



ĐỒ THỊ PHẪNG

cuu duong than cong . com

ntsonptnk@gmail.com

cuu duong than cong . com

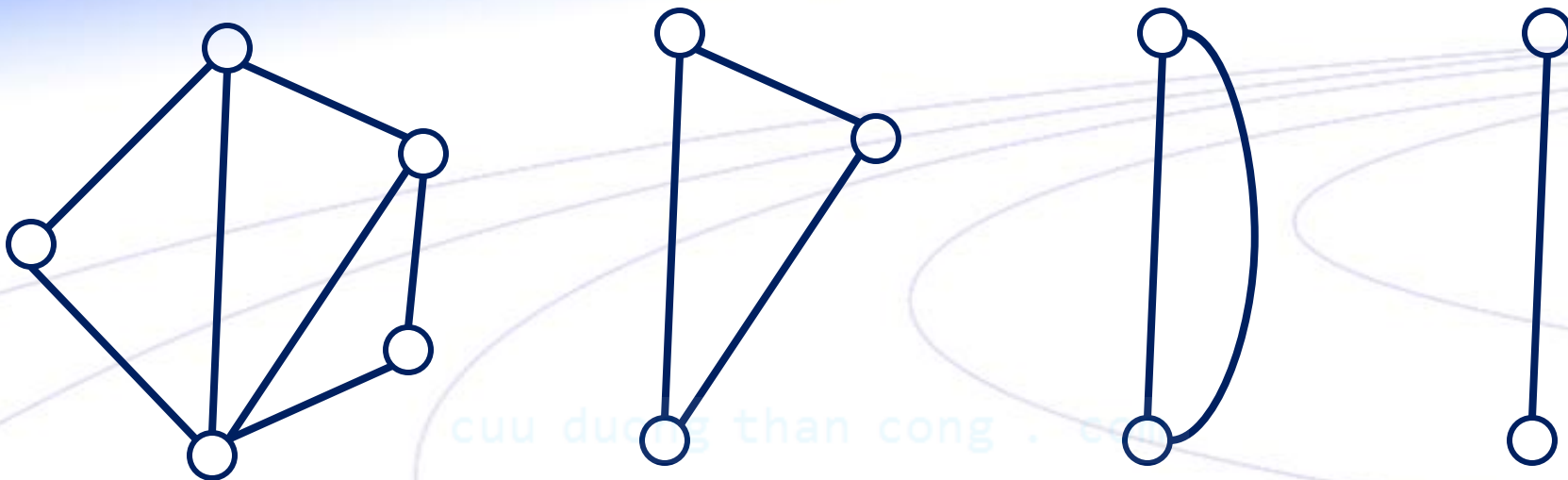


NỘI DUNG

✦ Đồ thị phẳng

- ✦ Định nghĩa
- ✦ Các phép rút gọn cơ bản
- ✦ Định lý Kuratowsky
- ✦ Công thức Euler

