

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thi

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

# Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Chương 1

# MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

## Nội dung

- 1 Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH
  1. Ma trận
  2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
  3. Hệ phương trình tuyến tính
  4. Ma trận khả nghịch
  5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

# 1. Ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

- 1.1. Định nghĩa và ký hiệu.
- 1.2. Ma trận vuông.
- 1.3. Các phép toán ma trận.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.1. Định nghĩa và ký hiệu

### Định nghĩa

Một **ma trận** loại  $m \times n$  trên  $\mathbb{R}$  là một bảng chữ nhật gồm  $m$  dòng,  $n$  cột với  $mn$  hệ số trong  $\mathbb{R}$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Viết tắt:**  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  hay  $A = (a_{ij})$ , trong đó  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.1. Định nghĩa và ký hiệu

$a_{ij}$  là hệ số ở dòng  $i$ , cột  $j$  của ma trận  $A$  (hệ số này còn được ký hiệu là  $A_{ij}$ ).

Ký hiệu  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  là tập hợp tất cả những ma trận loại  $m \times n$  trên  $\mathbb{R}$ .

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}); B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Ma trận có các hệ số bằng 0, được gọi là **ma trận không**, ký hiệu  $0_{m \times n}$  (hay 0).

Ví dụ

$$0_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.2. Ma trận vuông

### Định nghĩa

*Ma trận vuông cấp  $n$*  là một ma trận loại  $n \times n$ , (số dòng bằng số cột). Ký hiệu  $M_n(\mathbb{R})$  là tập hợp các ma trận vuông cấp  $n$ .

### Ví dụ

$$A \in M_3(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}, 0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.2. Ma trận vuông

### Định nghĩa

Nếu  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  thì đường chứa các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  được gọi là **đường chéo chính** hay **đường chéo** của  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.2. Ma trận vuông

### Định nghĩa

Một *ma trận chéo cấp  $n$*  là một ma trận vuông cấp  $n$  mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0. Nếu  $A$  là một ma trận chéo cấp  $n$ , ta ký hiệu  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

### Ví dụ

$$A = \text{diag}(1, 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.2. Ma trận vuông

### Định nghĩa

*Ma trận đơn vị cấp  $n$* , ký hiệu  $I_n$  hay  $I$ , là ma trận chéo cấp  $n$  mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

### Ví dụ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.2. Ma trận vuông

### Định nghĩa

*Ma trận tam giác trên* (tương ứng *ma trận tam giác dưới*) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương ứng phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. Như vậy,

- $A = (a_{ij})_{n \times n}$  là ma trận tam giác trên khi và chỉ khi  $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$ .
- $B = (b_{ij})_{n \times n}$  là ma trận tam giác dưới khi và chỉ khi  $b_{ij} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$ .

## 1.2. Ma trận vuông

### Nhận xét

*Ma trận vuông  $A$  là ma trận đường chéo khi và chỉ khi  $A$  vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.*

### Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Định nghĩa (so sánh hai ma trận)

Cho hai ma trận cùng loại  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  và  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . Ta nói **A bằng B**, ký hiệu  $A = B$ , nếu  $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Định nghĩa (phép lấy chuyển vị)

Cho  $A = (a_{ij})$  là một ma trận loại  $m \times n$ . Ta gọi **ma trận chuyển vị** của  $A$ , ký hiệu  $A^T$ , là ma trận loại  $n \times m$ , có được từ  $A$  bằng cách xếp các dòng của  $A$  thành các cột tương ứng,

nghĩa là nếu  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  thì

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

Nếu  $A^T = A$  thì ta nói  $A$  là *ma trận đối xứng*. Nếu  $A^T = -A$  thì nói  $A$  là *ma trận phản xứng*.

### Tính chất

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Khi đó

- $(A^T)^T = A$ ;
- $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$ .



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  ta có  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  là ma trận đối xứng.

