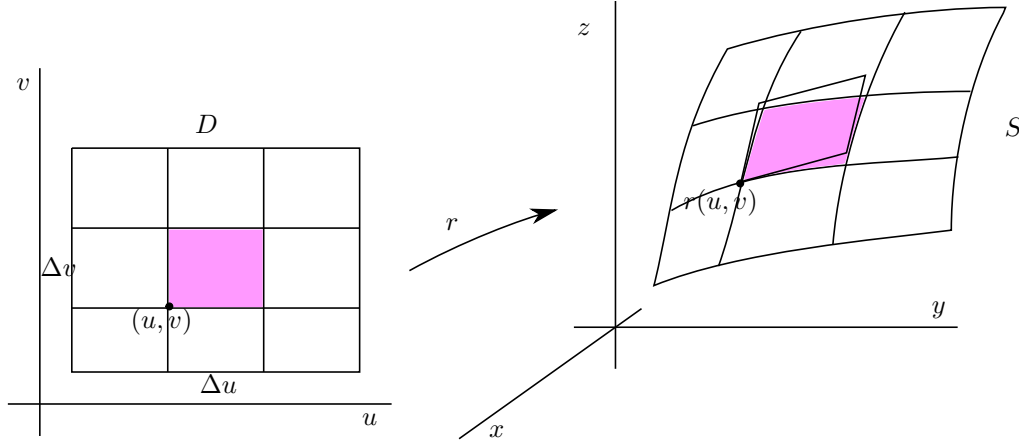
$$\begin{aligned} r : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto r(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Với một phép chia của  $D$  ta có một phép chia của mặt thành những mảnh nhỏ. Một hình chữ nhật con với kích thước  $\Delta u \times \Delta v$  sẽ được mang thành một mảnh trên mặt được xấp xỉ tuyến tính bằng hình bình hành xác định bởi các vectơ  $r_u(u, v)\Delta u$  và  $r_v(u, v)\Delta v$ . Diện tích của hình bình hành này được cho bởi độ lớn của tích có hướng của hai vectơ này, tức là  $|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|\Delta u \Delta v$ .

Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

**Định nghĩa 3.3.2.** Diện tích của mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  là

$$\iint_D |r_u \times r_v| \, du dv.$$



**Ví dụ 3.3.3 (mặt đồ thị).** Giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Xét mặt  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$  có vết là đồ thị của hàm  $f$ . Ta tính được  $r_x = (1, 0, f_x)$ ,  $r_y = (0, 1, f_y)$ ,  $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$ . Diện tích của mặt này là

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy.$$

Đặc biệt, nếu đây là một mặt phẳng, tức  $f \equiv 0$ , thì diện tích của mặt chính là diện tích của miền phẳng  $D$ .

### 3.3.2 Tích phân mặt loại một

Cho mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  và cho  $f$  là một hàm thực xác định trên vết  $S = r(D)$ . Ta muốn tính **tổng giá trị của hàm trên mặt**. Làm như trong phần diện tích mặt, trên mỗi mảnh con trên mặt ta xấp xỉ tuyến tính diện tích của mảnh con bằng diện tích của một hình bình hành, bằng  $|r_u(u, v) \times r_v(u, v)| \Delta u \Delta v$ , và xấp xỉ giá trị của hàm  $f$  bằng giá trị của nó tại một điểm  $r(u, v)$ . Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

**Định nghĩa 3.3.4.** Cho mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  với vết  $S = r(D)$ . Cho  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Tích phân mặt loại một của  $f$  trên  $r$  là

$$\boxed{\iint_r f \, dS = \iint_D f(r(u, v)) |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| \, dudv.}$$

**Ghi chú 3.3.5.** Trong các tài liệu khác tích phân mặt loại 1 còn được kí hiệu bằng  $\int_S f \, d\sigma$ ,  $\int_S f \, d\Sigma$ .

**Ví dụ 3.3.6.** Nếu  $f \equiv 1$  thì  $\iint_r 1 \, dS$  chính là diện tích của mặt  $r$ .

**Ví dụ 3.3.7 (mặt đồ thị).** Giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Xét mặt  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$  có vết là đồ thị  $S$  của hàm  $f$ . Giả sử  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Khi đó tích phân của  $g$  trên  $r$  là

$$\iint_r g \, dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy.$$

**Ghi chú 3.3.8.** Như đã thấy trong phần công thức đổi biến, Phương trình (2.3.2), ta có

$$|a \times b| = \sqrt{|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2} = \left[ \det \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ b \cdot a & b \cdot b \end{pmatrix} \right]^{1/2}.$$

Công thức này có thể được dùng để định nghĩa tích phân mặt loại 1 cho mặt trong  $\mathbb{R}^n$ , với  $n \geq 2$ , không phải hạn chế  $n = 3$  như ở đây. Khi  $n = 2$  đây chính là công thức đổi biến của tích phân bội.

### 3.3.3 Tích phân mặt loại hai

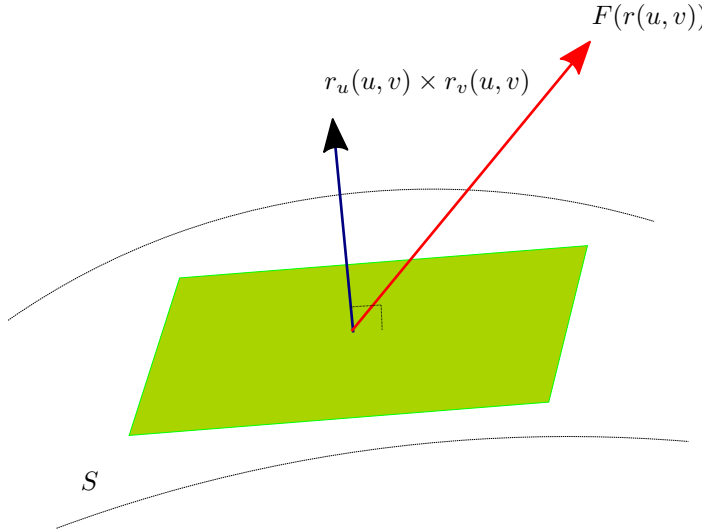
Cho mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  với vết  $S = r(D)$ . Cho  $F$  là một trường vectơ trên  $S$ , tức  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ta muốn tính **tổng của thành phần pháp tuyến của trường trên mặt**. Đại lượng này thường được dùng để đại diện cho lượng của trường đi xuyên qua mặt.

Như trong tích phân mặt loại một, diện tích của một mảnh con của mặt được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành  $|r_u(u, v) \times r_v(u, v)| \Delta u \Delta v$ .

Trên mảnh con trường  $F$  được xấp xỉ bằng giá trị của nó tại điểm  $r(u, v)$ . Vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt tại điểm  $r(u, v)$  là

$$\frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|}.$$

Thành phần pháp tuyến của vectơ  $F(r(u, v))$  là số thực



$$F(r(u, v)) \cdot \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|}.$$

Tổng thành phần pháp tuyến của  $F$  trên mảnh con đó được xấp xỉ bằng

$$F(r(u, v)) \cdot \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|} |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| \Delta u \Delta v = [F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v))] \Delta u \Delta v.$$

Từ đây ta đưa ra định nghĩa:

**Định nghĩa 3.3.9.** Cho mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  với vết  $S = r(D)$ . Cho  $F$  là một trường vectơ trên  $S$ , tức  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tích phân mặt loại hai của  $F$  trên  $r$  là

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v)) \, du dv.$$

**Ghi chú 3.3.10.** Ta tính được ngay

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k}.$$

Từ đó trong một số tài liệu người ta dùng thêm các tích phân mặt:

$$\iint_r P(x, y, z) \, dydz = \iint_r P\vec{i} \cdot d\vec{S} = \iint_r P(r(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \, dudv,$$

$$\iint_r Q(x, y, z) \, dzdx = \iint_r Q\vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_r Q(r(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \, dudv,$$

$$\iint_r R(x, y, z) \, dxdy = \iint_r R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_r R(r(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, dudv.$$

Với các kí hiệu này và  $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  thì

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_r (P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy).$$

Tuy nhiên trong tài liệu này ta ít dùng các kí hiệu này.

### 3.3.4 Định hướng

Tương tự như đã xảy ra với đường, trong nhiều ứng dụng ta muốn xem mặt như là một tập điểm chứ không phải là một ánh xạ. Bây giờ ta xây dựng quan điểm này.

Cho  $D$  và  $D'$  là hai tập con mở của  $\mathbb{R}^2$  và giả sử có một phép đổi biến  $\varphi$  từ  $D$  lên  $D'$ . Những phép đổi biến như vậy chúng ta đã nghiên cứu trong phần công thức đổi biến của tích phân bội. Nếu  $\det d\varphi$  luôn dương trên  $D$  thì  $\varphi$  được gọi là một **phép đổi biến bảo toàn định hướng**. Nếu  $\det d\varphi$  luôn âm thì  $\varphi$  được gọi là một **phép đổi biến đảo ngược định hướng**.

**Định lý 3.3.11 (bất biến của tích phân mặt qua phép đổi biến).** *Giả sử  $D$  và  $D'$  là hai tập con mở bị chặn của  $\mathbb{R}^2$  và  $\varphi : D' \rightarrow D$  là một phép đổi biến. Cho mặt trơn  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Khi đó:*

(a) *Tích phân mặt loại một không đổi qua phép đổi biến:*

$$\iint_r f \, dS = \iint_{r \circ \varphi} f \, dS.$$

(b) *Tích phân mặt loại hai không đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng:*

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

(c) *Tích phân mặt loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng:*

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = - \iint_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

*Chứng minh.* Theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp:

$$\frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Nhân hai vectơ này, và đơn giản hóa, ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial s} \times \frac{\partial(r \circ \varphi)}{\partial t} &= \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}.\end{aligned}$$

Viết cách khác:

$$(r \circ \varphi)_s \times (r \circ \varphi)_t = (r_u \times r_v) \det J_\varphi(s, t). \quad (3.3.1)$$

Bây giờ dùng công thức đổi biến của tích phân bội ta được điều phải chứng minh.  $\square$

Ta nói hai mặt  $r$  và  $r'$  có **cùng định hướng** nếu  $r'^{-1} \circ r$  là một phép đổi biến và bảo toàn định hướng; và **trái định hướng** nếu  $r'^{-1} \circ r$  là một phép đổi biến và đảo ngược định hướng. Mỗi lớp các tham số hóa có cùng định hướng của  $S$  được gọi là một **định hướng của mặt cong**  $S$ .

**Ví dụ 3.3.12 (định hướng của mặt cầu).** Xét phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z > 0$ . Tập điểm này có thể được tham số hóa như là một mặt đồ thị  $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . Một cách khác để tham số hóa tập này là dùng tọa độ cầu:  $x = \sin \phi \cos \theta, y = \sin \phi \sin \theta, z = \cos \phi$ , với  $0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$ . Với thứ tự  $(\phi, \theta)$  của tọa độ cầu, phép biến đổi  $(\phi, \theta) \mapsto (x, y)$  có  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \theta)} = \sin \phi \cos \phi > 0$ , do đó bảo toàn định hướng. Như vậy hai tham số hóa này có cùng định hướng.

Mặt  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  được gọi là:

- **đơn** nếu  $r$  là đơn ánh,
- **chính qui** nếu hai vectơ  $r_u(u, v)$  và  $r_v(u, v)$  xác định và luôn không cùng phương trên  $D$ ; nói cách khác vectơ  $r_u(u, v) \times r_v(u, v)$  luôn khác 0 trên  $D$ . Một cách trực quan, mặt là chính qui nếu pháp tuyến có thể được xác định.

**Ví dụ 3.3.13 (mặt đồ thị).** Cho hàm thực  $f$  trơn trên một tập mở chứa  $D$ . Xét mặt  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$  với  $(x, y) \in D$ . Vết của  $r$  là mặt đồ thị  $z = f(x, y)$ . Ta có  $r_x = (1, 0, f_x)$  và  $r_y = (0, 1, f_y)$ , do đó  $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$ . Vậy  $r$  là một mặt đơn, chính qui. Vì  $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$  hướng về nửa không gian trên ( $z > 0$ ) nên đây thường được gọi là **mặt hướng lên**.

Tương tự như cho đường, ta có kết quả rằng dưới những điều kiện nhất định thì hai mặt khác nhau bởi một phép đổi biến ([Vugt3]):

**Mệnh đề 3.3.14.** Cho  $D$  và  $D'$  là tập con đóng, bị chặn của  $\mathbb{R}^2$  và cho  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  và  $r' : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$  là hai mặt đơn, liên tục, và chính qui trên phần trong của miền xác định, có cùng vết. Khi đó  $r(\partial D) = r'(\partial D')$ , và  $r'^{-1} \circ r : \overset{\circ}{D} \rightarrow \overset{\circ}{D}'$  là một phép đổi biến.

Ta gọi tập  $r(\partial D) = r'(\partial D')$ , ảnh của biên của miền xác định của mặt, là **biên của mặt cong**  $S = r(D) = r'(D')$ , kí hiệu là  $\partial S$ .

Dùng Mệnh đề 3.3.14 và Định lý 3.3.11 ta có thể phát biểu một kết quả như sau:

**Định lý 3.3.15 (tích phân trên mặt cong).** Trên những mặt đơn xác định trên tập con đóng bị chặn có diện tích của  $\mathbb{R}^2$ , chính qui trên tập mở chứa miền xác định, với cùng vết, thì:

- tích phân mặt loại một là như nhau,
- tích phân mặt loại hai là như nhau nếu hai mặt cùng định hướng và đối nhau nếu hai mặt trái định hướng.



Như vậy ta có thể nói tới tích phân mặt trên một tập điểm (một mặt cong) nếu tập điểm đó là vết của một mặt như trong định lý trên và bây giờ ta có thể dùng kí hiệu  $\iint_S f \, dS$  và  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .

**Ví dụ 3.3.16 (diện tích mặt cầu).** Xét phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất, tức tập hợp  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

Tham số hóa phần này như là một mặt đồ thị  $r(x, y) = (x, y, z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ ,  $x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$ . Đây là một tham số hóa đơn, liên tục. Ta tính được ngay  $(r_x \times r_y)(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$ , tuy nhiên đại lượng này chỉ có nghĩa trên phần trong của miền xác định, tức là tập  $x^2 + y^2 < R^2, x > 0, y > 0$ . Diện tích của phần mặt cầu  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$  tính theo tham số hóa này bằng

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 < R^2, x>0, y>0} |(r_x \times r_y)(x, y)| \, dxdy &= \iint_{x^2+y^2 < R^2, x>0, y>0} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \pi R^2/2. \end{aligned}$$

Tham số hóa tập  $A$  bằng tọa độ cầu  $s(\phi, \theta) = R(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Đây là một tham số hóa đơn, chính qui, với  $(s_\phi \times s_\theta)(\phi, \theta) = R^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ . Tập  $B$  ứng với  $s$  hạn chế lại trên phần trong của miền xác định, tức  $0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$ . Áp dụng Định lý 3.3.14 và Mệnh đề 3.3.11 ta có diện tích của phần mặt cầu  $B$  tính theo  $s$  phải đúng bằng diện tích tính theo tham số hóa  $r$  ở trên. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \iint_{0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2} |(s_\phi \times s_\theta)(\phi, \theta)| \, d\phi d\theta &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \pi R^2/2. \end{aligned}$$

Từ đây ta nói diện tích của mặt cầu bán kính  $R$  là  $4\pi R^2$ .

Từ tính toán trên ta cũng có thể ghi lại một công thức cho phần tử diện tích của mặt cầu

$$dS = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Có thể thấy việc tính diện tích mặt cầu bằng cách chia thành nhiều phần như trên dẫn tới những câu hỏi, chẳng hạn về sự phụ thuộc vào cách chia. Ở đây chúng ta không giải quyết được hết các vấn đề, cần các khảo cứu nâng cao hơn.