✦ Tô màu đồ thị



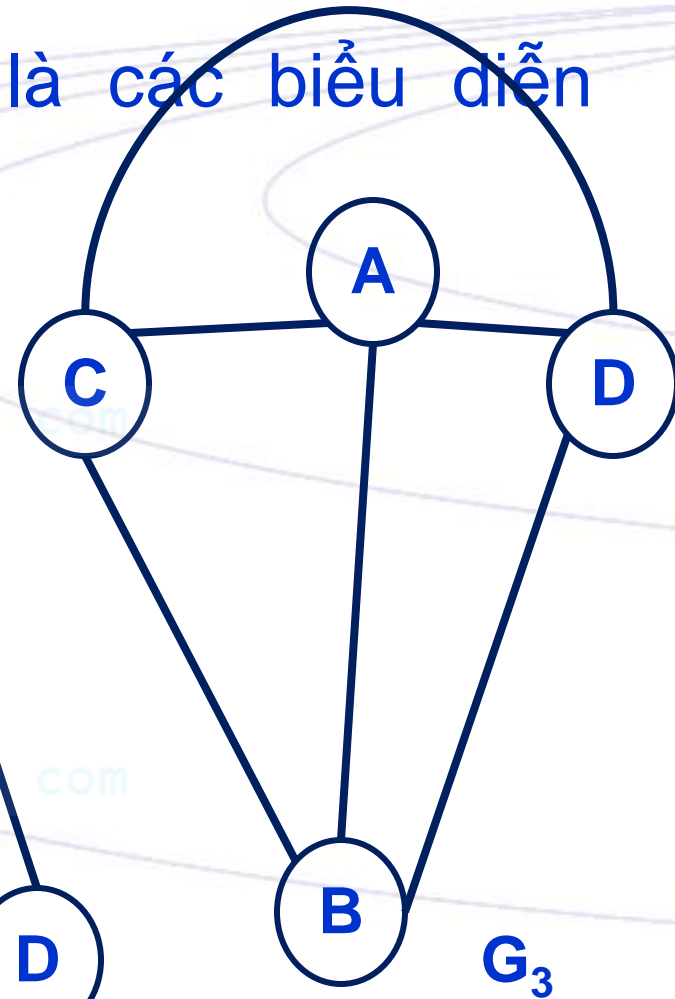
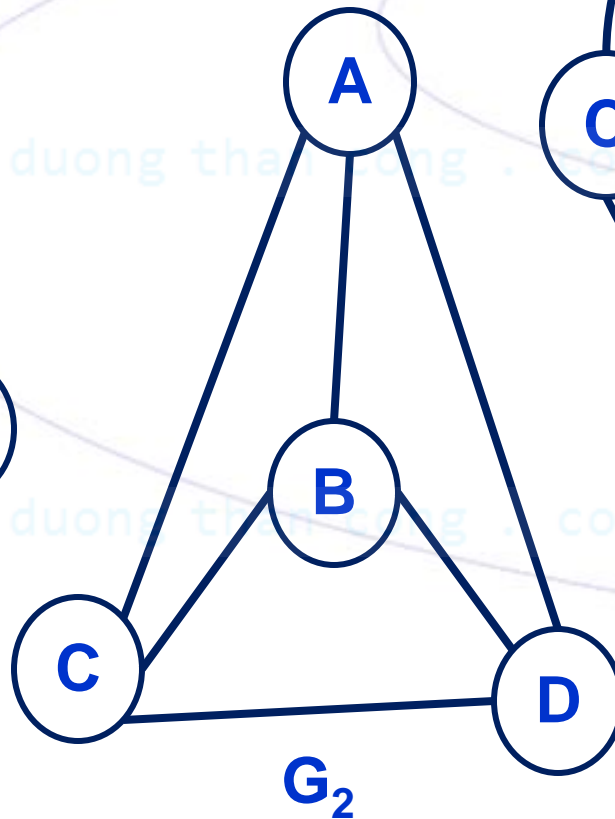
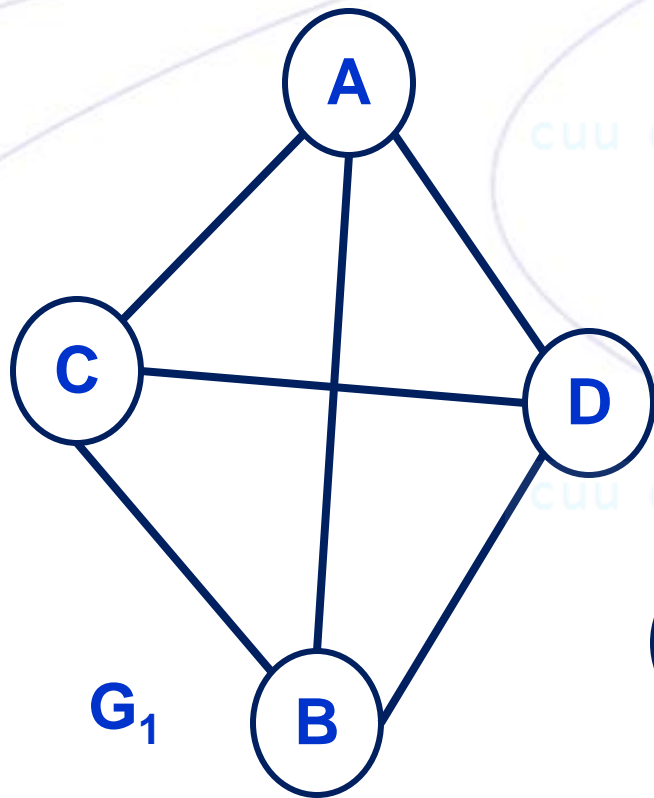
ĐỒ THỊ PHẪNG