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  là ma trận phản xứng.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

**Định nghĩa (Phép nhân vô hướng với ma trận)**

Cho ma trận  $A = (a_{ij})$  và số thực  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ta định nghĩa  $\alpha A$  là ma trận có từ  $A$  bằng cách nhân tất cả các hệ số của  $A$  với  $\alpha$ , nghĩa là

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ma trận  $(-1)A$  được ký hiệu là  $-A$ , được gọi là ma trận đối của  $A$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , ta có  $2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  
 $-A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

### Tính chất

Với  $A = (a_{ij})$  và  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ta có

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ ;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ;
- $0A = 0$  và  $1A = A$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Định nghĩa (Phép cộng ma trận)

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Khi đó **tổng** của  $A$  và  $B$ , ký hiệu  $A + B$ , là ma trận được xác định bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Ký hiệu  $A - B := A + (-B)$  và gọi là **hiệu** của  $A$  và  $B$ .

### Ví dụ

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tính  $A + B$  và  $A - B$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Tính chất

Với  $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  và  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ta có

- i.  $A + B = B + A$ ;
- ii.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- iii.  $0_{m \times n} + A = A + 0_{m \times n} = A$ ;
- iv.  $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ ;
- v.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- vi.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- vii.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;
- viii.  $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Định nghĩa (phép nhân ma trận)

Cho hai ma trận  $A = (a_{ij})$  loại  $m \times n$  và  $B = (b_{ij})$  loại  $n \times p$ . Ta định nghĩa **tích** của hai ma trận  $A$  và  $B$ , ký hiệu là  $AB$ , là ma trận định bởi:

- $AB$  có loại  $m \times p$ .
- $AB$  có hệ số ở dòng  $i$ , cột  $j$  được tính bởi công thức

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

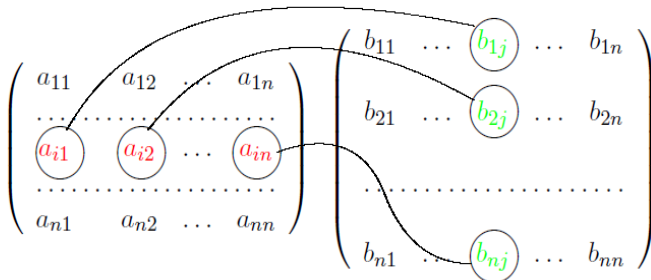
Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận



Ví dụ

Với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , tìm tích  $AB = ?$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

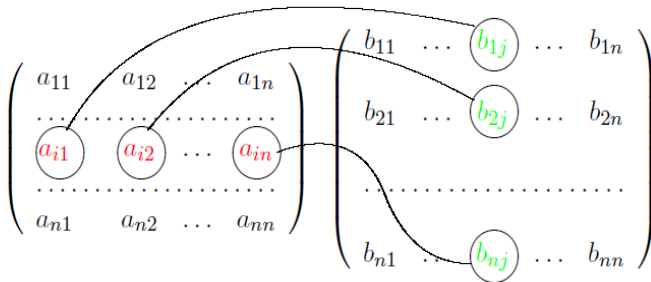
Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận



Ví dụ

Với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , tìm tích  $AB = ?$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Tính chất

Với  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B, B_1, B_2 \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ,  $D_1, D_2 \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$ , ta có

- $I_m A = A$  và  $A I_n = A$ . Đặc biệt, với  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , ta có

$$I_n A = A I_n = A.$$

- $0_{p \times m} A = 0_{p \times n}$  và  $A 0_{n \times q} = 0_{m \times q}$ . Đặc biệt, với  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , ta có

$$0_{n \times n} A = A 0_{n \times n} = 0_{n \times n}.$$

- $(AB)^T = B^T A^T$ .

## 1.3. Các phép toán ma trận

- Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, nghĩa là

$$(AB)C = A(BC).$$

- Phép nhân ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng, nghĩa là

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Chú ý

1. *Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường ta có  $AB \neq BA$ .*
2. *Nhiều tính chất quen thuộc của phép nhân giữa các số thực không còn đúng đối với phép nhân ma trận, chẳng hạn:*

Với  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ta có  $A^2 = 0$ ;

$AB = AC$ , nhưng  $A, B$  đều khác 0 và  $B \neq C$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

3. Hệ phương trình tuyến tính

4. Ma trận khả nghịch

5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

**Định nghĩa (lũy thừa ma trận vuông)**

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Ta gọi **lũy thừa** bậc  $k$  của  $A$  là một ma trận thuộc  $M_n(\mathbb{R})$ , ký hiệu  $A^k$ , được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \dots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy  $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ lần}}$ .