**Ví dụ 3.3.17.** Tính tích phân của trường  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$  trên mặt  $S$  là đồ thị  $z = x^2 + y^2$ , với  $x^2 + y^2 \leq 1$ , định hướng lên trên. Mặt  $S$  có thể được tham số hóa bởi mặt đơn, chính qui  $r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , trên miền  $x^2 + y^2 \leq 1$ , xem Ví dụ 3.3.13. Tham số hóa này cho định hướng lên trên như yêu cầu. Vậy:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\vec{F} \circ r) \cdot (r_x \times r_y) \, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 1) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-2x^2 - 2y^2 + 1) \, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r^2 + 1)r \, dr \, d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

### \* Pháp tuyến của mặt. Liên hệ giữa hai loại tích phân mặt

Dưới các giả thiết của Mệnh đề 3.3.14, giả sử  $r$  và  $r'$  có cùng định hướng. Giả sử  $p = r(u, v) = r'(s, t)$  với  $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$  và  $(s, t) \in \overset{\circ}{D}'$ . Theo Phương trình (3.3.1) tại  $p$  hai vectơ  $r_u \times r_v$  và  $r'_s \times r'_t$  có cùng phương cùng chiều. Vậy tại  $p$  vectơ pháp tuyến đơn vị

$$n(p) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|} = \frac{r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)}{|r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)|}$$

được xác định không phụ thuộc vào cách chọn tham số hóa cùng định hướng. Vì vậy **việc định hướng mặt có đồng nghĩa với việc chọn chiều pháp tuyến.**

Ta có

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r(u, v)) \cdot \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|} |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| \, dA \\ &= \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v)) \, dA \\ &= \iint_S F \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\boxed{\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot n \, dS.}$$

Điều này khẳng định lại rằng tích phân mặt loại hai là tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt.

## Bài tập

### 3.3.1. Tính:

- Tính diện tích phần mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $3 \leq z \leq 5$ .
- Cho  $S$  là mặt xác định bởi  $z = x^2 + y$  với  $1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Tính  $\iint_S x \, dS$ .
- Cho  $S$  là mặt cầu tâm 0 bán kính 2. Tính  $\iint_S z^4 \, dS$ .
- Cho  $S$  là tam giác trong  $\mathbb{R}^3$  với các đỉnh  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Tính  $\iint_S y \, dS$ .
- Cho  $S$  là mặt trụ  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Tính  $\iint_S z \, dS$ .
- Cho  $\vec{F}(x, y, z) = (-x, y, z)$ . Cho  $S$  là mặt tứ diện bao bởi các mặt phẳng  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + 2y + z = 2$ , định hướng ra ngoài. Tính tích phân  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .
- Cho khối  $E$  xác định bởi điều kiện  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 2$ . Gọi  $S$  là mặt biên của  $E$ , định hướng ra ngoài. Cho  $F(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$ . Tính thông lượng của  $F$  qua  $S$ .
- Tính tích phân của trường  $(x, y, z - 2y)$  trên mặt  $(s \cos t, s \sin t, t)$ ,  $0 \leq s \leq 2$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Hãy vẽ mặt này (bằng máy tính).

### 3.3.2. Cho mặt elliptic paraboloid $z = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$ , $z \leq 5$ .

- Bằng cách đổi biến  $\frac{x}{3} = r \cos \theta$ ,  $\frac{y}{4} = r \sin \theta$  đưa ra một phương trình tham số của mặt.
- Tính xấp xỉ diện tích của mặt này.

**3.3.3.** Cho  $S$  là mặt  $z = xy$  với  $0 \leq x \leq 2$  và  $0 \leq y \leq 3$ . Tính tích phân mặt

$$\iint_S xyz \, dS$$

ra số thập phân.

**3.3.4.** Mặt helicoid có phương trình tham số  $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ ,  $1 < r < 2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Vẽ mặt này. Giả sử một vật có hình dạng một mặt helicoid có mật độ khối lượng tỉ lệ với khoảng cách tới trục, cụ thể  $\rho(x, y, z) = r$ . Hãy tính khối lượng của vật này.

**3.3.5.** Trên bề mặt Quả đất, tọa độ kinh tuyến và vĩ tuyến có liên hệ chặt chẽ với tọa độ cầu. Đặt hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với  $O$  ở tâm Quả đất, trục  $Oz$  đi qua Cực Bắc, và phần tư đường tròn từ tia  $Oz$  sang tia  $Ox$  đi qua Greenwich, nước Anh. Giả sử một điểm có tọa độ là  $\varphi^\circ$  vĩ độ Bắc và  $\lambda^\circ$  kinh độ Đông, khi đó tọa độ cầu của điểm đó là  $\phi = (90 - \varphi)^\circ$  và  $\theta = \lambda^\circ$  (tuy nhiên nhớ là trong tọa độ cầu góc cần được đo bằng radian).

Thành phố Hồ Chí Minh nằm trong vùng từ  $10^\circ 10'$  tới  $10^\circ 38'$  vĩ độ Bắc và  $106^\circ 22'$  tới  $106^\circ 54'$  kinh độ Đông ( $1' = 1/60^\circ$ ). Tính diện tích của vùng này. Bán kính của Quả đất là 6378 km.

**3.3.6.** Cho  $v = (y^2, x^2, z^2 + 2y)$  là trường vectơ vận tốc (đơn vị centimeter/giây) của một dòng chất lỏng trong  $\mathbb{R}^3$ . Hãy tính tốc độ chất lỏng đi qua mặt cầu đơn vị tâm tại gốc tọa độ (tức là thể tích chất lỏng đi qua mặt trong một đơn vị thời gian).

**3.3.7 (định luật Gauss về điện trường).** Gọi  $E$  là điện trường gây bởi điện tích  $q$  tại điểm  $O$ . Lấy quả cầu  $B(O, R)$  tâm  $O$ , định hướng ra ngoài. Dùng định luật Coulomb (3.2.6), hãy tính tích phân và chứng tỏ

$$\iint_{\partial B(O, R)} E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Vậy thông lượng của điện trường qua một mặt cầu tâm tại vị trí của điện tích tỉ lệ với điện tích (xem dạng tổng quát hơn ở Mục 3.4.2).

**3.3.8.** Giá trị trung bình của hàm  $f$  trên mặt  $S$  được định nghĩa bằng

$$\frac{1}{|S|} \iint_S f \, dS.$$

Nhiệt độ trên một mái vòm hình nửa mặt cầu bán kính 20 mét tỉ lệ với cao độ, cụ thể nhiệt độ tại điểm  $(x, y, z)$  trên mặt cầu  $x^2 + y^2 + (z - 50)^2 = 20^2$  là  $T(x, y, z) = \frac{1}{2}z$ . Hãy tính nhiệt độ trung bình trên mái vòm này.

**3.3.9 (diện tích mặt tròn xoay).** Giả sử  $f(x)$  dương, trơn trên  $[a, b]$ . Hãy tính diện tích của mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đồ thị  $y = f(x)$  quanh trục  $x$ .

**3.3.10.** Tính diện tích mặt ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**3.3.11.** Tính diện tích mặt nón cân với đáy là hình tròn bán kính  $R$  và chiều cao  $h$ .

**3.3.12.** Không cần tính, hãy cho biết giá trị của tích phân

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x \, dS.$$

**3.3.13.** Cho  $S$  là mặt cầu tâm 0 bán kính  $R$ . Hãy tính  $\iint_S x^2 \, dS$  mà không cần tham số hóa.

Có thể làm theo ý sau đây:

(a) Chứng tỏ, mà không cần tính, rằng  $\iint_S x^2 \, dS = \iint_S y^2 \, dS = \iint_S z^2 \, dS$ .

(b) Tính  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$  mà không cần tham số hóa.

**3.3.14.** Hãy tính  $\iint_S (x, y, z) \cdot d\vec{S}$  trong đó  $S$  là mặt cầu tâm 0 bán kính  $R$  định hướng ra ngoài, mà không tham số hóa, tức là hãy tính nhẩm!

## 3.4 Công thức Stokes và Công thức Gauss–Ostrogradsky

### 3.4.1 Công thức Stokes

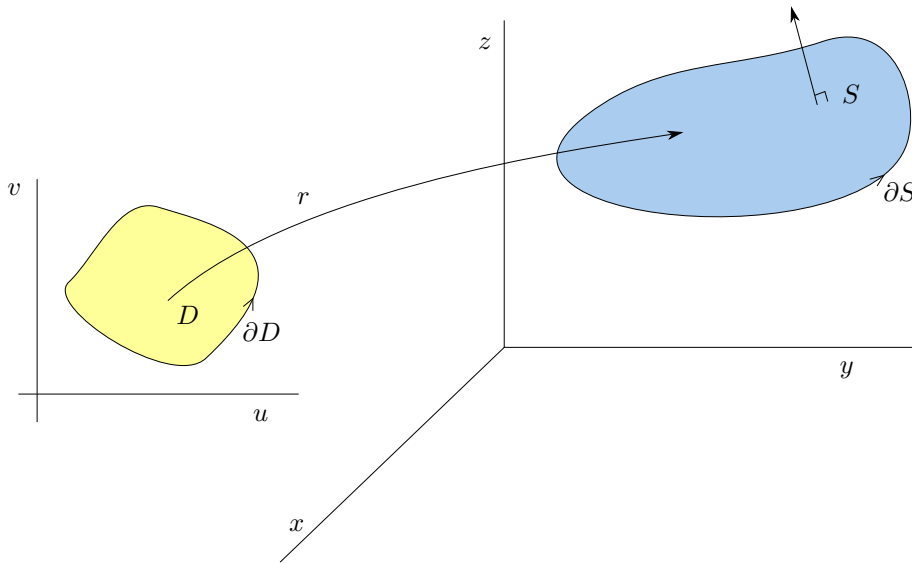
**Định nghĩa 3.4.1.** Cho  $F = (P, Q, R)$  là trường theo ba biến  $(x, y, z)$  trên  $\mathbb{R}^3$  thì

$$\text{curl } F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức, với  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , thì  $\text{curl } F = \nabla \times F$ . Trường  $\text{curl } F$  còn được gọi là **trường xoay** của trường  $F$ . Toán tử  $\text{curl}$  còn được kí hiệu là  $\text{rot}$ <sup>3</sup>.

Dạng chính của công thức Stokes được dùng trong môn học này là

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{curl } F \cdot d\vec{S}.$$



Trong công thức này **biên  $\partial S$  cần được định hướng tương thích với định hướng của  $S$** . Một cách miêu tả trực quan cho định hướng trên biên  $\partial S$  là khi đi dọc theo biên theo chiều đã định, thân người hướng theo chiều pháp tuyến đã chọn của  $S$  thì mặt  $S$  phải nằm bên tay trái. Một cách miêu tả khác là: **đặt lòng bàn tay phải hướng theo chiều của biên thì ngón tay cái chỉ chiều của pháp tuyến của mặt**.

Công thức Stokes là một phát triển của công thức Green lên không gian ba chiều. Thực vậy, nếu  $S$  là miền phẳng và  $F$  là một trường phẳng trên  $S$  thì  $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ . Công thức Stokes trở thành

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx + Q dy &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S} = \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot k dS \\ &= \iint_S (Q_x - P_y) dS = \iint_S (Q_x - P_y) dxdy, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Trong tiếng Anh curl có nghĩa là xoắn, cuộn, quăn, ...; còn rotation nghĩa là sự xoay

chính là công thức Green.

Công thức Stokes còn có thể được viết ở dạng tọa độ:

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R_y - Q_z) dydz + (P_z - R_x) dzdx + (Q_x - P_y) dxdy.$$

Tuy chúng ta ít dùng dạng trên trong môn này nhưng nó thể hiện rõ hơn sự tương tự của công thức Stokes với công thức Green.

Dưới đây là một phát biểu chính xác mà ta có thể chứng minh được:

**Định lý 3.4.2 (công thức Stokes).** Cho miền phẳng  $D$  có biên  $\partial D$  là vết của đường  $\gamma$  có hướng tương thích với  $D$  và giả sử công thức Green có thể áp dụng được cho  $D$ . Cho mặt  $r$  trơn cấp hai trên một tập mở chứa  $D$ . Gọi  $\partial r = r \circ \gamma$  là đường biên của  $r$ . Cho trường  $F$  trơn trên một tập mở chứa vết của  $r$ . Khi đó:

$$\int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} = \iint_r \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

*Chứng minh.* Chứng minh dưới đây tuy chứa những biểu thức dài dòng nhưng chỉ gồm những tính toán trực tiếp và việc áp dụng công thức Green. Viết  $F = (P, Q, R)$  và  $(x, y, z) = r(u, v)$ . Viết  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , một tham số hóa theo định hướng dương của  $\partial D$ . Ta được (trong vài biểu thức dưới đây biến được lược bỏ cho gọn hơn):

$$\begin{aligned} \int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot \frac{d}{dt} r(u(t), v(t)) dt \\ &= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot (r_u u' + r_v v') dt \\ &= \int_a^b [P(x, y, z)(x_u u' + x_v v') + Q(x, y, z)(y_u u' + y_v v') + \\ &\quad + R(x, y, z)(z_u u' + z_v v')] dt \\ &= \int_a^b [(P(x, y, z)x_u + Q(x, y, z)y_u + R(x, y, z)z_u)u' + (P(x, y, z)x_v + \\ &\quad + Q(x, y, z)y_v + R(x, y, z)z_v)v'] dt \\ &= \int_{\gamma} (Px_u + Qy_u + Rz_u) du + (Px_v + Qy_v + Rz_v) dv. \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng công thức Green cho  $D$  ta được tích phân trên bằng

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial u} (Px_v + Qy_v + Rz_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Px_u + Qy_u + Rz_u) \right] dudv.$$

Tính các đạo hàm hàm hợp, chẳng hạn

$$(Px_v)_u = (P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u) x_v + Px_{uv},$$

và đơn giản hóa, dùng tính trơn cấp hai của  $r$ , ta được tích phân trên bằng

$$\begin{aligned} &\iint_D [(R_y - Q_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (P_z - R_x)(z_u x_v - x_u z_v) + \\ &\quad + (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u)] dudv \\ &= \iint_D [\operatorname{curl}(P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v)] dudv = \iint_r \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

□

Ta có thể phát biểu một hệ quả độc lập với tham số hóa, là dạng thường gặp trong môn học này, sử dụng các khái niệm đã được đưa ra ở Mệnh đề 3.3.14:

**Định lý 3.4.3.** *Giả sử  $S$  là vết của một mặt xác định trên tập đóng bị chặn, có biên là vết của một đường chính qui từng khúc, trên đó công thức Green áp dụng được. Giả sử mặt này là đơn, chính qui, hơn nữa trơn cấp hai trên tập mở chứa miền xác định. Giả sử  $S$  và  $\partial S$  có định hướng tương thích. Cho trường  $F$  trơn trên một tập mở chứa  $S$ . Khi đó*

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

**Ví dụ 3.4.4.** Cho  $F(x, y, z) = (x^2, y^3, z^4)$ . Cho  $C$  là đường tam giác với các đỉnh  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 0, -1)$ ,  $(4, 3, 1)$ , định hướng theo thứ tự đó. Ta tính  $\int_C F \cdot d\vec{s}$ .

Có thể tính trực tiếp hoặc dùng phương pháp trường bảo toàn, nhưng bây giờ ta có thêm một công cụ là công thức Stokes. Đường tam giác  $C$  bao hình tam giác  $S$  với định hướng sinh bởi  $C$ . Áp dụng công thức Stokes:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Ở đây  $\operatorname{curl} F = 0$ . Vậy tích phân trên bằng 0.

**Ví dụ 3.4.5.** Cho  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ . Gọi  $C$  là giao của mặt phẳng  $x + y + z = 1$  với mặt trụ  $x^2 + y^2 = 1$ , định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Ta tính  $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$  bằng hai cách: tính trực tiếp, và dùng công thức Stokes.

- (a) Tính trực tiếp: Ta lấy một tham số hóa của đường  $C$  là  $C(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Tính trực tiếp  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_C F(C(t)) \cdot C'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t(1 - \cos t - \sin t) + (1 - \cos t - \sin t) \cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t) dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

- (b) Dùng công thức Stokes: Trước hết tính được  $\operatorname{curl} F(x, y, z) = (-y, -z, -x)$ . Tham số hóa mặt  $S$  bao bởi  $C$  bởi  $r(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Tham số hóa này có vectơ pháp tuyến tương ứng là  $r_x \times r_y(x, y) = (1, 1, 1)$ , hướng lên, do đó phù hợp với định hướng cần thiết trong công thức Stokes. Bây giờ:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \operatorname{curl} F(x, y) \cdot (r_x \times r_y(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-y, -(1-x-y), -x) \cdot (1, 1, 1) dx dy = -\pi. \end{aligned}$$

### \* Điều kiện để trường ba chiều là bảo toàn

**Mệnh đề 3.4.6** ( $\operatorname{curl} \operatorname{grad} = 0$ ). *Nếu  $f$  là hàm thực có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó  $\operatorname{curl}(\nabla f) = 0$ .*

Dùng kí hiệu hình thức thì  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ .

*Chứng minh.* Tương tự như trường hợp hai chiều, tính trực tiếp ta được

$$\operatorname{curl} \nabla f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0.$$

□

**Hệ quả 3.4.7 (điều kiện cần để trường ba chiều là bảo toàn).** Nếu  $F$  là trường trơn bảo toàn trên một tập mở thì  $\operatorname{curl} F = 0$  trên đó. Nói cách khác điều kiện sau phải được thỏa:

$$\begin{cases} R_y = Q_z \\ P_z = R_x \\ Q_x = P_y. \end{cases}$$

Ta có thể dùng kết quả này để chứng tỏ một trường là không bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng  $\operatorname{curl}$  của nó khác 0.

**Ví dụ 3.4.8.** Trường  $F(x, y, z) = (y, x, y)$  có bảo toàn trên  $\mathbb{R}^3$  hay không?

Trường  $F$  trơn cấp một trên  $\mathbb{R}^3$ . Nếu  $F$  là bảo toàn thì phải có  $\operatorname{curl} F = 0$ . Nhưng trong trường hợp này  $\operatorname{curl} F = (1, 0, 0) \neq 0$ , vậy  $F$  không bảo toàn.

Bằng cách chứng minh tương tự ở 3.2.15 nhưng thay công thức Green bởi công thức Stokes ta được:

**Mệnh đề 3.4.9 (bổ đề Poincaré ba chiều).** Nếu  $F$  trơn trên một miền mở hình sao trong  $\mathbb{R}^3$  và  $\operatorname{curl} F = 0$  thì  $F$  là bảo toàn trên đó.

## 3.4.2 Công thức Gauss-Ostrogradsky

**Định nghĩa 3.4.10.** Cho  $F = (P, Q, R)$  là trường theo ba biến  $(x, y, z)$  trên  $\mathbb{R}^3$  thì

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức thì  $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$ . Hàm  $\operatorname{div} F$  còn được gọi là **hàm phân tán** (divergence) của trường  $F$ .

Công thức Gauss-Ostrogradsky <sup>4</sup> còn được gọi là công thức Divergence <sup>5</sup>. Đây là tổng quát hoá của dạng thông lượng của công thức Green 3.2.1, cho một công thức có dạng

$$\iint_{\partial E} P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy = \iiint_E (P_x + Q_y + R_z) \, dxdydz.$$

Dưới đây ta sẽ phát biểu và chứng minh công thức này cho khối đơn giản theo cả ba chiều. Theo mỗi chiều thì khối là miền nằm giữa hai đồ thị. Chẳng hạn theo chiều trục  $z$  thì khối là  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ , với  $D$  đóng, bị chặn, có diện tích. Giả sử thêm rằng trên  $\partial D$  thì  $f = g$  hoặc  $f < g$ . Giả sử các hàm  $f, g$  là trơn thì biên  $\partial E$  là hội của mặt dưới là  $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$  (chính qui, hướng xuống), mặt trên là  $\{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$  (chính qui, hướng lên), ngoài ra nếu trên  $\partial D$  mà  $f < g$  thì biên còn gồm mặt bên hông là  $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ . Giả sử thêm  $\partial D$  là vết của một đường chính qui từng khúc. Ta nói  $E$  là một **khối đơn giản với biên trơn từng mảnh**.

**Ví dụ 3.4.11.** Quả cầu đóng, khối ellipsoid, khối hộp chữ nhật là những khối đơn giản với biên trơn từng mảnh.

<sup>4</sup>tên Ostrogradsky còn được viết là Ostrogradski

<sup>5</sup>trong tiếng Anh “divergence” có nghĩa là sự phát tán, sự phân kì, sự phân rã, ...

**Định lý 3.4.12 (công thức Gauss-Ostrogradsky).** Cho trường  $F$  trơn trên một tập mở chứa một khối đơn giản  $E$  với biên trơn từng mảnh được định hướng ra ngoài. Khi đó:

$$\iint_{\partial E} F \cdot n \, dS = \iint_{\partial E} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV.$$

*Chứng minh.* Viết  $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ . Viết  $E$  như là khối đơn theo chiều  $Oz$  như là tập hợp những điểm  $(x, y, z)$  với  $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$  trong đó  $f, g$  là hàm trơn xác định trên miền phẳng  $D$ . Ta sẽ chứng tỏ

$$\iint_{\partial E} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial}{\partial z} R \, dV.$$

Tương tự ta chứng minh hai biểu thức tương ứng cho hai chiều còn lại, cộng lại và được đẳng thức phải được chứng minh.

Nếu  $f < g$  trên  $\partial D$  thì  $\partial E$  có mặt hông, nhưng tích phân của  $R\vec{k}$  bằng không trên đó, cơ bản là vì mặt hông chứa những đoạn thẳng thẳng đứng, nên pháp tuyến của mặt hông nằm ngang, vuông góc với trường  $R\vec{k}$ , chi tiết đầy đủ hơn có ở [Vugt3].

Như vậy tích phân của  $R\vec{k}$  trên  $\partial E$  bằng tổng tích phân của  $R\vec{k}$  trên mặt trên và mặt dưới, là các mặt đồ thị, bằng:

$$\begin{aligned} \iint_D R(x, y, g(x, y))\vec{k} \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dA + \\ + \iint_D R(x, y, f(x, y))\vec{k} \cdot (f_x, f_y, -1) \, dA \\ = \iint_D [R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))] \, dA. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo công thức Fubini

$$\begin{aligned} \iiint_E R_z \, dV &= \iint_D \left( \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} R_z \, dz \right) dA \\ &= \iint_D (R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) \, dA. \end{aligned}$$

Vậy ta được đẳng thức mong muốn.  $\square$

**Ví dụ 3.4.13.** Dùng công thức Gauss-Ostrogradsky, ta tính thông lượng của trường  $F(x, y, z) = (2x + e^y z, x^2 y, yz)$  qua mặt cầu đơn vị  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  định hướng ra ngoài:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2+z^2=1} F \cdot d\vec{S} &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dxdydz \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (2 + x^2 + y) \, dxdydz \\ &= 2\frac{4\pi}{3} + \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 \rho^2 \sin \phi \, d\theta d\phi d\rho + 0 \\ &= \frac{8\pi}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{44\pi}{15}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.4.14.** Hãy tính thông lượng của trường  $F(x, y, z) = (x, y, 2 - 2z)$  qua mặt  $S$  cho bởi  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ , định hướng lên trên, bằng hai cách: (a) tính trực tiếp, và (b) tính thông lượng của  $F$  qua một mặt khác và dùng định lý Gauss-Ostrogradsky.



(a) Tham số hóa mặt  $S: r(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$  với  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Có  $r_x \times r_y(x, y) = (2x, 2y, 1)$  hướng lên trên.

$$\begin{aligned} I &= \iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} F(r(x, y)) \cdot (r_x \times r_y)(x, y) \, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 2 - 2(1 - x^2 - y^2))(2x, 2y, 1) \, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 4(x^2 + y^2) \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \, r dr d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

(b) Gọi  $S_1$  là mặt cho bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ , định hướng xuống dưới. Mặt  $S$  cùng  $S_1$  tạo thành mặt kín  $S_2$  bao khối  $E$ . Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky:

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV = \iiint_D 0 \, dV = 0.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} F \cdot n \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 2 - 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -2 \, dA = -2\pi. \end{aligned}$$

Do đó  $\iint_S F \cdot d\vec{S} = 2\pi$ .

Tính trực tiếp từ công thức tương tự như ở Mệnh đề 3.4.6 ta có kết quả sau:

**Mệnh đề 3.4.15** (**div curl = 0**). Nếu  $F$  là trường có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$ .

Viết bằng kí hiệu hình thức:  $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ . Kết quả này cho một điều cần để một trường là trường curl của một trường khác.

### \* Ý nghĩa vật lý của div và curl

Trước hết ta cần bổ đề sau đây:

**Bổ đề 3.4.16.** Cho  $f$  là một hàm thực khả tích trên một lân cận của điểm  $p \in \mathbb{R}^n$  và liên tục tại  $p$ . Gọi  $B'(p, r)$  là quả cầu đóng tâm tại  $p$  với bán kính  $r$ . Khi đó:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{B'(p, r)} f = f(p).$$

Vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục quanh một điểm tiến về giới hạn là giá trị của hàm tại điểm đó.

*Chứng minh.* Vì  $f$  liên tục tại  $p$  nên cho  $\epsilon > 0$ , với  $r$  đủ nhỏ thì với mọi  $q \in B'(p, r)$  ta có  $|f(q) - f(p)| \leq \epsilon$ . Từ đó

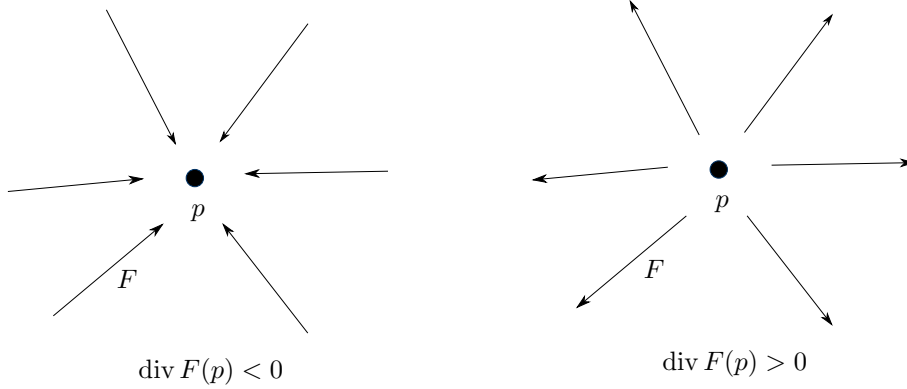
$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{B'(p, r)} f \right) - f(p) \right| &= \left| \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{B'(p, r)} [f(q) - f(p)] \right| \\ &\leq \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{B'(p, r)} |f(q) - f(p)| \\ &\leq \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{B'(p, r)} \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Áp dụng bổ đề trên cho  $\text{div}$  ta được

$$\text{div } F(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B'(p, r)|} \iiint_{B'(p, r)} \text{div } F \, dA = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B'(p, r)|} \iint_{\partial B'(p, r)} F \cdot n \, dS. \quad (3.4.1)$$

Tích phân  $\iint_{\partial B'(p, r)} F \cdot n \, dS$  là thông lượng của trường  $F$  ra khỏi mặt cầu  $\partial B'(p, r)$ . Vậy  $\text{div } F(p)$  *chỉ độ phát tán của trường  $F$  trên đơn vị thể tích quanh  $p$ .*

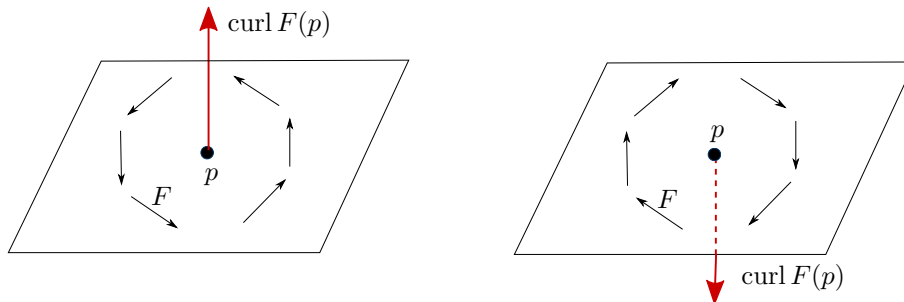


Xét một điểm  $p$ . Lấy một mặt phẳng qua  $p$  với phương định bởi pháp tuyến  $n$ . Xét hình tròn  $B'(p, r)$  trên mặt phẳng này với tâm tại  $p$  và bán kính  $r$ . Ta có:

$$\text{curl } F(p) \cdot n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B'(p, r)|} \iint_{B'(p, r)} \text{curl } F \cdot n \, dA = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B'(p, r)|} \int_{\partial B'(p, r)} F \cdot d\vec{s}. \quad (3.4.2)$$

Vậy  $\text{curl } F(p) \cdot n$  thể hiện lưu lượng ngược chiều kim đồng hồ (độ xoay) của trường  $F$  trên phần tử diện tích quanh  $p$  trong mặt phẳng qua  $p$  vuông góc  $n$ .

Ta có  $\text{curl } F(p) \cdot n$  đạt giá trị lớn nhất khi  $n$  cùng phương cùng chiều với  $\text{curl } F(p)$ . Vậy  $\text{curl } F(p)$  cho phương của mặt phẳng mà trên đó độ xoay của trường quanh  $p$  là lớn nhất, chiều của nó được xác định bởi chiều xoay của trường theo quy tắc bàn tay phải. Hơn nữa có thể chứng tỏ là độ lớn của  $\text{curl } F(p)$  tỉ lệ với tốc độ xoay theo góc của trường quanh  $p$ . Nói vắn tắt,  $\text{curl } F(p)$  *chỉ sự xoay của trường  $F$  tại điểm  $p$ .* Từ điều này tích phân  $\iint_S \text{curl } F \cdot d\vec{S}$  còn được gọi là *lưu lượng* (circulation) của trường  $F$  trên mặt  $S$ .



Ta có một miêu tả trực quan cho  $\text{curl } F(p)$ : Tưởng tượng rằng ta thả một cái chong chóng vào trường, cố định nó tại điểm  $p$  nhưng để cho nó tự do đổi hướng và tự do xoay. Khi đó hướng ổn định của chong chóng chính là hướng của  $\text{curl } F(p)$ , chiều xoay của nó chính là chiều xoay của trường, còn vận tốc xoay của chong chóng chỉ độ xoay của trường quanh  $p$ .

**Ghi chú 3.4.17.** Công thức cho  $\text{div}$  (3.4.1) và cho  $\text{curl}$  (3.4.2) cho thấy chúng là những đại lượng vật lý, không phụ thuộc hệ tọa độ.

## \* Ứng dụng

### Điện từ

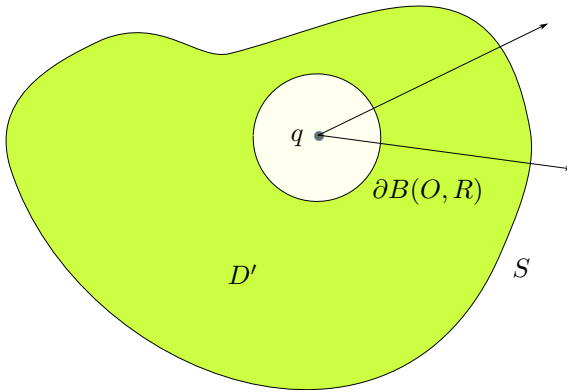
Gọi  $E$  là điện trường gây bởi điện tích  $q$  tại điểm  $O$ . Giả sử  $S$  là một mặt kín, biên của khối  $D$ . Giả sử công thức Gauss-Ostrogradsky có thể áp dụng được cho  $D$ . Nhắc lại từ 3.4.21 là  $\operatorname{div} E = 0$ . Nếu  $D$  không chứa điểm  $O$  thì

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Nếu  $D$  chứa điểm  $O$  ở phần trong, nói cách khác nếu  $S$  bao điểm  $O$ , thì lấy một quả cầu  $B(O, R)$  đủ nhỏ sao cho nó không cắt  $S$ , và cho biên  $\partial B(O, R)$  định hướng ra ngoài  $B(O, R)$ . Khi đó  $S$  cùng  $\partial B(O, R)$  tạo thành biên của một khối  $D'$  không chứa  $O$ . Giả sử công thức Gauss-Ostrogradsky có thể áp dụng được cho  $D'$ , ta được

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B(O, R)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{D'} \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Suy ra  $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(O, R)} E \cdot d\vec{S}$ . Ở Bài tập 3.3.7, dùng Định luật Coulomb (Bài tập 3.2.6), ta đã tính được  $\iint_{\partial B(O, R)} E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ .



Vậy

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

thông lượng của điện trường qua một mặt kín bao điện tích không phụ thuộc vào mặt và tỉ lệ với điện tích. Đây là nội dung của định luật được phát biểu bởi Johann Carl Friedrich Gauss.<sup>6</sup>

Ở trên ta vừa trình bày định luật Coulomb và định luật Gauss cho một điện tích. Trong trường hợp môi trường chứa điện tích tại mọi điểm (môi trường liên tục) thì ta có:

Định luật Coulomb	Định luật Gauss
$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , với $\rho$ là hàm mật độ điện tích	$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$ , với $D$ là khối được bao bởi mặt $S$ và $Q$ là tổng điện tích trên $D$

Tuy có thể chỉ ra rằng hai định luật là tương đương về mặt toán học, nhưng Định luật Gauss có thể được kiểm chứng bằng thí nghiệm dễ hơn Định luật Coulomb, vì Định luật Gauss có tính vĩ mô trong khi Định luật Coulomb có tính vi mô.