ĐỊNH NGHĨA

- ✦ Đồ thị vô hướng G được gọi là phẳng nếu tồn tại một cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.
- ✦ Khi G là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau được gọi là một biểu diễn phẳng của G .
- ✦ *Hai cạnh chung đỉnh được qui ước là không cắt nhau*

VÍ DỤ

✦ G_1 là đồ thị phẳng. G_2, G_3 là các biểu diễn phẳng của G_1





ĐỒ THỊ ĐỒNG PHÔI

✦ Các PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒNG PHÔI:

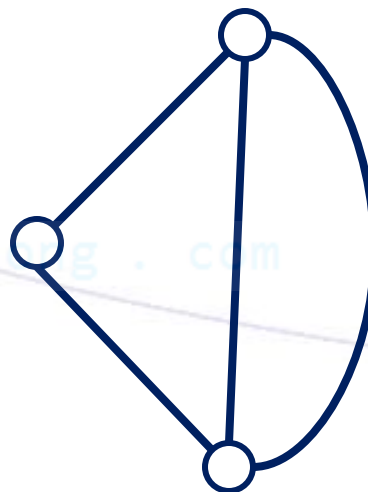
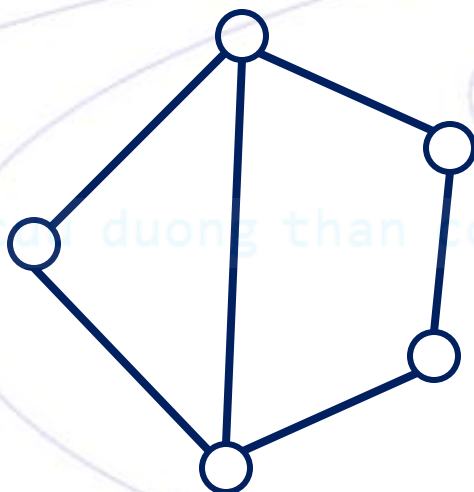
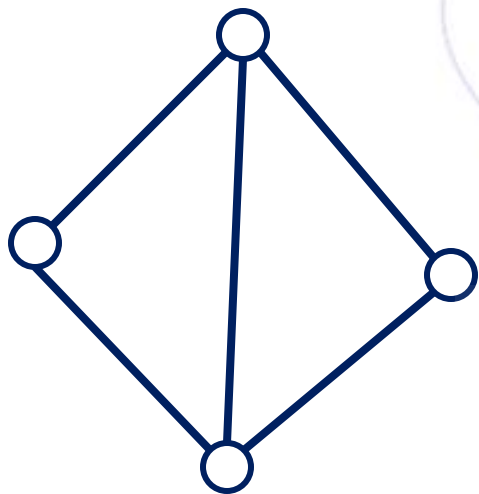
- ✦ Thêm 1 đỉnh nằm trên một cạnh
- ✦ Gộp 2 cạnh chung đỉnh bậc 2 thành 1 cạnh