## 1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^2, A^3, \dots$ , từ đó suy ra  $A^{100}$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^2, A^3, \dots$ , từ đó suy ra  $A^{100}$ .

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Suy ra } A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^{100}$ .

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^n$  với  $n > 1$ .

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Tính chất

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$  và  $k, l \in \mathbb{N}$ . Khi đó:

- $I^k = I$ ;
- $A^{k+l} = A^k A^l$ ;
- $A^{kl} = (A^k)^l$ .



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

3. Hệ phương trình tuyến tính

4. Ma trận khả nghịch

5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Định nghĩa

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$  và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc  $m$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi  $f(A)$  là **đa thức theo ma trận**  $A$ .

## 1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  và  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ . Tính  $f(A)$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 1.3. Các phép toán ma trận

### Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  và  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ . Tính  $f(A)$ .

Ta có  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$ .

Do đó

$$\begin{aligned} f(A) &= 3 \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Ma trận
- 2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng**
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
- 2. Các phép biến đổi  
sơ cấp trên dòng**
3. Hệ phương trình  
tuyến tính
4. Ma trận khả  
nghịch
5. Phương trình ma  
trận

## 2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

- 2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
- 2.2. Ma trận bậc thang.
- 2.3. Hạng của ma trận.

## 2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

### Định nghĩa

Cho  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng*, viết tắt là phép **BDSCTD** trên  $A$ , là một trong ba loại biến đổi sau:

- Loại 1: Hoán vị hai dòng  $i$  và  $j$  ( $i \neq j$ ). Ký hiệu:  $d_i \leftrightarrow d_j$ .
- Loại 2: Nhân dòng  $i$  với một số  $\alpha \neq 0$ . Ký hiệu:  $d_i := \alpha d_i$ .
- Loại 3: Cộng vào một dòng  $i$  với  $\beta$  lần dòng  $j$  ( $j \neq i$ ). Ký hiệu:  $d_i := d_i + \beta d_j$ .

Với  $\varphi$  là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu  $\varphi(A)$  là ma trận có từ  $A$  qua  $\varphi$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Nhận xét

1.  $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$
2.  $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A$
3.  $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A$

## Định nghĩa

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Ta nói  $A$  **tương đương dòng** với  $B$ , ký hiệu  $A \sim B$ , nếu  $B$  có được từ  $A$  qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy  $A \sim B \Leftrightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_k$  là các phép BĐSCTD sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.2. Ma trận bậc thang

### Định nghĩa

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Hệ số khác 0 đầu tiên kể từ bên trái của mỗi dòng được gọi là **phần tử cơ sở** của dòng đó. Ta nói  $A$  là **ma trận bậc thang** nếu  $A$  thỏa hai tính chất sau:

1. Các dòng khác 0 luôn luôn ở trên các dòng bằng 0 của  $A$ .
2. Trên hai dòng khác 0 của  $A$ , phần tử cơ sở của dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của dòng trên.



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.2. Ma trận bậc thang

### Định nghĩa (Ma trận bậc thang rút gọn)

Ma trận  $A$  được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu các tính chất sau được thỏa

1.  $A$  có dạng bậc thang.
2. Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
3. Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các hệ số ngoài phần tử cơ sở đều bằng 0.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C$  là ma trận bậc thang rút gọn,  $D$  không là ma trận bậc thang rút gọn.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

### Nội dung

#### Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Định nghĩa

Nếu  $A$  tương đương dòng với một ma trận bậc thang  $B$ , thì ta nói  $B$  là một **dạng bậc thang** của ma trận  $A$ .

## Nhận xét

*Một ma trận  $A$  thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của  $A$  đều có chung số dòng khác 0.*

## 2.3. Hạng của ma trận

### Định nghĩa

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của  $A$  là **hạng** của  $A$ , ký hiệu  $r(A)$ .

### Mệnh đề

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Khi đó:

- i.  $0 \leq r(A) \leq m, n$ ;
- ii.  $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ;
- iii.  $r(A^T) = r(A)$ ;
- iv. Nếu  $A \sim B$  thì  $r(A) = r(B)$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi  
sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình  
tuyến tính
4. Ma trận khả  
nghịch
5. Phương trình ma  
trận

## 2.3. Hạng của ma trận

### Định nghĩa

Nếu  $A$  tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn  $B$  thì  $B$  được gọi là **dạng bậc thang rút gọn của  $A$**

### Nhận xét

*Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận  $A$  là duy nhất và được ký hiệu  $R_A$ .*

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.3. Hạng của ma trận

Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ , tìm  $R_A$ ?