<sup>6</sup>Trong các tài liệu vật lý định luật Gauss thường được phát biểu mà không kèm theo điều kiện gì về tính trơn của mặt và của các hàm trong công thức.

Không lâu sau hai định luật Coulomb và Gauss, trong thập kỷ 1820, André Marie Ampère phát hiện ra rằng một dòng điện tạo ra quanh nó một từ trường theo định luật:

$$\int_C B \cdot d\vec{s} = \mu_0 I,$$

trong đó  $C$  là một đường cong kín bao quanh một dòng điện có cường độ không đổi  $I$ ,  $B$  là từ trường, và  $\mu_0$  là một hằng số.

Năm 1831 Michael Faraday phát hiện rằng một từ trường thay đổi theo thời gian tới lượt nó lại tạo ra một điện trường. Định luật Faraday cho công thức:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}.$$

Năm 1864, James Clerk Maxwell phát triển định luật Ampère và thống nhất điện trường với từ trường:

Các phương trình Maxwell	
Dạng vi phân	Dạng tích phân
(1) (Coulomb) $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gauss) $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ , với $S$ là một mặt kín
(2) $\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	(Faraday) $\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}$
(3) $\operatorname{div} B = 0$	$\iint_S B \cdot d\vec{S} = 0$ , với $S$ là một mặt kín
(4) (Ampère) $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \operatorname{curl} B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$ , với $J$ là mật độ dòng điện	$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \int_{\partial S} B \cdot d\vec{s} = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{d}{dt} \iint_S E \cdot d\vec{S}$ , với $I$ là cường độ dòng điện qua mặt $S$

Chẳng bao lâu sau lý thuyết của Maxwell đã được ứng dụng trong thực tế với việc phát minh ra sóng điện từ của Heinrich Hertz năm 1887. Các phương trình Maxwell cùng với các định luật của Newton tổng kết vật lý cổ điển.

## Cơ học chất lỏng

Gọi  $\vec{F}$  là trường vận tốc chuyển động của một dòng chất lỏng. Nếu  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (tại mọi điểm) thì người ta nói dòng chất lỏng là không nén được (incompressible) (vì nó không có chỗ bơm vào lẫn chỗ thoát ra). Các toán tử vi phân của Giải tích vectơ xuất hiện phổ biến trong mô hình hóa các hiện tượng cơ học. Chẳng hạn, một trong những phương trình quan trọng nhất mô tả dòng chảy chất lỏng cho tới nay vẫn đang được tập trung nghiên cứu là phương trình Navier–Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F} - \nu \Delta \vec{F} &= -\nabla w + \vec{g}, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= 0. \end{cases}$$

## Bài tập

### Công thức Stokes

**3.4.1.** Trường sau có bảo toàn hay không?

(a)  $F(x, y, z) = (y, x, y).$

(b)  $F(x, y, z) = (2xe^{x^2}, z \sin y^2, z^3).$

**3.4.2.** Cho  $S$  là mặt  $z = x^2 + y^2$  với  $z \leq 1$ , định hướng lên trên. Tính lưu lượng của trường  $\vec{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$  trên  $S$  (tức là  $\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ) bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp.

(b) Dùng công thức Stokes.

**3.4.3.** Cho  $S$  là mặt  $z = 9 - x^2 - y^2$  với  $z \geq 0$ , định hướng lên trên.

(a) Cho trường  $F(x, y, z) = (2z - y, x + z, 3x - 2y)$ . Tính trực tiếp lưu lượng của  $F$  trên  $S$ , tức  $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ .

(b) Dùng công thức Stokes tính  $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ .

**3.4.4.** Cho  $C$  là đường giao của mặt  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40$  và mặt  $z = 2$  được định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống. Tìm  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$  với  $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2yz + 1, xz^4 + \cos(2z + 1))$  bằng cách tính trực tiếp và bằng cách dùng công thức Stokes.

**3.4.5.** Cho  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ . Gọi  $C$  là giao của mặt phẳng  $x + y + z = 1$  với mặt trụ  $x^2 + y^2 = 1$ , định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Đặt  $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$ .

(a) Tìm một tham số hóa của đường  $C$ .

(b) Tính trực tiếp  $I$ .

(c) Tính  $\operatorname{curl} F$ .

(d) Dùng công thức Stokes, tính  $I$ .

**3.4.6.** Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm thực trơn cấp hai trên  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Chứng tỏ  $\operatorname{curl}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ .

(b) Tính tích phân  $\int_C f\nabla f \cdot d\vec{s}$  trong đó  $C(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.4.7.** Trong  $\mathbb{R}^3$  cho  $S_1$  là nửa mặt cầu trên  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ ; cho  $S_2$  là mặt paraboloid  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ , cả hai được định hướng lên trên.

(a) Vẽ hai mặt này trên cùng một hệ tọa độ.

(b) Cho  $F$  là một trường trơn trên  $\mathbb{R}^3$ . Chứng tỏ  $\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ .

(c) Hãy tổng quát hóa.

**3.4.8.** Chứng tỏ nếu  $S$  là mặt cầu thì  $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0$ .

**3.4.9.** Cho  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  là một vectơ cố định. Cho  $S$  là một mặt mà trên đó công thức Stokes có thể áp dụng được. Hãy chứng minh:

$$\int_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot d\vec{s} = 2 \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS,$$

trong đó  $\vec{r}$  là vectơ vị trí, tức  $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

**3.4.10.** (a) Chứng minh đẳng thức

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$

(b) Từ đó chứng minh

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F.$$

Ở đây  $\Delta F$  được hiểu là toán tử Laplace  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  tác động vào từng thành phần của  $F$ .

**3.4.11 (cảm ứng điện từ).** \* Định luật Faraday phát biểu rằng khi thông lượng từ trường qua một mặt giới hạn bởi một mạch kín thay đổi thì trong mạch xuất hiện dòng điện cảm ứng. Chính xác hơn, gọi  $\vec{E}$  là điện trường,  $\vec{B}$  là từ trường,  $S$  là một mặt với biên là đường  $\partial S$  được định hướng tương thích như trong công thức Stokes, thì

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Giả sử một nguồn năng lượng cơ học như sức nước hay sức gió làm quay một trục với vận tốc  $\omega$  vòng/đơn vị thời gian. Một vòng dây phẳng được gắn vào trục này, được đặt trong một từ trường cố định  $\vec{B}$ . Gọi  $A$  là diện tích của hình phẳng bao bởi vòng dây. Đại lượng  $\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  thường được kí hiệu là  $emf$ . Chứng tỏ

$$emf = -A|\vec{B}|2\pi\omega \sin(2\pi\omega t).$$

Vậy trong vòng dây xuất hiện một dòng điện xoay chiều. Đây là một nguyên lý cơ sở của máy phát điện.

**3.4.12.** Tiếp tục bài tập 3.2.1 và 3.2.2, xem  $F$  như là trường phẳng trong không gian ba chiều. Ước đoán  $\operatorname{div} F$  tại điểm gốc tọa độ là âm, dương hay bằng không? Hãy miêu tả  $\operatorname{curl} F$  tại điểm gốc tọa độ.

**3.4.13.** Tồn tại hay không một trường  $F$  khả vi liên tục cấp hai thỏa  $\operatorname{curl} F(x, y, z) = (e^{yz}, \sin(xz^2), z^5)$ ?

## Công thức Gauss-Ostrogradsky

**3.4.14.** Tính:

- Tiếp tục Bài tập 3.3.1. Nếu mặt  $S$  là kín hãy tính tích phân  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  bằng cách dùng công thức Gauss-Ostrogradsky.
- Tính thông lượng của trường  $\vec{F}(x, y, z) = (3x, y^2, z^2)$  qua mặt cầu đơn vị  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , định hướng ra ngoài.
- Tính thông lượng của trường  $F(x, y, z) = (2x + e^{yz}, 2xy, y^2)$  qua mặt cầu đơn vị  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  định hướng ra ngoài.
- Tính thông lượng của trường  $F(x, y, z) = (y, z, x)$  qua mặt  $x^2 + y^4 + z^6 = 2$ , định hướng ra ngoài.

**3.4.15.** Cho trường

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Chú ý đây là một trường xuyên tâm, tỉ lệ với trọng trường và điện trường.

- Tính  $\operatorname{div}(\vec{F})$ .
- Gọi  $S_2$  là mặt cầu  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 1$  được định hướng ra ngoài. Dùng công thức Gauss-Ostrogradsky, hãy tính  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .
- Gọi  $S_1$  là mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  được định hướng ra ngoài. Tính tích phân mặt  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$  bằng cách dùng tọa độ Euclid  $(x, y, z)$  hoặc dùng tọa độ cầu.
- Gọi  $S_3$  là mặt  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$  được định hướng ra ngoài. Hãy tính  $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .

**3.4.16.** Cho  $S$  là mặt  $z = 9 - x^2 - y^2$  với  $z \geq 0$ , định hướng lên trên.

- Cho  $G(x, y, z) = (e^y \cos z, x^2 z, y^2 + z)$ . Cho  $S_1$  là đĩa  $x^2 + y^2 \leq 9, z = 0$ , định hướng xuống dưới. Tính thông lượng của  $G$  qua  $S_1$ , tức  $\iint_{S_1} G \cdot d\vec{S}$ .
- Dùng định lý Gauss-Ostrogradsky tính  $\iint_{S \cup S_1} G \cdot d\vec{S}$ .
- Tính  $\iint_S G \cdot d\vec{S}$ .

**3.4.17.** Cho  $T$  là nhiệt độ trên một miền  $D \subset \mathbb{R}^3$ , giả sử là một hàm trơn cấp hai. Vì nhiệt được chuyển từ nơi có nhiệt độ cao tới nơi có nhiệt độ thấp, và vectơ gradient chỉ hướng mà hàm có tốc độ thay đổi lớn nhất, nên sự thay đổi nhiệt trên miền này được mô hình hóa một cách đơn giản bằng trường dòng nhiệt  $F = -k\nabla T$ , với  $k$  là một hằng số dương.

- Chứng tỏ  $\operatorname{curl} F = 0$ .

- (b) Chứng tỏ  $\operatorname{div} F = -k\Delta T$ , trong đó  $\Delta$  là toán tử Laplace:  $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ .
- (c) Chứng tỏ nếu  $T$  là **hàm điều hòa**, tức là  $\Delta T = 0$ , thì tổng dòng nhiệt qua một mặt cầu bất kì trong miền  $D$  luôn bằng không. (Xem 3.2.23.)

**3.4.18 (diện tích mặt cầu).** Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky cho hàm  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ , hãy tính diện tích của mặt cầu tâm tại 0 với bán kính  $R$ .

**3.4.19.** Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các **công thức Green**, với giả thiết công thức Gauss-Ostrogradsky có thể áp dụng được. (Xem 3.2.21.)

- (a)  $\iint_{\partial E} \nabla f \cdot n \, dS = \iiint_E \Delta f \, dV$ .
- (b)  $\iint_{\partial E} (f \nabla g) \cdot n \, dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$ .
- (c)  $\iint_{\partial E} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, dS = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f) \, dV$ .
- (d)  $\iint_{\partial E} f n_i \, dS = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV$ . Ở đây  $n_i$  là tọa độ thứ  $i$  của vectơ pháp tuyến  $n$ .
- (e)  $\iint_{\partial E} f g n_i \, dS = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dV + \iiint_E f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dV$ .

**3.4.20.** Dùng công thức Gauss-Ostrogradsky hãy đưa ra một cách khác để tìm ra thể tích của một khối nón (xem 2.3.13). Cụ thể, đặt đỉnh khối nón ở  $O$  và đáy khối nón trên một mặt phẳng nằm ngang  $z = a$ , và áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky cho trường  $(x, y, z)$ .

**3.4.21.** Giả sử có một điện tích  $q$  tại một điểm  $O$ . Theo định luật Coulomb (3.2.6), điện trường gây bởi điện tích  $q$  này tại một điểm bất kì trong không gian có vị trí cho bởi vectơ  $\vec{r}$  đi từ điểm mang điện tích  $q$  tới điểm đang xét là:

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \vec{r}.$$

Đáng chú ý là điện trường có độ lớn tỉ lệ nghịch với  $|\vec{r}|^2$ , do đó định luật Coulomb thường được gọi là một luật nghịch đảo bình phương (inverse-square law). Như ta đã thấy (3.2.9), trọng trường cũng được cho bởi một luật nghịch đảo bình phương.

- (a) Tính toán trực tiếp, chứng tỏ  $\operatorname{div} E = 0$ .
- (b) Chứng tỏ rằng một trường có dạng  $E = k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^m}$  (được gọi là một trường xuyên tâm, radial) thì có  $\operatorname{div} E = 0$  khi và chỉ khi  $m = 3$ . (Các thí nghiệm sau này kiểm chứng hằng số  $m$  trong định luật Coulomb bằng 3 sai khác không quá  $3 \times 10^{-16}$ .)

**3.4.22.** Mặt cyclide nhận được từ một mặt xuyên qua phép nghịch đảo qua một mặt cầu. Mặt xuyên được cho bởi tham số hóa

$$r(u, v) = ((5 + \cos u) \cos v, (5 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Đưa mặt xuyên này ra ngoài mặt cầu đơn vị tâm  $O$  bán kính 1 bằng một phép tịnh tiến, chẳng hạn theo vectơ  $(9, 0, 0)$ , được một mặt xuyên mới với tham số hóa

$$\text{rtorus}(u, v) = (9 + (5 + \cos u) \cos v, (5 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Thực hiện phép lấy nghịch đảo qua mặt cầu tâm  $O$  bán kính 1, tức là phép biến đổi mang mỗi điểm  $p \neq 0$  thành điểm  $\frac{p}{\|p\|^2}$ . Khi đó mặt xuyên trở thành mặt cyclide  $S$  với tham số hóa

$$\text{rcyclide}(u, v) = \frac{\text{rtorus}(u, v)}{\|\text{rtorus}(u, v)\|^2}.$$

- (a) Vẽ mặt cyclide  $S$ .
- (b) Tính diện tích mặt cyclide  $S$  ra số thập phân.
- (c) Cho trường  $F(x, y, z) = (y, x, 3z)$ . Tính thông lượng của  $F$  qua mặt cyclide  $S$  ra số thập phân.
- (d) Tính thể tích của khối bao bởi mặt cyclide  $S$  ra số thập phân.

## Chương 4

# Phương trình vi phân

### 4.1 Phương trình vi phân và mô hình toán học

Con người xây dựng những mô hình toán học về các hiện tượng trong thế giới rồi cố gắng khảo sát các mô hình đó để hiểu về các hiện tượng. Thường các hiện tượng thay đổi theo thời gian và không gian, vì thế các mô hình thường chứa các đạo hàm để đo tốc độ thay đổi. Các mô hình như thế thường dẫn tới những phương trình ở đó ẩn là các hàm, còn bản thân phương trình thì chứa các đạo hàm. Những phương trình như thế được gọi là những phương trình vi phân.

**Ví dụ 4.1.1.** Đây là một phương trình vi phân:

$$y' = y.$$

Giải phương trình này nghĩa là tìm một hàm  $y$  mà đạo hàm  $y'$  bằng  $y$ . Nói cách khác, tìm hàm  $y$  theo biến  $x$  sao cho với mọi  $x$  thì  $y'(x) = y(x)$ .

Ta có thể kiểm được ngay là hàm  $y = e^x$  là một nghiệm của phương trình vi phân trên. Làm sao để giải tìm nghiệm của một phương trình vi phân là một đề tài ta sẽ khảo sát trong chương này.

Một **phương trình vi phân cấp một** là một phương trình chứa một hàm số một biến chưa biết và đạo hàm cấp một của hàm số đó. Nói một cách khác, đây là phương trình có dạng

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

với  $F$  là biểu thức chứa  $x, y(x)$  và  $y'(x)$ , và  $y$  là hàm số cần tìm phụ thuộc vào  $x$ .

Hàm số  $y(x)$  được gọi là nghiệm của phương trình vi phân cấp một nếu nó có đạo hàm cấp một tồn tại và thỏa đẳng thức trên. Giải phương trình vi phân cấp một là đi tìm hàm  $y$  thỏa đẳng thức trên.