✦ **ĐỒ THỊ ĐỒNG PHÔI:** Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi

cuu duong than cong . com

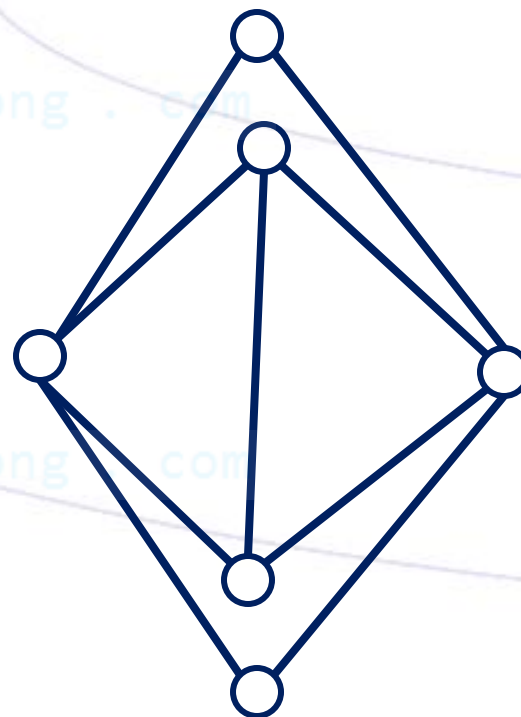
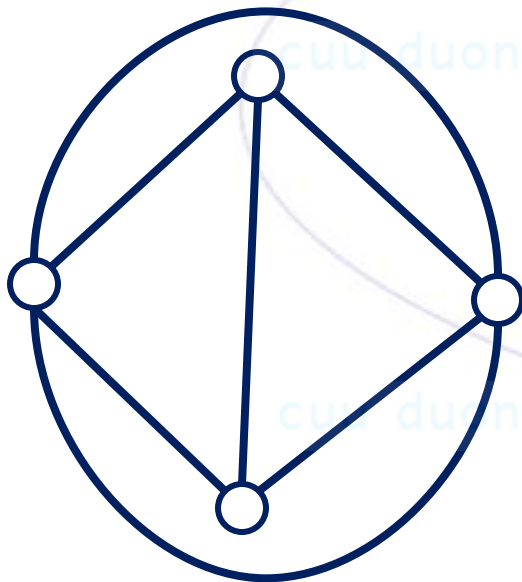
VÍ DỤ

★ Các đồ thị đồng phôi



ĐỊNH LÝ

- ✦ Nếu G là đồ thị phẳng thì ta có thể tìm được đồ thị G_1 đồng phôi với G và G_1 có biểu diễn phẳng với các cạnh là các đoạn thẳng.