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 2.3. Hạng của ma trận

Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ , tìm  $R_A$ ?

$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $R_A$  có được từ  $A$  thông qua các

phép biến đổi:  $d_2 := d_2 + 2d_1$ ,  $d_3 := d_3 - 3d_1$ ,  $d_2 := -1d_2$ ,  $d_1 := d_1 - 2d_2$ .

## Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

- Bước 1:  $i := 1, j := 1$ .
- Bước 2: Nếu  $i > m$  hoặc  $j > n$  thì kết thúc.
- Bước 3: Nếu  $a_{ij} = 0$  thì sang bước 4. Nếu  $a_{ij} \neq 0$  thì thực hiện các phép BÐSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \quad k > i.$$

Sau đó  $i := i + 1, j := j + 1$  và quay về bước 2.

- Bước 4: Nếu  $a_{kj} = 0$  với mọi  $k > i$  thì  $j := j + 1$  và quay về Bước 2. Nếu  $a_{kj} \neq 0$  với một  $k > i$  nào đó thì chọn một  $k$  như vậy và thực hiện phép BÐSCTD:  $d_i \leftrightarrow d_k$  và quay về Bước 3.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm một dạng bậc thang  $R$  của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Từ đó xác định hạng của  $A$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

$$\begin{aligned}
 A \xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - 7d_3 \\ d_2 := d_2 + 2d_3 \\ d_4 := d_4 - 2d_3}} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R
 \end{aligned}$$

Ta có  $A \sim R$  và  $R$  có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên  $A$  có hạng là  $r(A) = 3$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm hạng của các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $r(A) = 3$  với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $r(B) = 2$  với

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Thuật toán Gauss-Jordan. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Để đưa ma trận  $A$  về dạng bậc thang rút gọn, ta làm như thuật toán Gauss ở các Bước 1, 2, 4, riêng ở Bước 3 ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \text{ với } k \in \overline{1, n}; k \neq i;$$

$$d_i := \frac{1}{a_{ij}} d_i.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Thuật toán Gauss-Jordan. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

$$A \xrightarrow{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1 \\ d_4:=d_4-6d_1}} \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ \color{red}{0} & 0 & -2 & -5 & -2 \\ \color{red}{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2 \\ d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2 \\ d_2:=d_2-\frac{1}{2}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3 \\ d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy  $R_A$  là dạng bậc thang rút gọn của  $A$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi  
sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình  
tuyến tính**
4. Ma trận khả  
nghịch
5. Phương trình ma  
trận

## 3. Hệ phương trình tuyến tính

3.1. Định nghĩa

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

3.4. Định lý Kronecker-Capelli



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.1. Định nghĩa

- $a_{ij}$  là các hệ số;

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.1. Định nghĩa

- $a_{ij}$  là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$  là các hệ số tự do;

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.1. Định nghĩa

- $a_{ij}$  là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$  là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số nhận giá trị trong  $\mathbb{R}$ ;

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.1. Định nghĩa

- $a_{ij}$  là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$  là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số nhận giá trị trong  $\mathbb{R}$ ;

Nếu các hệ số  $b_i = 0$  thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là **hệ phương trình tuyến tính thuần nhất** trên  $\mathbb{R}$ .

## 3.1. Định nghĩa

- $a_{ij}$  là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$  là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số nhận giá trị trong  $\mathbb{R}$ ;

Nếu các hệ số  $b_i = 0$  thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là **hệ phương trình tuyến tính thuần nhất** trên  $\mathbb{R}$ .

### 2. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là **ma trận hệ số** của hệ  $(*)$ .



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ma trận  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ (\*).

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ma trận  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ (\*).

Ma trận  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *ẩn* của hệ (\*).

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ma trận  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ (\*).

Ma trận  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *ẩn* của hệ (\*).

Khi đó hệ (\*) được viết dưới dạng  $AX = B$ . Đặt

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ma trận  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  được gọi là cột các **hệ số tự do** của hệ (\*).