Bài toán tìm nghiệm  $y$  của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn điều kiện  $y(x_0) = y_0$ , với  $x_0$  và  $y_0$  cho trước, được gọi là một **bài toán giá trị đầu**. Như vậy đây là bài toán giải hệ

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

**Ví dụ 4.1.2.** Xét phương trình vi phân

$$y' = y.$$

Thế vào phương trình, ta kiểm được ngay không chỉ  $y = e^x$ , mà  $y = ke^x$  trong đó  $k$  là số thực bất kì, là nghiệm của phương trình vi phân.



**Ví dụ 4.1.3.** Xét bài toán giá trị đầu:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Thay  $x = 0$  vào nghiệm  $y = ke^x$  ta được  $y(0) = k$ . Do đó để  $y(0) = 2$  thì  $k = 2$ . Vậy bài toán giá trị đầu này có một nghiệm là  $y = 2e^x$ .

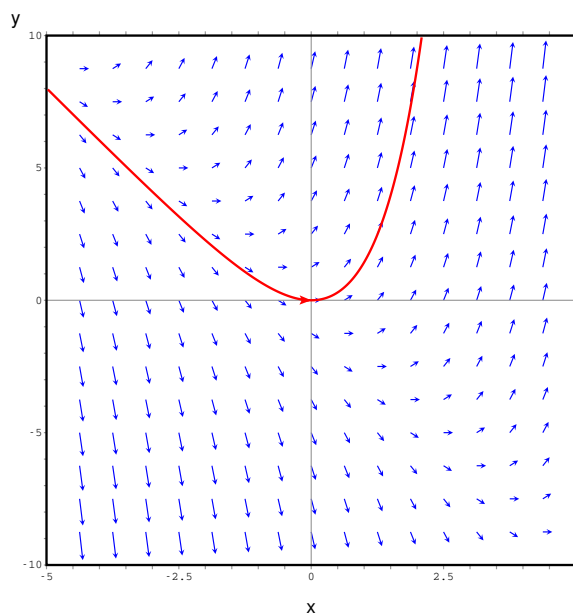
Tìm công thức nghiệm của một phương trình vi phân có thể khó. Ở các mục tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu một số phương pháp tìm nghiệm của phương trình vi phân. Trong nhiều trường hợp thay vì tìm công thức của nghiệm ta tìm hiểu các tính chất của nghiệm, hay xấp xỉ nghiệm.

**Ví dụ 4.1.4.** Xét phương trình vi phân

$$y' = 2x + y.$$

Nếu đặt vế phải là  $F(x, y) = 2x + y$  thì ta có thể diễn đạt phương trình vi phân như sau: Tìm một đường cong  $y$  theo biến  $x$  mà tại mỗi điểm  $(x, y)$  thì độ nghiêng  $y'(x)$  của đường được cho bởi số thực  $F(x, y)$ . Tại mỗi điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng ta vẽ một vectơ có độ nghiêng bằng  $F(x, y)$ , chẳng hạn như vectơ  $(1, F(x, y))$ , thì ta được một trường vectơ ứng với phương trình vi phân. Đường cong nghiệm phải luôn tiếp xúc với các vectơ của trường vectơ này tại điểm mà đường cong đi qua, vì cả hai có cùng độ nghiêng.

Cách tiếp cận này có thể sử dụng được dễ dàng hơn nếu ta dùng công cụ máy tính. Hình vẽ giúp chúng ta hình dung tính chất và dáng điệu của nghiệm.



Hình 4.1.1: Trường vectơ và đường cong nghiệm của phương trình  $y' = 2x + y$  đi qua điểm  $(0,0)$ . Đường này là đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện đầu  $y(0) = 0$ .

Qua Hình 4.1.1 ta có thể quan sát thấy những tính chất chẳng hạn như nghiệm  $y$  thỏa điều kiện đầu  $y(0) = 0$  sẽ có  $y(x)$  càng lớn khi  $x$  càng lớn.

**Ghi chú 4.1.5.** Trong các bài toán giải phương trình vi phân trong tài liệu này chúng ta bằng lòng với việc tìm ra được một nghiệm nào đó của phương trình xác định trên một khoảng nào đó. Dưới những điều kiện khá tổng quát mà thường được thỏa trong tài liệu

này, với mỗi điều kiện đầu, phương trình thực sự có duy nhất một nghiệm xác định trên một khoảng nào đó. Điều này được thể hiện trong hình vẽ nghiệm của phương trình: qua mỗi điểm chỉ có một đường cong nghiệm mà thôi. Vấn đề này thường được khảo sát trong các tài liệu nâng cao hơn về môn Phương trình vi phân như [Long, Boyce09].

### 4.1.1 Mô hình với phương trình vi phân cấp một

**Ví dụ 4.1.6 (Mô hình tăng trưởng dân số).** Ta lập mô hình tăng trưởng của dân số (số lượng cá thể trong một quần thể sinh vật nào đó)  $P$  theo thời gian  $t$ .

Ta đưa ra một giả thiết là tốc độ tăng dân số tỉ lệ hằng với qui mô dân số, nói cách khác tốc độ tăng tương đối là một hằng số. Ví dụ nếu cứ mỗi 100 người trong một năm có 3 trẻ được sinh ra và 1 người chết đi thì tốc độ tăng dân số tương đối là 2 người trên mỗi 100 người mỗi năm, tức là 2%/năm, và ta giả sử tốc độ này không thay đổi theo thời gian.

Tốc độ tăng trưởng dân số theo thời gian chính là đạo hàm  $\frac{dP}{dt}$ . Tốc độ tăng trưởng tương đối là

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P},$$

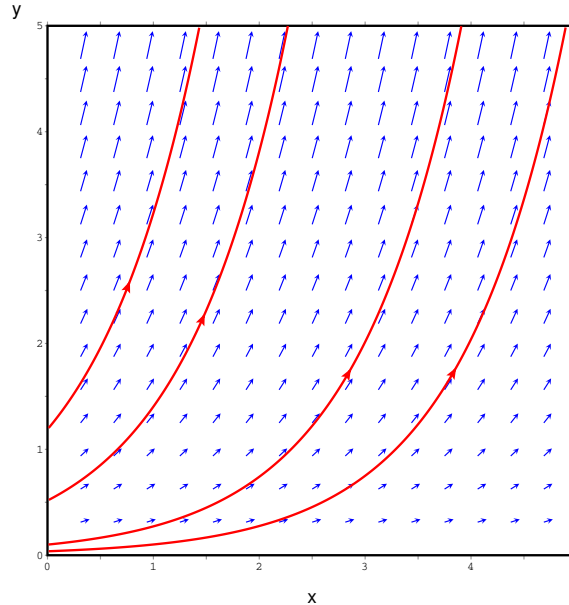
vậy mô hình là

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P} = k,$$

trong đó  $k$  là hằng số tỉ lệ, độc lập với thời gian, hay

$$\frac{dP}{dt} = kP. \quad (4.1.1)$$

Phương trình (4.1.1) là một mô hình đơn giản nhưng hiệu quả về sự tăng trưởng số lượng của quần thể.



Hình 4.1.2: Một số nghiệm của phương trình dân số  $P(t) = P_0 e^{kt}$  ứng với  $k = 1$  và những giá trị khác nhau của  $P_0$ .

Nếu  $k > 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn dương, nên dân số luôn tăng. Hơn nữa khi  $P$  càng lớn thì  $\frac{dP}{dt}$  càng lớn, nghĩa là dân số càng lớn thì tăng càng nhanh. Như vậy mô hình dân số (4.1.1)

phù hợp với những tình huống mà sự phát triển của dân số không bị hạn chế bởi lương thực, sự tấn công của kẻ địch, bệnh dịch, ...

Nếu  $k = 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn bằng 0, do đó  $P$  bằng một hằng số. Vậy dân số không đổi. Một nghiệm hằng như vậy của phương trình vi phân còn được gọi là một **ng nghiệm cân bằng**.

Nếu  $k < 0$  thì  $\frac{dP}{dt}$  luôn âm, nên dân số luôn giảm.

Phương trình này được giải ở Ví dụ 4.2.2, còn lúc này ta có thể dễ dàng kiểm tra bằng cách thế vào rằng phương trình có một nghiệm là

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Trong đó  $P_0 = P(0)$  là dân số tại thời điểm 0, tức là dân số ban đầu. Xem Hình 4.1.2.

Mô hình tăng trưởng dân số cũng áp dụng được cho các trường hợp khác mà tốc độ thay đổi của đại lượng tỉ lệ với giá trị của đại lượng, như mô hình lãi nhập vốn (Bài tập 4.2.8), mô hình phân rã mũ (Bài tập 4.2.9).

**Ví dụ 4.1.7 (Mô hình tăng trưởng dân số có kìm hãm).** Thường khi dân số của một cộng đồng tăng lên thì những yếu tố kìm hãm xuất hiện như hạn chế về lương thực, tài nguyên, sự cạnh tranh của các cộng đồng khác, ... Trong trường hợp này thì tốc độ tăng trưởng dân số tương đối sẽ không phải là một hằng số. Một mô hình đơn giản là tốc độ tăng trưởng dân số tương đối sẽ phụ thuộc vào chính dân số:

$$\frac{P'}{P} = h(P).$$

Đơn giản hơn nữa ta lấy  $h$  là một hàm cấp 1:

$$h(P) = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right),$$

trong đó  $r, K$  là các hằng số dương. Vậy ta có mô hình

$$\frac{P'}{P} = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (4.1.2)$$

còn được gọi là **mô hình hậu cần**.

Quan sát mô hình hậu cần ta thấy nếu  $P < K$  thì  $P' > 0$ , như vậy dân số sẽ tăng. Tuy nhiên khi  $P$  càng lớn thì  $(1 - \frac{P}{K})$  sẽ càng nhỏ, tuy vẫn là số dương. Như vậy khi dân số lớn lên thì tốc độ tăng tương đối sẽ giảm đi, đúng như ta muốn miêu tả. Phương trình có một nghiệm hằng  $P(t) = K$ , được gọi là nghiệm cân bằng. Giá trị  $K$  được coi là **mức trần của môi trường**, nếu dân số khởi đầu ở một mức thấp hơn thì dân số không thể tăng vượt qua mức này.

Trong mục sau ta sẽ giải phương trình hậu cần ở Ví dụ 4.2.3. Hiện giờ ta có thể kiểm tra rằng phương trình có một nghiệm là

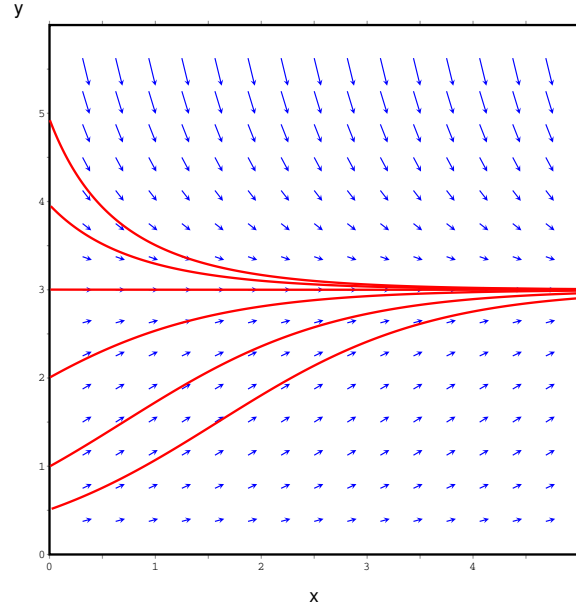
$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt+C}},$$

với  $C \in \mathbb{R}$ . Ở Hình 4.1.3 ta thấy nghiệm có những tính chất như dự đoán từ mô hình.

## 4.1.2 Mô hình với phương trình vi phân cấp hai

Một **phương trình vi phân cấp hai** là một phương trình chứa một hàm số (một biến) chưa biết và đạo hàm cấp hai của hàm số đó (có thể có chứa thêm cả đạo hàm cấp một). Nói một cách khác, đây là phương trình có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$$



Hình 4.1.3: Một số nghiệm của phương trình hậu cần với  $r = 1$ ,  $K = 3$  và những điều kiện đầu khác nhau. Nghiệm  $P = K$  là nghiệm cân bằng, có đồ thị là một đường thẳng nằm ngang. Các nghiệm mà có giá trị đầu nhỏ hơn  $K$  khi thời gian lớn hơn tăng gần tới nhưng không đạt giá trị  $K$ . Các nghiệm mà có giá trị đầu lớn hơn  $K$  khi thời gian lớn hơn giảm gần tới nhưng không đạt giá trị  $K$ .

với  $F$  là một hàm số của bốn biến thực và  $y$  là một hàm số cần tìm phụ thuộc vào  $x$ . Hàm số  $y$  được gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu nó có đạo hàm cấp hai và thỏa đẳng thức trên. Giải phương trình vi phân cấp hai là đi tìm hàm  $y$  thỏa đẳng thức trên.

**Ví dụ 4.1.8.** Xét phương trình vi phân cấp hai  $y''(x) + y'(x) = 0$ .

Ta có kiểm tra trực tiếp rằng họ các hàm số

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$$

với  $C_1, C_2$  là các hằng số thực, là nghiệm của phương trình vi phân này. Thật vậy, ta có  $y'(x) = -C_2 e^{-x}$  và  $y''(x) = C_2 e^{-x}$ . Thay vào vế trái của phương trình ta thấy ngay dấu bằng xảy ra.

Bài toán giá trị đầu của phương trình vi phân cấp hai bao gồm thêm điều kiện đầu cho đạo hàm cấp một. Đây là bài toán có dạng tìm hàm  $y$  thỏa

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = w_0, \end{cases}$$

với  $x_0, y_0$ , và  $w_0$  cho trước.

**Ví dụ 4.1.9.** Tiếp tục Ví dụ 4.1.8, xét bài toán giá trị đầu sau

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ở Ví dụ 4.1.8 ta đã thấy  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$  là một nghiệm của phương trình vi phân chưa xét điều kiện đầu. Thay  $x = 0$  vào  $y(x)$ , ta được

$$C_1 + C_2 = 1.$$

Thay  $x = 0$  vào  $y'(x)$ , ta được

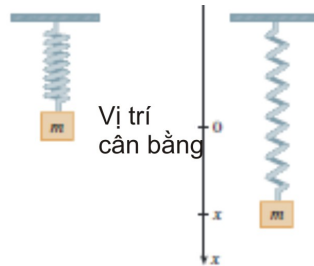
$$-C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Giải hệ phương trình của  $C_1, C_2$ , ta được

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của bài toán là  $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}$ .

**Ví dụ 4.1.10 (Mô hình chuyển động của lò xo).** Bây giờ ta hãy xem một ví dụ về một mô hình từ cơ học cổ điển: sự chuyển động của một vật có khối lượng  $m$  được đặt ở cuối của một lò xo đứng so với mặt đất, như trong Hình 4.1.4.



Hình 4.1.4: Chuyển động của một lò xo ở vị trí thẳng đứng so với mặt đất.

Theo định luật Hooke trong Vật lí, nếu lò xo giãn ra hay nén lại một chiều dài  $x$  so với chiều dài tự nhiên (chiều dài khi ở trạng thái nghỉ, không chuyển động, vị trí là hằng) của nó thì vật chịu tác động của một lực có độ lớn tỉ lệ với  $x$  nhưng trái chiều chuyển động:

$$\text{lực phục hồi} = -kx$$

trong đó  $k$  là một hằng số dương phụ thuộc vào cấu tạo của lò xo. Theo định luật thứ hai của Newton, tổng lực tác động bằng khối lượng nhân gia tốc chuyển động, giả sử rằng vật không chịu sự tác động của lực nào khác, thì tại mọi thời điểm  $t$  vị trí  $x$  của vật phải thỏa

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t),$$

hay ngắn gọn hơn:

$$mx'' = -kx. \quad (4.1.3)$$

Đây là một ví dụ mô hình toán học dùng phương trình vi phân cấp hai. Ở Ví dụ 4.3.5 ta sẽ giải được phương trình này và sẽ biết hoàn toàn cách thức lò xo chuyển động.

## Bài tập

**4.1.1.** Kiểm tra rằng  $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$  là một nghiệm của phương trình vi phân  $y' + 2y = 2e^x$ .

**4.1.2.** Kiểm tra rằng  $y = -t \cos t - t$  là một nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$t \frac{dy}{dt} = y + t^2 \sin t, \quad y(\pi) = 0.$$

**4.1.3.** Xét phương trình vi phân  $x^2y' + xy = 1$ .

- (a) Kiểm tra rằng mọi phần tử của họ các hàm số  $y = (\ln x + C)/x$  đều là nghiệm của phương trình.
- (b) Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu  $y(1) = 2$ .
- (c) Tìm một nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu  $y(2) = 1$ .

**4.1.4.** Xét phương trình vi phân  $y' = -y^2$ .

- (a) Hãy kiểm tra rằng tất cả các phần tử của họ  $y = 1/(x + C)$  đều là nghiệm của phương trình.
- (b) Hãy tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 0,5.$$

**4.1.5.** Xét phương trình vi phân  $y' = xy^3$ .

- (a) Hãy kiểm tra rằng tất cả phần tử của họ  $y = (c - x^2)^{-1/2}$  đều là nghiệm.
- (b) Hãy vẽ đồ thị nhiều phần tử của họ các nghiệm trên cùng một mặt phẳng.
- (c) Hãy tìm một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = xy^3, \quad y(0) = 2.$$

**4.1.6.** Một dân số được mô hình bởi phương trình vi phân theo mô hình tăng trưởng có kìm hãm

$$\frac{dP}{dt} = 1,2P \left( 1 - \frac{P}{4200} \right).$$

- (a) Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số tăng theo thời gian?
- (b) Với những giá trị nào của  $P$  thì dân số giảm theo thời gian?
- (c) Những nghiệm nào là nghiệm cân bằng (nghiệm hằng, dân số không đổi theo thời gian)?

**4.1.7 (Mô hình của sự nguội).** Người ta đưa ra một quan sát rằng tốc độ nguội của một vật tỉ lệ với sự chênh lệch nhiệt độ giữa vật đó với môi trường xung quanh (đây là một định luật của I. Newton).

- (a) Một ấm nước vừa sôi ở nhiệt độ  $100^\circ C$  được để nguội trong một phòng có nhiệt độ  $26^\circ C$ . Hãy viết một phương trình vi phân miêu tả nhiệt độ của ấm nước để nguội phù hợp với quan sát này.
- (b) Hãy vẽ phác họa đồ thị nghiệm của bài toán giá trị ban đầu ở phần (a).

**4.1.8 (Mô hình của sự học).** Đặt  $P(t)$  là lượng kiến thức tích lũy được của một người học (đo theo một cách nào đó) theo thời gian  $t$ . Đạo hàm  $dP/dt$  cho tốc độ tăng của lượng kiến thức tích lũy, thể hiện tốc độ tiến bộ của người học. Có quan sát rằng kiến thức tích lũy được tăng theo thời gian, nhưng với tốc độ giảm dần, và không thể vượt quá một mức trần  $M$  nhất định.

- (a) Hãy giải thích vì sao phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P),$$

với  $k$  là một hằng số, là phù hợp với quan sát trên.

- (b) Hãy vẽ phác họa một nghiệm của phương trình vi phân này dựa theo mô hình trên.

**4.1.9.** Xét phương trình vi phân  $2y'' + y' - y = 0$ .

- (a) Với các giá trị nào của  $r$  thì hàm số  $y = e^{rx}$  thỏa mãn phương trình?
- (b) Nếu  $r_1$  và  $r_2$  là các giá trị của  $r$  mà đã tìm được ở phần (a), chứng tỏ rằng mọi phần tử của họ các hàm số  $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$  đều là nghiệm.

**4.1.10.** Xét phương trình vi phân  $4y'' = -25y$ .

- (a) Với các giá trị nào của  $k$  thì hàm số  $y = \cos kt$  thỏa mãn phương trình?
- (b) Với các giá trị  $k$  đó, kiểm tra rằng mọi phần tử của họ các hàm số  $y = A \sin kt + B \cos kt$  đều là nghiệm.

## 4.2 Giải phương trình vi phân cấp một

### 4.2.1 Phương trình vi phân cấp một tách biến

Một *phương trình vi phân cấp một tách biến*, còn được gọi là phương trình vi phân cấp một biệt số phân li, là một phương trình vi phân cấp một mà trong đó biểu thức cho  $dy/dx$  có thể được phân tích thành một hàm của  $x$  nhân với một hàm của  $y$ . Cụ thể hơn, đó là phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

Đối với phương trình như vậy ta có thể đưa hết hàm của  $x$  về một vế và hàm của  $y$  về vế còn lại, tức là tách biến.

**Ví dụ 4.2.1.** Giải phương trình

$$y' = y.$$

Viết lại phương trình ở dạng

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Đưa về dạng  $y$  ở một bên,  $x$  ở một bên (tách biến):

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int \frac{dy}{y} dy = \int dx$$

ta được

$$\ln |y| = x + C,$$

tức là

$$|y| = e^{x+C} = e^C e^x.$$

Vì  $y$  là hàm khả vi liên tục nên hoặc  $y = e^C e^x$  hoặc  $y = -e^C e^x$ . Kết hợp hai trường hợp, cùng với trường hợp  $y = 0$ , ta có nghiệm tổng quát là

$$y = D e^x,$$

với  $D$  là một hằng số thực.

Cách giải chung của phương trình tách biến là như sau:

**Cách giải phương trình tách biến**

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

**Bước 1:** Viết lại dưới dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx$$

ở đó tất cả  $y$  đều nằm về một vế của phương trình và tất cả  $x$  nằm về vế kia (tách biến). Ở đây  $h = \frac{1}{f}$ .

**Bước 2:** Lấy nguyên hàm hai vế:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \quad (4.2.1)$$

Trong một số trường hợp ta có thể tính được tích phân rồi giải được phương trình (4.2.1) để được công thức tường minh  $y$  theo  $x$ .

Có thể giải thích cách giải này như sau. Ta viết

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

hay

$$h(y)y'(x) = g(x)$$

rồi lấy nguyên hàm cả hai vế thì được

$$\int h(y)y'(x) dx = \int g(x) dx.$$

Ở vế trái, đổi biến  $y = y(x)$  ta được

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx.$$

**Ví dụ 4.2.2.** Giải phương trình tăng trưởng dân số (4.1.1)

$$P' = kP.$$

Bước 1: Viết

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Đưa về dạng  $P$  ở một bên,  $t$  ở một bên (tách biến):

$$\frac{dP}{P} = kdt.$$

Bước 2: Lấy tích phân hai vế:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

ta được

$$\ln |P| = kt + C,$$



tức là

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

Vì  $P$  là hàm khả vi liên tục nên hoặc  $P = e^C e^{kt}$  hoặc  $P = -e^C e^{kt}$ . Kết hợp hai trường hợp ta được nghiệm

$$P = D e^{kt}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng  $P(0) = D$ . Nếu đặt  $P_0 = P(0)$  là giá trị ban đầu của dân số thì ta viết được nghiệm là

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

**Ví dụ 4.2.3.** Giải phương trình tăng trưởng dân số có kìm hãm (mô hình hậu cần) (4.1.2)

$$P' = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right) P.$$

Ta nhận thấy đây là một phương trình tách biến. Ta viết nó dưới dạng  $P$  ở một vế còn  $t$  ở vế kia:

$$\frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = r dt.$$

Lấy nguyên hàm hai vế (giả sử  $P < K$ ):

$$\int \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = \int r dt.$$

Suy ra

$$\int \left( \frac{1}{K-P} + \frac{1}{P} \right) dP = rt + C,$$

với  $C \in \mathbb{R}$ . Từ đó

$$-\ln(K-P) + \ln P = rt + C,$$

hay

$$\ln \frac{P}{K-P} = rt + C,$$

vậy

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt+C}.$$

Giải phương trình này tìm  $P$ , ta được

$$P(1 + e^{rt+C}) = K e^{rt+C},$$

vậy nghiệm là

$$P = \frac{K e^{rt+C}}{1 + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + e^{-rt-C}},$$

với  $C \in \mathbb{R}$ .

### 4.2.2 Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp

Một *phương trình vi phân cấp một đẳng cấp* là một phương trình có dạng

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right),$$

hay ngắn gọn hơn

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

với  $F$  là một hàm một biến.

**Ví dụ 4.2.4.** Các phương trình sau có dạng đẳng cấp:

(a)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ , vì ta có thể viết lại như sau, với  $u = \frac{y}{x}$ :

$$y' = \frac{1+y/x}{1-y/x} = \frac{1+u}{1-u}.$$

(b)  $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ , vì ta có thể viết lại như sau, với  $u = \frac{y}{x}$ :

$$y' = \frac{1+y/x+(y/x)^2}{1+(y/x)^2} = \frac{1+u+u^2}{1+u^2}.$$

**Ví dụ 4.2.5.** Giải phương trình sau

$$y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}.$$

Ta đưa về dạng đẳng cấp như sau:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} = u^2 + 2u$$

với  $u = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Do  $y(x) = u(x)x$ , ta tính được  $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ . Thay vào phương trình trên ta được

$$u'x + u = u^2 + 2u,$$

tức là

$$u'x = u^2 + u.$$

Nếu  $u^2 + u = 0$ , tức  $u = 0$  hay  $u = -1$ , ta được hai nghiệm  $y = 0$  hay  $y = -x$ . Nếu  $u^2 + u \neq 0$  ta có thể đưa phương trình về dạng phương trình tách biến

$$\frac{u'}{u^2+u} = \frac{1}{x}.$$

Ta giải phương trình tách biến như ở mục trước. Lấy nguyên hàm hai vế:

$$\int \frac{1}{u^2+u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Tính tích phân:

$$\int \frac{1}{u^2+u} du = \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln|u| - \ln|u+1| = D + \ln|x|.$$

Viết  $D = \ln C$ ,  $C > 0$ , ta thu được

$$\left| \frac{u}{u+1} \right| = C|x|.$$

Trên mỗi khoảng xác định  $x \neq 0$  ta xét phương trình

$$\frac{u}{u+1} = Cx,$$

với một hằng số  $C \in \mathbb{R}$  (nếu dùng một lí luận nâng cao hơn từ tính liên tục của  $u$  có thể thấy được đây là khả năng duy nhất). Giải phương trình này ta được

$$u = \frac{Cx}{1 - Cx}.$$

Thay  $u$  bởi  $\frac{y}{x}$ , ta được một nghiệm là

$$y(x) = \frac{Cx^2}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tổng kết lại, để giải phương trình đẳng cấp ta làm như sau:

**Cách giải phương trình đẳng cấp**

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Bước 1:** Đặt  $u = \frac{y}{x}$  hay  $y(x) = u(x)x$ , do công thức đạo hàm của hàm tích, ta có  $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ .

**Bước 2:** Thay vào phương trình ban đầu ta thu được một phương trình vi phân cấp một  $u'x + u = F(u)$  tách biến được theo  $x$  và  $u$ .

**Bước 3:** Giải phương trình ở Bước 2 theo cách giải phương trình tách biến, ta tìm  $u$ , sau đó thay  $u = \frac{y}{x}$  để tìm  $y$  theo  $x$ .

### 4.2.3 Phương trình vi phân cấp một tuyến tính

Một **phương trình vi phân cấp một tuyến tính** là một phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Gọi là tuyến tính là vì bậc cao nhất của  $y$  là 1.

**Ví dụ 4.2.6.** Giải phương trình  $xy' + y = 2x$ .

Chú ý rằng phương trình vi phân này không tách được và cũng không đẳng cấp. Dùng công thức đạo hàm của tích:

$$xy' + y = xy' + x'y = (xy)',$$

nhờ đó chúng ta có thể viết lại phương trình là

$$(xy)' = 2x.$$

Lấy tích phân hai vế phương trình này chúng ta nhận được

$$xy = x^2 + C$$

hay

$$y = x + \frac{C}{x}.$$

Ví dụ trên chỉ ra rằng mỗi phương trình vi phân cấp một tuyến tính có thể được giải một cách tương tự bằng cách nhân hai vế phương trình bởi một hàm thích hợp.

**Cách giải phương trình tuyến tính**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

**Bước 1:** Tính thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Ta có  $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ .

**Bước 2:** Nhân hàm  $\mu(x)$  vào hai vế của phương trình vi phân:

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x).$$

**Bước 3:** Do công thức đạo hàm của tích phương trình được viết lại là

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)Q(x).$$

**Bước 4:** Lấy nguyên hàm:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx.$$

**Ví dụ 4.2.7.** Giải phương trình vi phân  $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ .

Phương trình này là tuyến tính với  $P(x) = 3x^2$  và  $Q(x) = 6x^2$ . Thừa số tích phân là

$$\mu(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}.$$

Ở đây ta chỉ cần một nguyên hàm nào đó mà thôi chứ không cần cả một họ nguyên hàm. Nhân hai vế của phương trình với  $e^{x^3}$  chúng ta được

$$\begin{aligned} e^{x^3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y &= 6x^2 e^{x^3} \\ \frac{d}{dx}(e^{x^3} y) &= 6x^2 e^{x^3} \\ e^{x^3} y &= \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3} + C \\ y &= 2 + Ce^{-x^3}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.2.8.** Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

Đầu tiên chúng ta phải chia hai vế cho hệ số của  $y'$  để đưa phương trình vi phân về dạng chuẩn

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Thừa số tích phân là

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Nhân vế của phương trình được cho với  $x$

$$xy' + y = \frac{1}{x}$$

tức là

$$(xy)' = \frac{1}{x}.$$

Từ đó

$$xy = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

và do đó

$$y = \frac{\ln x + C}{x}.$$

Vì  $y(1) = 2$  ta có

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị đầu là

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

**Ví dụ 4.2.9.** Giải phương trình tăng trưởng dân số (4.1.1)

$$P' = kP.$$

Ta đã giải phương trình này theo phương pháp tách biến ở Ví dụ 4.2.2. Bây giờ viết lại phương trình ở dạng  $P' - kP = 0$  ta lại thấy đây cũng là một phương trình tuyến tính. Nhân hai vế với  $e^{\int -k dt} = e^{-kt}$  ta được

$$e^{-kt} P' - k e^{-kt} P = 0,$$

hay

$$(e^{-kt} P)' = 0.$$

Lấy nguyên hàm ta được  $e^{-kt} P = C$ , hay

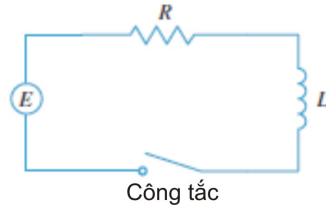
$$P = C e^{kt}.$$

Kết quả này trùng với kết quả thu được ở Ví dụ 4.2.2.

**Ví dụ 4.2.10 (Ứng dụng vào mạch điện).** Một nguồn điện tạo ra một điện áp  $E(t)$  vôn (volt) và một cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  ampe (ampere) tại thời điểm  $t$  trong một mạch điện. Mạch điện còn chứa một điện trở với trở kháng  $R$  ôm (Ohm) và một cuộn cảm với cảm kháng bằng  $L$  henri. Xem Hình 4.2.1.

Theo định luật Ohm độ giảm áp do điện trở gây ra là  $RI$ . Độ giảm áp do cuộn cảm gây ra là  $L(\frac{dI}{dt})$ . Một định luật của Kirchhoff nói rằng tổng độ giảm áp chính bằng điện áp tại nguồn  $E(t)$ . Do đó chúng ta có

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$



Hình 4.2.1: Mạch điện.

Nghiệm là cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  tại thời điểm  $t$ .

Với  $L = 4$ ,  $R = 12$  và  $E(t) = 60$  (đây là trường hợp điện thế không đổi được cung cấp bởi pin chẳng hạn), phương trình trở thành

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60,$$

hay

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I.$$

Ta nhận ra rằng phương trình này là tách biến được, và ta giải nó như sau:

$$\begin{aligned}\int \frac{dI}{15 - 3I} &= \int dt \\ \frac{-1}{3} \ln |15 - 3I| &= t + C \\ |15 - 3I| &= e^{-3(t+C)} \\ 15 - 3I &= \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm là

$$I(t) = 5 - \frac{1}{3}Ae^{-3t}.$$

Giả sử thay vì dùng pin chúng ta dùng máy phát điện tạo ra một điện áp thay đổi  $E(t) = 60 \sin 30t$  vôn. Phương trình vi phân trở thành

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \sin 30t$$

hay

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \sin 30t.$$

Đây là một phương trình cấp một tuyến tính. Thừa số tích phân là  $e^{\int 3 dt} = e^{3t}$ , dẫn đến

$$e^{3t} \frac{dI}{dt} + 3e^{3t} I = \frac{d}{dt}(e^{3t} I) = 15e^{3t} \sin 30t.$$

Dùng bảng tích phân hoặc dùng máy tính ta có thể tính được tích phân:

$$e^{3t} I = \int 15e^{3t} \sin 30t dt = 15 \frac{e^{3t}}{909} (3 \sin 30t - 30 \cos 30t) + C.$$

Vậy nghiệm là

$$I(t) = \frac{5}{101} (\sin 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}.$$

## Bài tập

### Phương trình tách biến

#### 4.2.1. Giải các phương trình vi phân:

- (a)  $\frac{dy}{dx} = xy^2$ . (g)  $\frac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$ .
- (b)  $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$ . (h)  $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$ .
- (c)  $xy^2y' = x + 1$ . (i)  $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$ .
- (d)  $(y^2 + xy^2)y' = 1$ . (j)  $y' = y^2x^3$ .
- (e)  $(y + \sin y)y' = x + x^3$ . (k)  $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$ .
- (f)  $\frac{dv}{ds} = \frac{s+1}{sv+s}$ . (l)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, x > 0, y > 0$ .