Ma trận  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  được gọi là cột các **ẩn** của hệ (\*).

Khi đó hệ (\*) được viết dưới dạng  $AX = B$ . Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ma trận  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ (\*).

Ma trận  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  được gọi là cột các *ẩn* của hệ (\*).

Khi đó hệ (\*) được viết dưới dạng  $AX = B$ . Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ (\*).

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

### Định nghĩa

Ta nói  $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  là nghiệm của hệ phương trình  $(*)$  nếu ta thay thế  $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, \dots, x_n := \alpha_n$  thì tất cả các phương trình trong  $(*)$  đều thỏa.

### Định nghĩa

Hai hệ phương trình là **tương đương** nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

### Nhận xét

*Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:*

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.*
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

### Định lý

*Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.*

### Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \end{array}]{\begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\begin{array}{l} d_1 := d_1 - 3d_3 \\ d_3 := -\frac{1}{7}d_3 \end{array}]{\begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} d_1 := d_1 - 3d_3 \\ d_3 := -\frac{1}{7}d_3 \end{array}]{\begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ta có  $\tilde{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ . Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1; \\ 0x + y + 0z = 2; \\ 0x + 0y + z = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 1. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (2)$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 9z = 9 \\ y + 7z = -5. \end{cases}$$

Như vậy nghiệm của hệ (2) là 
$$\begin{cases} x = 9 + 9t \\ y = -5 - 7t \\ z = t. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (3)$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì  $0x + 0y + 0z = -5$ .





1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

### Định lý

*Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:*

- Vô nghiệm;
- Duy nhất một nghiệm;
- Vô số nghiệm.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss-Jordan

### Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng  $\tilde{A} = (A|B)$ .

Bước 2. Đưa ma trận  $\tilde{A}$  về dạng bậc thang  $R$ .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang  $R$  mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 1. Ma trận  $R$  có 1 dòng là

$$(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid \neq 0)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 2. Ma trận  $R$  có dạng

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \mathbf{c}_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & \mathbf{c}_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{c}_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- **Trường hợp 3.** Khác 2 trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ảnh hưởng với các cột không chứa phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ảnh hưởng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

### Ví dụ

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

$$\text{Ma trận mở rộng } \tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang  $R$  của ma trận mở rộng  $\tilde{A}$  là

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right)$$

Suy ra nghiệm của hệ là 
$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 5; \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

### Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array} \right)$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang  $R$  của ma trận mở rộng:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Hệ có nghiệm: } \begin{cases} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -2 + 10t - 17s \\ x_1 = 5 - 17t + 29s \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right)$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- 3. Hệ phương trình tuyến tính**
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang  $R$  của ma trận mở rộng:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

### Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng  $\tilde{A} = (A|B)$ .

Bước 2. Đưa ma trận  $\tilde{A}$  về dạng bậc thang rút gọn  $R_A$ .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn  $R_A$  mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- **Trường hợp 1.** Ma trận  $R_A$  có một dòng  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \neq 0)$ . Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 2. Ma trận  $R_A$  có dạng

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- **Trường hợp 3.** Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ảnh hưởng với các cột không có phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ảnh tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ảnh hưởng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ảnh tự do.

Số ảnh tự do được gọi là **bậc tự do** của hệ phương trình.

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

### Định lý (Kronecker-Capelli)

Nếu  $\tilde{A} = (A|B)$  là ma trận mở rộng của hệ gồm  $n$  ẩn dạng  $AX = B$  thì  $r(\tilde{A}) = r(A)$  hoặc  $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ . Hơn nữa,

- nếu  $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$  thì hệ vô nghiệm;
- nếu  $r(\tilde{A}) = r(A) = n$  thì hệ có nghiệm duy nhất;
- nếu  $r(\tilde{A}) = r(A) < n$  thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là  $n - r(A)$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

### Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số

$$m. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array} \right)$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang  $R$  của ma trận mở rộng

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array} \right)$$

**Biện luận**

- Với  $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ . Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với  $m = 2$ , hệ tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ -x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Chọn  $x_4 = t$  ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - t; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14t; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21t \end{cases}$$

Vậy khi  $m = 2$ , hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số  $m$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

### Nội dung

#### Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang của ma trận mở rộng

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array} \right)$$

**Biện luận**

- Với  $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$ , hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 = m; \\ x_3 = m + 1 - x_4 = 1; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 - 2m; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

### 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Vậy khi  $m \neq 7$  hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là:  
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3 - 2m, 1, m)$ .