**4.2.2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa điều kiện đầu cho trước.

- (a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, y(0) = -3$ . (c)  $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, P(1) = 2$ .
- (b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, y(1) = 2$ . (d)  $\frac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, L(1) = -1$ .

## Phương trình đẳng cấp

**4.2.3.** Giải các phương trình vi phân:

- (a)  $y' = \frac{y+x}{x}$ . (g)  $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}, y(1) = 2$ .
- (b)  $y' = \frac{y-x}{x}$ . (h)  $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} + 2x(y+2x) = 0$ .
- (c)  $y' = \frac{2y+x}{x}$ . (i)  $\begin{cases} x^2y'(x) = y^2 - xy + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$
- (d)  $y'(x) = \frac{x-y}{x+y}$ . (j)  $y^2 = (xy - x^2)\frac{dy}{dx}$ .
- (e)  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-3y}{x-y}$ . (k)  $\begin{cases} x\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+t^2}{t} \\ x(2) = 1 \end{cases}$
- (f)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y-6x}{2x-y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

## Phương trình tuyến tính

**4.2.4.** Giải phương trình vi phân:

- (a)  $y' + y = 1$ . (h)  $(1+t)\frac{du}{dt} + u = 1+t, t > 0$ .
- (b)  $y' - y = e^x$ .
- (c)  $y' = x - y$ . (i)  $t \ln t \frac{dr}{dt} + r = te^t$ .
- (d)  $4x^3y + x^4y' = \sin^3 x$ .
- (e)  $xy' + y = \sqrt{x}$ . (j)  $\frac{dz}{dx} = xz - x$ .
- (f)  $y' + y = \sin(e^x)$ .
- (g)  $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$ . (k)  $z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$ .

**4.2.5.** Giải phương trình vi phân:

- (a)  $y' + 3xy = 4x$ .  
 (b)  $x^2y' + 2xy = \ln x$ ,  $y(1) = 2$   
 (c)  $t \frac{du}{dt} = t^2 + 3u$ ,  $t > 0$ ,  $u(2) = 4$   
 (d)  $2xy' + y = 6x$ ,  $x > 0$ ,  $y(4) = 20$   
 (e)  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0$ ,  $y(0) = 2$   
 (f)  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ .  
 (g)  $xy'(x) - y(x) = x \ln x$  với  $x > 0$ , và  $y(1) = 2$ .

## Ứng dụng và các bài toán khác

**4.2.6.** Một quần thể vi khuẩn có tăng trưởng số lượng tỉ lệ với số lượng hiện có. Sau 1 giờ có 1000 cá thể vi khuẩn, sau 4 giờ có 3000 cá thể. Hãy tìm số cá thể ở một thời điểm bất kì và số cá thể ở thời điểm ban đầu.

**4.2.7.** Lượng muối trong môi trường đang tăng với tốc độ theo thời gian (tính bằng ngày) tỉ lệ với số lượng hiện có, và gấp đôi sau mỗi tuần. Giả sử số lượng muối ban đầu là 100.000 con, hãy tìm công thức của số lượng muối tại thời điểm bất kì.

**4.2.8 (Mô hình lãi nhập vốn liên tục).** Một tài khoản có lượng tiền ban đầu là  $P$  (gốc). Lãi suất theo thời gian là  $r$ /năm, thường được viết ở dạng phần trăm/năm. Chẳng hạn  $r = 0,05 = 5\%$  có nghĩa là sau 1 năm thì cứ 100 đơn vị tiền tài khoản sẽ nhận được một khoản lãi là 5 đơn vị tiền. Nếu lãi được nhập vào vốn, thì  $r$  chính là tốc độ tăng tương đối của lượng tiền trong tài khoản. Trong mô hình lãi nhập vốn liên tục thì lượng tiền  $A$  ở thời điểm  $t$  (tính bằng năm) thỏa

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = r.$$

- (a) Chứng tỏ lượng tiền trong tài khoản được cho bởi

$$A(t) = Pe^{rt}.$$

- (b) Chứng tỏ thời gian cần để lượng tiền trong tài khoản tăng gấp đôi không phụ thuộc vào khoản đầu tư ban đầu.  
 (c) Để lượng tiền tăng gấp đôi mỗi 10 năm thì lãi suất phải bằng bao nhiêu?

**4.2.9 (Phân rã của Carbon  $C^{14}$ ).** Carbon  $C^{14}$  là một chất phóng xạ. Theo hóa học số lượng nguyên tử bị phân rã trong một đơn vị thời gian trên một đơn vị số lượng nguyên tử là không đổi. Như vậy nếu gọi  $C$  là số lượng nguyên tử ở thời điểm  $t$  thì

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = k$$

trong đó  $k$  là một số thực không thay đổi theo  $t$ .

- (a) Chứng tỏ

$$C(t) = C_0 e^{kt}$$

trong đó  $C_0 = C(0)$ .

- (b) Người ta biết  $C^{14}$  phân rã theo qui luật số lượng giảm đi phân nửa sau 5730 năm. Từ đó hãy kiểm rằng  $k = -0,00012$ .

**4.2.10 (Định tuổi bằng Carbon).** Carbon  $C^{14}$  được sinh ra trong khí quyển Quả Đất do tác động của tia vũ trụ. Tỉ lệ giữa  $C^{14}$  (phóng xạ) và  $C^{12}$  (không phóng xạ) trong môi trường có thể coi là không thay đổi theo thời gian. Các cơ thể sống trao đổi chất với môi trường nên tỉ lệ giữa  $C^{14}$  và  $C^{12}$  trong cơ thể bằng với tỉ lệ trong môi trường. Khi một cơ thể chết đi, nó không trao đổi chất nữa, lượng  $C^{12}$  không đổi trong khi lượng  $C^{14}$  giảm đi theo thời gian do phóng xạ. Bằng cách đo tỉ lệ  $C^{14}$  còn trong cơ thể người ta có thể suy ra thời điểm mà cơ thể chết. Đây là nguyên lí của phương pháp định tuổi bằng Carbon. Về mặt toán học, nếu biết giá trị của  $\frac{C(t)}{C(0)}$  ta có thể tính được  $t$ .

Năm 1991 người ta phát hiện được một xác người đóng băng trên dãy núi Alps ở Châu Âu, và đo được lượng  $C^{14}$  trong xác ướp này bằng 53% lượng  $C^{14}$  có trong một cơ thể sống. Hãy tính xem xác ướp này bao nhiêu tuổi?



**4.2.11.** Năm 1950 người ta phát hiện ở gần Biển Chết những phần của những cuốn sách viết trên giấy và da có nội dung liên quan tới kinh của người Do Thái cổ. Các nhà khảo cổ xác định được hàm lượng Carbon-14 trong các cuốn sách chỉ còn là 78%. Hãy tính tuổi của các cuốn sách này.

**4.2.12.** Người ta tìm thấy những bánh xe bằng gỗ của các chiến xa do ngựa kéo ở Kazakhstan. Hàm lượng Carbon-14 trong gỗ chỉ còn bằng 62.5% so với hàm lượng trong cây sống. Hãy tính tuổi của các bánh xe này.

**4.2.13.** Dân số loài người là 5,28 tỉ người vào năm 1990 và 6,07 tỉ người vào năm 2000. Giả thiết rằng do các hạn chế về tài nguyên, Quả Đất không thể đủ chỗ cho quá 10 tỉ người. Hãy dùng mô hình tăng trưởng dân số có kim hãm để dự đoán dân số thế giới vào năm 2025.

**4.2.14.** Giải phương trình của sự học ở Bài tập 4.1.8

$$P' = k(M - P).$$

Hãy vẽ đường cong nghiệm.

**4.2.15.** Giải phương trình của sự nguội ở Bài tập 4.1.7. Hãy vẽ đường cong nghiệm.

**4.2.16.** Một vật nóng được để nguội trong môi trường có nhiệt độ là  $30^\circ$ . Sau 10 phút ta đo được nhiệt độ của vật là  $50^\circ$  và sau 20 phút thì nhiệt độ của vật là  $40^\circ$ . Dùng mô hình phương trình vi phân của sự nguội, hãy tính nhiệt độ ban đầu của vật và sau bao lâu thì nhiệt độ của vật còn là  $35^\circ$ ?

**4.2.17.** Trong mạch điện được cho ở Hình 4.2.1 tìm cường độ dòng điện tức thời  $I(t)$  và vẽ đồ thị của nó (có thể dùng máy tính) trong các trường hợp:

- (a) Một pin cung cấp một điện áp không đổi 40 vôn, cảm kháng là 2 henri, trở kháng là 10 ôm và  $I(0) = 0$ .
- (b) Một máy phát điện cung cấp một điện áp  $E(t) = 40 \sin 60t$  vôn, cảm kháng là 1 henri, trở kháng là 20 ôm và  $I(0) = 1$  ampe.

**4.2.18.** Một *phương trình vi phân Bernoulli* là phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Nếu  $n = 0$  hoặc  $n = 1$  thì phương trình Bernoulli là tuyến tính. Với  $n$  nhận những giá trị khác, phép thế  $u = y^{1-n}$  biến đổi phương trình Bernoulli thành phương trình tuyến tính

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

Dùng phương pháp trên để giải các phương trình vi phân sau:

- (a)  $xy' + y = -xy^2$ .
- (b)  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$ .

**4.2.19.** Một phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$$

có thể được viết lại là

$$Pdx + Qdy = 0,$$

và được gọi là một *phương trình vi phân toàn phần*, hay một phương trình vi phân khớp (exact), nếu

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ta tìm một hàm  $f(x, y)$  sao cho

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

khi đó phương trình ẩn  $f(x, y) = C$ , với  $C \in \mathbb{R}$  là một hằng số, xác định một nghiệm của phương trình vi phân.

Ta có thể nhận thấy phương pháp này chính là phương pháp tìm hàm thế của một trường phẳng thỏa điều kiện cần của trường bảo toàn mà ta đã khảo sát ở Chương Giải tích vectơ, Mục 3.2.1, xem Ví dụ 3.2.6.

Dùng phương pháp trên để giải các phương trình vi phân sau:

$$(a) \quad y' = \frac{-2xy}{1+x^2}.$$

$$(c) \quad y' = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}.$$

$$(b) \quad y' = \frac{-y^2}{2xy+1}.$$

$$(d) \quad y' = -\frac{x^2+y+1}{x+y+y^3}.$$

**4.2.20.** Một *phương trình tích phân* là một phương trình chứa một ẩn hàm  $y(x)$  và một tích phân chứa  $y(x)$ . Giải phương trình tích phân sau. (*Hướng dẫn:* Lấy đạo hàm và sử dụng một điều kiện đầu thu được từ phương trình tích phân.)

$$(a) \quad y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]dt.$$

$$(b) \quad y(x) = 4 + \int_0^x 2t\sqrt{y(t)}dt.$$

## 4.3 Giải phương trình vi phân cấp hai

### 4.3.1 Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Một *phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng* là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ .

Ta ứng phương trình vi phân trên với một phương trình với ẩn là số thực hoặc phức, gọi là *phương trình đặc trưng* cho phương trình vi phân trên, là

$$ar^2 + br + c = 0.$$

*Cách giải phương trình cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

**Bước 1:** Giải phương trình đặc trưng  $ar^2 + br + c = 0$ .

**Bước 2:** Biện luận dựa vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

- nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực khác nhau  $r_1, r_2$  thì phương trình vi phân có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

- nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thực kép là  $r_0$  thì phương trình vi phân có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x},$$

- nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức là  $\alpha \pm i\beta$ , thì phương trình vi phân có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x],$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Ở đây ta gọi *nghiệm tổng quát* là nghiệm có thể thỏa điều kiện đầu cho trước bất kì.

*Chứng minh.* Ta xét trường hợp thứ nhất: phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực khác nhau  $r_1, r_2$ . Với

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

ta tính được

$$y'(x) = C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x}$$

và

$$y''(x) = C_1 r_1^2 e^{r_1 x} + C_2 r_2^2 e^{r_2 x}.$$

Từ đó

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = C_1 e^{r_1 x} (ar_1^2 + br_1 + cr_1) + C_2 e^{r_2 x} (ar_2^2 + br_2 + cr_2) = 0.$$

Trường hợp thứ hai tương tự, với

$$y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$$

ta tính được

$$y'(x) = C_1 r_0 e^{r_0 x} + C_2 e^{r_0 x} + C_2 x r_0 e^{r_0 x}$$

và

$$y''(x) = C_1 r_0^2 e^{r_0 x} + C_2 r_0 e^{r_0 x} + C_2 r_0 e^{r_0 x} + C_2 x r_0^2 e^{r_0 x},$$

từ đó

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = C_1 e^{r_0 x} (ar_0^2 + br_0 + cr_0) + C_2 x e^{r_0 x} (ar_0^2 + br_0 + cr_0) + C_2 e^{r_0 x} (2ar_0 + b) = 0,$$

chú ý rằng  $r_0 = -b/2a$ .

Trường hợp thứ ba cần tính toán nhiều hơn một chút. Thế nghiệm  $\alpha + i\beta$  vào phương trình đặc trưng ta được  $a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = 0$  và  $2a\alpha\beta + b\beta = 0$ . Ta cũng tính trực tiếp được

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= C_1 e^{\alpha x} [(\cos \beta x)(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) - (\sin \beta x)(2a\alpha\beta + b\beta)] + \\ &\quad + C_2 e^{\alpha x} [(\sin \beta x)(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) + (\cos \beta x)(2a\alpha\beta + b\beta)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 4.3.1.** Giải phương trình vi phân cấp hai

$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

Phương trình đặc trưng  $r^2 - 2r - 8 = 0$  có hai nghiệm thực phân biệt  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = -2$ . Do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x},$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 4.3.2.** Giải phương trình vi phân cấp hai

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng  $r^2 - 4r + 4 = 0$  có một nghiệm thực kép  $r_0 = 2$ . Do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 4.3.3.** Giải phương trình vi phân cấp hai

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Phương trình đặc trưng  $r^2 + 2r + 10 = 0$  có hai nghiệm phức là  $-1 \pm 3i$ . Do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y(x) = e^{-x}[C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x]$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 4.3.4.** Giải bài toán giá trị đầu sau

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng  $r^2 + r = 0$  có hai nghiệm thực phân biệt  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 0$ . Do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x},$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Do  $y(0) = 1$ , ta thu được  $C_1 + C_2 = 1$ . Ngoài ra, ta tính được đạo hàm của  $y$  như sau

$$y'(x) = -C_2 e^{-x}.$$

Từ điều kiện  $y'(0) = -\frac{1}{2}$ , ta tìm được  $C_2 = \frac{1}{2}$ . Do đó,  $C_1 = \frac{1}{2}$ . Vậy, nghiệm của bài toán là

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

**Ví dụ 4.3.5.** Ta giải phương trình vi phân chuyển động của lò xo (4.1.3):

$$mx'' = -kx.$$

Đây là một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng. Giải phương trình đặc trưng

$$mr^2 = -k$$

ta được hai nghiệm phức  $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Vậy phương trình có nghiệm tổng quát là

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}x + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}x,$$

với  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Nếu  $C_1$  và  $C_2$  không đồng thời bằng 0, ta viết được

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}x + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}x \right).$$

Đặt  $\sin \beta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$  thì ta viết được

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} (\sin \beta \cos \sqrt{\frac{k}{m}}x + \cos \beta \sin \sqrt{\frac{k}{m}}x) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin \left( \beta + \sqrt{\frac{k}{m}}x \right).$$

Đây là một hàm thể hiện một dao động điều hòa có đồ thị hình sin, đúng như hiện tượng vật lí.

### 4.3.2 Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Một *phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng* là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ ,  $f$  là một hàm liên tục trên một khoảng nào đó.

Ta giới thiệu một phương pháp được gọi là *phương pháp hệ số bất định* giúp tìm được nghiệm trong một số trường hợp. Trong các trường hợp này ta cố gắng tìm ra một nghiệm của phương trình, gọi là *nghiệm riêng* hay *nghiệm đặc biệt*. Gọi như vậy là vì nghiệm này chỉ thỏa một điều kiện đầu nhất định, trái với nghiệm tổng quát mà ta muốn tìm có thể thỏa điều kiện đầu cho trước bất kì.

Giả sử  $y$  là nghiệm tổng quát và  $y_r$  là một nghiệm riêng. Ta có đồng thời

$$ay'' + by' + cy = f$$

và

$$ay_r'' + by_r' + cy_r = f.$$

Trừ hai phương trình ta được

$$a(y - y_r)'' + b(y - y_r)' + c(y - y_r) = 0.$$

Vậy hiệu  $y - y_r$  của nghiệm tổng quát với nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Cách giải phương trình thuần nhất này ta đã thảo luận trong mục trước. Đặt  $y_0$  là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng này, ta được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = y_0 + y_r.$$

Như vậy bước chính để giải là tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

**Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng**

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

**Bước 1:** Giải phương trình thuần nhất

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

để được nghiệm tổng quát  $y_0$  của phương trình này.

**Bước 2:** Tìm một nghiệm riêng  $y_r$  của phương trình không thuần nhất. Nếu hàm  $f$  là một tổng, tức là  $f = f_1 + \dots + f_n$ , thì ta tìm nghiệm riêng tương ứng  $y_{r,1}, \dots, y_{r,n}$  cho từng hàm thành phần  $f_1, \dots, f_n$ , khi đó  $y_r = y_{r,1} + \dots + y_{r,n}$ .

**Bước 3:** Bây giờ nếu hàm  $f$  chỉ có một thành phần thì:

- (a) Nếu  $f$  là một đa thức bậc  $n$  thì  $y_r$  là một đa thức bậc  $n$ , có dạng  $y_r(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , với các  $a_i$  là hằng số.
- (b) Nếu  $f(x) = C e^{kx}$  với  $C$  và  $k$  là hằng số, thì  $y_r(x) = a e^{kx}$ , với  $a$  là hằng số.
- (c) Nếu  $f(x) = C \sin \alpha x$  hoặc  $f(x) = C \cos \alpha x$  với  $C$  là hằng số, thì  $y_r(x) = a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$ , với  $a$  và  $b$  là hằng số.

**Bước 4:** So sánh  $y_r$  với  $y_0$ . Nếu có thành phần trong  $y_r$  xuất hiện trong  $y_0$  thì phải chỉnh  $y_r$  bằng cách nhân thêm  $x$  hoặc  $x^2$  vào  $y_r$  để  $y_r$  và  $y_0$  không còn thành phần chung.

**Bước 5:** Thế  $y_r$  vào phương trình không thuần nhất tương ứng để giải tìm các hệ số chưa biết.

**Bước 6:** Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = y_0 + y_r.$$

Phương pháp này còn được phát triển hơn nữa, như khi  $f$  là một tích, có ở các tài liệu nâng cao hơn như [Long, Boyce09]. Phương pháp này khá phức tạp, để dễ hiểu hơn ta hãy xem xét các ví dụ sau.

**Ví dụ 4.3.6.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' - y = x^2.$$

Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y = 0$$

ta có nghiệm  $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .

Vế phải của phương trình vi phân  $x^2$  là một đa thức bậc 2, vậy ta tìm nghiệm  $y_r$  có dạng

$$y_r(x) = ax^2 + bx + c,$$

và ta thấy không có thành phần nào của  $y_r$  xuất hiện trong  $y_0$ .

Ta có

$$\begin{cases} y_r'(x) = 2ax + b \\ y_r''(x) = 2a. \end{cases}$$

Thay vào phương trình không thuần nhất ban đầu, ta được

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2$$

hay

$$-ax^2 - bx + 2a - c = x^2.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

hay  $a = -1, b = 0, c = -2$ . Do đó ta tìm được  $y_r(x) = -x^2 - 2$ .

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

**Ví dụ 4.3.7.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' + y = e^{2x}.$$

Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + y = 0$$

ta có nghiệm tổng quát  $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

Vế phải của phương trình không thuần nhất là hàm  $e^{2x}$ , vậy nghiệm  $y_r$  có dạng

$$y_r(x) = ae^{2x},$$

và ta thấy không có thành phần nào của  $y_r$  xuất hiện trong  $y_0$ .

Ta có

$$\begin{cases} y_r'(x) = 2ae^{2x} \\ y_r''(x) = 4ae^{2x}. \end{cases}$$

Thay vào phương trình không thuần nhất ban đầu ta được  $5ae^{2x} = e^{2x}$ , do đó  $a = \frac{1}{5}$ , và  $y_r(x) = \frac{1}{5}e^{2x}$ .

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{2x}.$$

**Ví dụ 4.3.8.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x.$$

Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 2y = 0$$

ta có nghiệm tổng quát  $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ .

Vế phải của phương trình không thuần nhất là hàm  $\sin 2x$ , vậy nghiệm  $y_r$  có dạng

$$y_r(x) = a \sin 2x + b \cos 2x,$$

và ta thấy không có thành phần nào của  $y_r$  xuất hiện trong  $y_0$ .

Ta có

$$\begin{cases} y'(x) = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x \\ y''(x) = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x. \end{cases}$$

Thay vào phương trình không thuần nhất ban đầu ta được  $-6a + 2b = 1$  và  $-2a - 6b = 0$ , do đó  $a = -\frac{3}{20}$ ,  $b = \frac{1}{20}$ , và

$$y_r(x) = -\frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x.$$

**Ví dụ 4.3.9.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}.$$

Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 12y = 0$$

ta có nghiệm  $y_0(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$ .

Vế phải của phương trình không thuần nhất là hàm  $e^{4x}$ , vậy nghiệm  $y_r$  có dạng

$$y_r(x) = a e^{4x},$$

nhưng ta thấy **thành phần  $e^{4x}$  của  $y_r$  cũng xuất hiện trong  $y_0$** , do đó theo phương pháp ta phải nhân thêm với  $y_r$  thừa số  $x$ , và nghiệm  $y_r$  thực ra có dạng

$$y_r(x) = a x e^{4x}.$$

Bây giờ thì  $y_r$  không còn thành phần chung với  $y_0$ .

Ta có

$$\begin{cases} y'(x) = a e^{4x} + 4a x e^{4x} \\ y''(x) = 8a e^{4x} + 16a x e^{4x}. \end{cases}$$

Thay vào phương trình không thuần nhất ban đầu, ta được

$$(8a e^{4x} + 16a x e^{4x}) - (a e^{4x} + 4a x e^{4x}) - 12a x e^{4x} = e^{4x}.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được  $a = \frac{1}{7}$ . Do đó ta tìm được

$$y_r(x) = \frac{1}{7} x e^{4x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{7} x e^{4x}.$$



**Ví dụ 4.3.10.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' - y' - 12y = e^{4x} + 3x - 2.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 12y = 0$$

ta đã giải trong Ví dụ 4.3.9 vừa rồi. Nghiệm là  $y_0(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$ .

Vế phải của phương trình không thuần nhất là hàm  $e^{4x} + (3x - 2)$ , là tổng của hai hàm  $e^{4x}$  và  $3x - 2$ , vậy ta cần tìm hai nghiệm riêng  $y_{r,1}$  tương ứng với  $e^{4x}$  và  $y_{r,2}$  tương ứng với  $3x - 2$ .

Nghiệm  $y_{r,1}$  tương ứng với phương trình

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

ta đã tìm được trong Ví dụ 4.3.9 vừa rồi là

$$y_{r,1}(x) = \frac{1}{7} x e^{4x}.$$

Nghiệm  $y_{r,2}$  tương ứng với phương trình

$$y'' - y' - 12y = 3x - 2,$$

là một đa thức bậc 1, có dạng

$$y_{r,2}(x) = ax + b.$$

Thay vào phương trình ta được

$$-a - 12(ax + b) = 3x - 2.$$

Suy ra  $a = -\frac{1}{4}$  và  $b = \frac{3}{16}$ . Vậy

$$y_{r,2}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y(x) = y_0(x) + y_{r,1}(x) + y_{r,2}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{7} x e^{4x} - \frac{1}{4} x + \frac{3}{16}.$$

## Bài tập

**4.3.1.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân.

(a)  $y'' + 3y' - 10y = 0.$

(b)  $\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

(c)  $\begin{cases} 4y'' + 20y' + 25y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

(d)  $\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

(e)  $\begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

(f)  $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

$$(g) \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(\pi) = e^{-\pi} \\ y'(\pi) = -2e^{-\pi}. \end{cases}$$

**4.3.2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân.

$$(a) \quad y'' + y' - 2y = 2x.$$

$$(b) \quad y'' - y' - 2y = 4x^2.$$

$$(c) \quad y'' - 2y' + y = x^2 - 1.$$

$$(d) \begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 100x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

$$(e) \quad y'' + 4y = 3 \sin x.$$

$$(f) \quad y'' - y' + 4y = \sin 2x.$$

$$(g) \quad y'' + 2y' - 3y = 2 \cos 3x.$$

$$(h) \quad y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x.$$

$$(i) \quad y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x}.$$

$$(j) \quad y'' - 2y' + y = -4e^x.$$

$$(k) \quad y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}.$$

$$(l) \quad y'' + 4y' - 5 = e^{-5x}.$$

$$(m) \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$$

$$(n) \quad y'' + y = 2e^{-x}.$$

$$(o) \quad y'' + 4y = x^2 + 3e^x.$$

$$(p) \quad y'' + 4y = \sin t + \sin(2t).$$

$$(q) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 3 - 2e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(r) \begin{cases} y'' - 4y' + 2y = xe^x \\ y(0) = -2/9 \\ y'(0) = 5/9. \end{cases}$$

## Tài liệu tham khảo

- [Ang] Sigurd Angenent, *Calculus*, <http://www.math.wisc.edu/~angenent/Free-Lecture-Notes>
- [Apo69] Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. 2, John Wiley and Sons, 1969.
- [Bmgt1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Phép tính vi tích phân 1*, Khoa Toán–Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, <http://www.math.hcmus.edu.vn/giaitich>
- [Boyce09] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th ed., John Wiley and Sons, 2009.
- [Buc78] Greighton Buck, *Advanced calculus*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1978.
- [Fich77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977.
- [Kap02] Wilfred Kaplan, *Advanced calculus*, 5th ed., Addison-Wesley, 2002.
- [Kha96] Phan Quốc Khánh, *Phép tính vi tích phân*, tập 1, Nhà Xuất Bản Giáo dục, 1996.
- [Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.
- [Long] Nguyễn Thành Long, *Giáo trình Giải tích A4*, Khoa Toán–Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.
- [MT03] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, 2003.
- [TPTT02] Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.
- [PTT02] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích - hàm nhiều biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.
- [TTQ11] Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình giải tích 2*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2011.
- [Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [Ste16] James Stewart, *Calculus: Early transcendentals*, 8th ed., Brooks/Cole, 2016. Có bản dịch tiếng Việt cho lần xuất bản thứ 7, Nhà xuất bản Hồng Đức 2016.
- [Tri07] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục, 2007.

- [Vugt3] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng Tích phân bội và Giải tích vectơ*, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, <http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/gt3.pdf>

# Chỉ mục

- $p_v u$ , 6
- Định lý cơ bản của tích phân đường, 83
- đồ thị, 10
- độ cong, 83
- động năng, 85
- đạo hàm
  - ánh xạ, 25
- đạo hàm riêng, 16
- đạo hàm theo hướng, 95
- định luật Faraday, 113
- định thức, 22
- định tuổi bằng Carbon, 132
- đường đi, 75
  - đóng, 75
  - đơn, 75
  - cùng định hướng, 80
  - chính qui, 80
  - liên tục, 75
  - trái định hướng, 80
  - vết, 75
- đường chính qui từng khúc, 107
- đường cong, 81
  - hướng tiếp tuyến, 81
- đường mức, 38
- đường thẳng, 7
- điểm, 5
- điểm biên, 8
- điểm dừng, 33
- điểm gốc tọa độ, 2
- điểm giới hạn, 9
- điểm tới hạn, 33
- điểm tụ, 9
- điểm trong, 8
- điểm yên, 33, 36
  
- bất đẳng thức tam giác, 4
- bài toán giá trị đầu, 116
- bổ đề Poincaré, 88, 107
- biên, 8
  
- công thức đổi biến, 58
- công thức Divergence, 107
- công thức Fubini, 52
- công thức Gauss-Ostrogradsky, 107
- công thức Green, 86, 90, 95, 115
- công thức Newton–Leibniz, 83
- công thức Pappus, 74
- công thức Stokes, 105
- công thức tích phân từng phần, 95
- cực đại địa phương, 32
- cực đại toàn cục, 32
- cực đại tương đối, 32
- cực đại tuyệt đối, 32
- cực tiểu địa phương, 32
- cực tiểu toàn cục, 32
- cực tiểu tương đối, 32
- cực tiểu tuyệt đối, 32
- cực trị, 32
- cơ sở vectơ chính tắc, 3
- chiều vuông góc, 6
- chiều dài Euclid, 3
- chuẩn, 3
- curl, 104
  
- div, 90, 107
  
- góc giữa hai vectơ, 5
  
- hình hộp, 44
  - con, 44
  - thể tích, 44
- hình sao, 88
- hàm đặc trưng, 47
- hàm điều hòa, 96, 115
- hàm Gamma, 73
- hàm mật độ, 69
- hàm thế, 83
  
- khối đơn giản với biên trơn từng mảnh, 107
- khối nón, 68
- khả tích, 45, 46
- khả vi liên tục, 20, 22

- khả vi từng khúc, 77
- khoảng cách Euclid, 3
- lân cận, 9
- liên tục, 12
- mô hình của sự học, 122
- mô hình của sự nguội, 122
- mô hình hậu cần, 119
- mô hình lãi nhập vốn liên tục, 132
- mô hình tăng trưởng dân số, 118
- mô hình tăng trưởng dân số có kim hãm, 119
- mặt, 96
  - định hướng, 100
  - đơn, 100
  - biên, 100
  - chính qui, 100
  - hướng lên, 100
  - vết, 96
- mặt phẳng, 7
- mặt phẳng tiếp xúc, 17
- ma trận, 22
- ma trận Hess, 34, 36
- ma trận Jacobi, 21
- miền, 46
- miền đơn giản, 53, 54
- nghiệm đặc biệt, 137
- nghiệm cân bằng, 119
- nghiệm riêng, 137
- nghiệm tổng quát, 135
- nhân tử Lagrange, 39
- phép đổi biến, 58
  - đảo ngược định hướng, 59, 99
  - bảo toàn định hướng, 59, 79, 99
- phép chia, 44
  - khoảng con, 44
- phân hoạch, 44
- phân rã của Carbon  $C^{14}$ , 132
- phần trong, 8
- phương pháp hệ số bất định, 137
- phương trình đặc trưng, 134
- phương trình vi phân
  - Bernoulli, 133
  - toàn phần, 133
  - trường vectơ, 117
- phương trình vi phân cấp hai tuyến tính
  - thuần nhất với hệ số hằng, 134
- phương trình vi phân cấp một tuyến tính, 127
- phương trình vi phân cấp một đẳng cấp, 126
- phương trình vi phân cấp một tách biến, 123
- số chiều, 3
- tích phân, 45
- tích phân đường
  - độc lập với đường đi, 83
  - loại hai, 78
  - loại một, 77
- tích phân lặp, 50
- tích phân mặt
  - loại hai, 98
  - loại một, 97
- tích trong Euclid, 3
- tích vô hướng Euclid, 3
- tập mức, 27
- tập đóng, 8
- tập bị chặn, 40
- tập compac, 40
- tập mở, 8
- tọa độ, 1
- tọa độ cầu, 63
- tọa độ trụ, 62
- tổng Riemann, 45
- thế năng, 85
- thông lượng, 90
- thể tích, 46
- thể tích không, 48
- tiêu chuẩn kẹp, 12
- toán tử Laplace, 95
- trực giao, 6
- trơn, 20, 22
  - đường đi, 76
- trường
  - bảo toàn, 83
  - gradient, 83
- trường vectơ, 78
- vectơ, 1
  - cùng hướng, 6
  - cùng phương, 6
  - tích có hướng, 6
- vectơ pháp tuyến, 8, 17
- vectơ pháp tuyến ngoài, 90
- vuông góc, 6