- Với  $m = 7$ , hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Chọn  $x_4 = t$  ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Vậy khi  $m = 7$  hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t)$$

với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
- 4. Ma trận khả nghịch**
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại  
số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi  
sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình  
tuyến tính
- 4. Ma trận khả  
nghịch**
5. Phương trình ma  
trận

## 4. Ma trận khả nghịch

### 4.1. Định nghĩa.

### 4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch.



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 4.1. Định nghĩa

### Định nghĩa

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Ta nói  $A$  **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận  $B$  sao cho  $AB = BA = I_n$ . Nếu  $B$  thỏa điều kiện trên được gọi là **ma trận nghịch đảo** của  $A$ .

### Nhận xét

*Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của  $A$  là  $A^{-1}$ .*

### Ví dụ

Cho  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Khi đó  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 4.1. Định nghĩa

### Mệnh đề

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Giả sử  $A$  khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là  $A^{-1}$ . Khi đó

- $A^{-1}$  khả nghịch và  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- $A^T$  khả nghịch và  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha A$  khả nghịch và  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ .

### Mệnh đề

Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Giả sử  $A$  và  $B$  khả nghịch thì  $AB$  khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

### Định lý

Cho  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

- i.  $A$  khả nghịch.
- ii.  $r(A) = n$ .
- iii.  $A \sim I_n$ .
- iv. Tồn tại các phép BĐSCTD  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  biến ma trận  $A$  thành ma trận đơn vị  $I_n$ .  $A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ , ma trận đơn vị  $I_n$  sẽ biến thành ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ :  

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập  $(A|I_n)$  và dùng các phép BÐSCTD đưa  $A$  về dạng bậc thang rút gọn:  $(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \dots$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Trong dãy biến đổi trên, tồn tại  $p$  sao cho ma trận  $A_p$  có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó  $A$  không khả nghịch.
- **Trường hợp 2:** Mọi ma trận  $A_i$  trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng trong dãy trên có dạng  $(I_n|B)$ . Ta có  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ .

## Chú ý

*Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận  $A$  có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).*

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Ví dụ

Xét tính khả nghịch của  $A$  và tìm  $A^{-1}$  (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

$$(A|I_4) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Nội dung

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

3. Hệ phương trình tuyến tính

4. Ma trận khả nghịch

5. Phương trình ma trận

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_1 := d_1 - 2d_2 \\ d_3 := d_3 - d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_1 := d_1 - 7d_3 \\ d_2 := d_2 + 2d_3 \\ d_4 := d_4 - 2d_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_4 \\ d_2 := d_2 - d_4 \\ d_3 := d_3 - d_4 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) = (I_4 | A^{-1})$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Vậy ma trận khả nghịch là  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của  $A$ , và tìm  $A^{-1}$  (nếu có).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

$$(A|I_4) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{d_3 := d_3 - 2d_2 \\ d_4 := d_4 - 3d_2}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ta có  $r(A) < 4$ . Suy ra  $A$  không khả nghịch.

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 5. Phương trình ma trận

### Định lý

Cho các ma trận  $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$  khả nghịch và  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $D \in M_n(\mathbb{R})$ . Khi đó

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ ;
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$ ;
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## 5. Phương trình ma trận

### Ví dụ

Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Chứng tỏ  $A$  khả nghịch và tìm  $A^{-1}$ .
- b. Tìm ma trận  $X$  thỏa  $AXA = AB$ .
- c. Tìm ma trận  $X$  thỏa  $A^2XA^2 = ABA^2$ .

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh  
Thị

Nội dung

Chương 1: MA  
TRẬN VÀ HỆ  
PHƯƠNG  
TRÌNH  
TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

## Hệ quả

Cho các ma trận  $A \in M_n(\mathbb{R})$  khả nghịch và  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Ta có

- Nếu  $AB = 0$  thì  $B = 0$ .
- Nếu  $CA = 0$  thì  $C = 0$ .