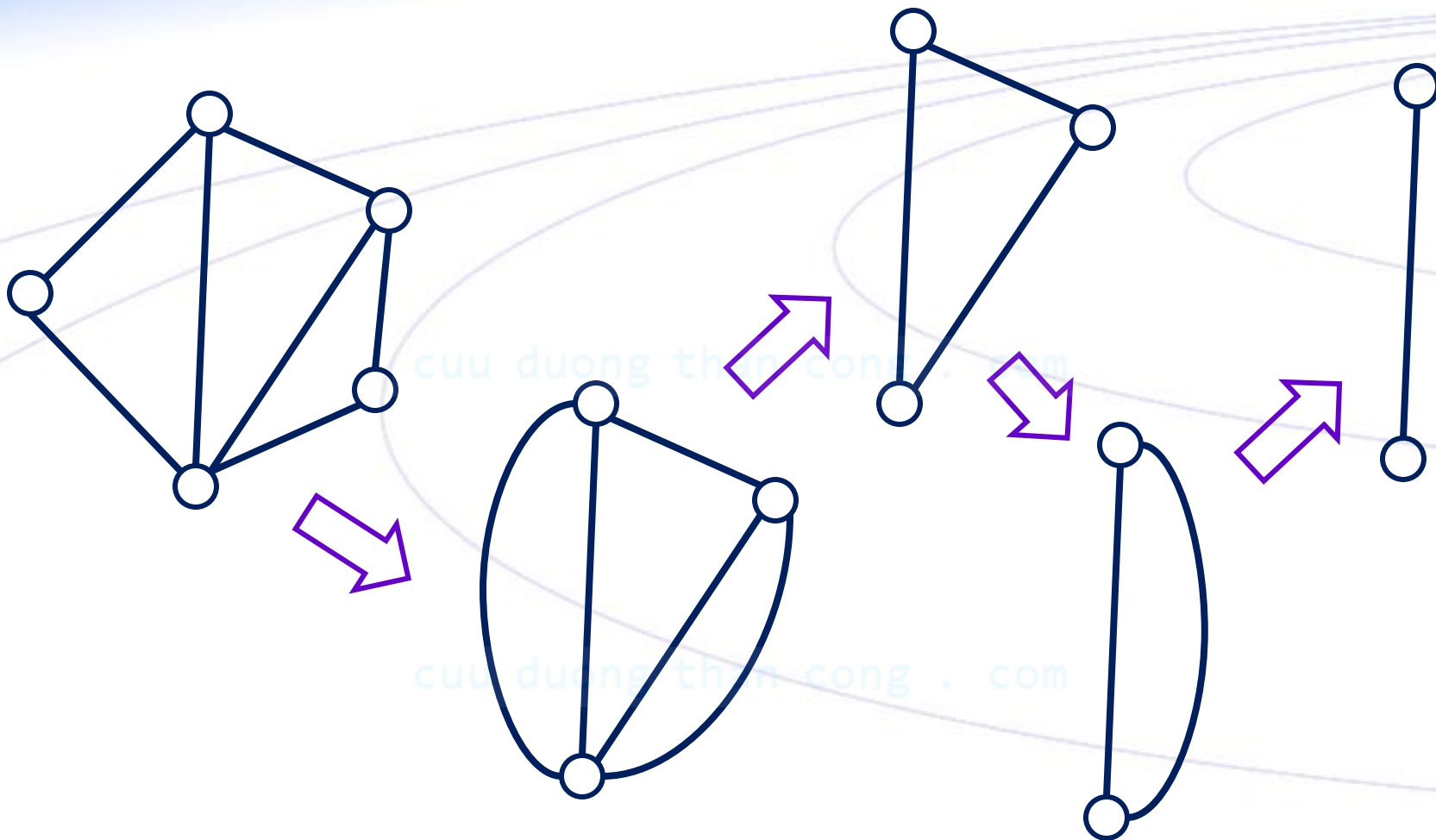


CÁC PHÉP RÚT GỌN CƠ BẢN

Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:

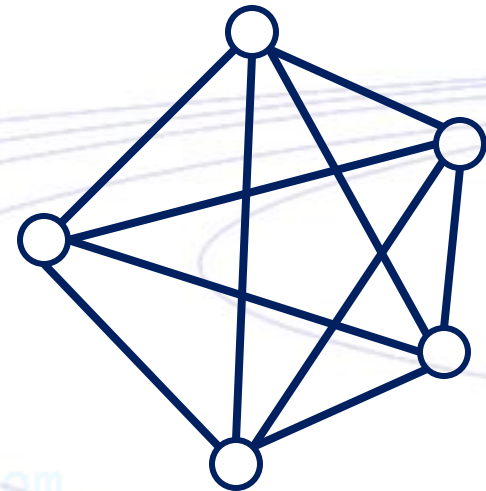
- ✦ Bỏ đi các khuyên
- ✦ Bỏ bớt các cạnh song song, chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh.
- ✦ Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

VÍ DỤ

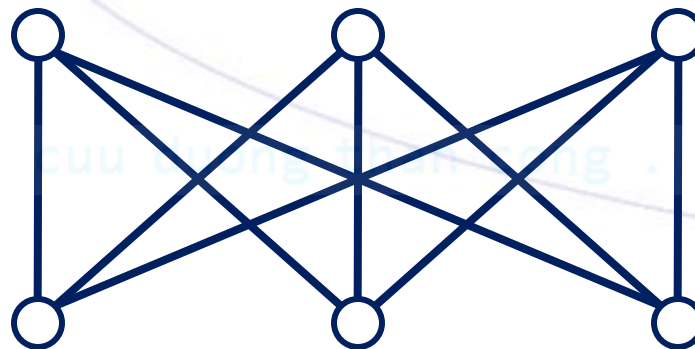


ĐỊNH LÝ KURATOWSKY

1. Đồ thị đủ K_5 không phẳng



2. Đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$ không phẳng





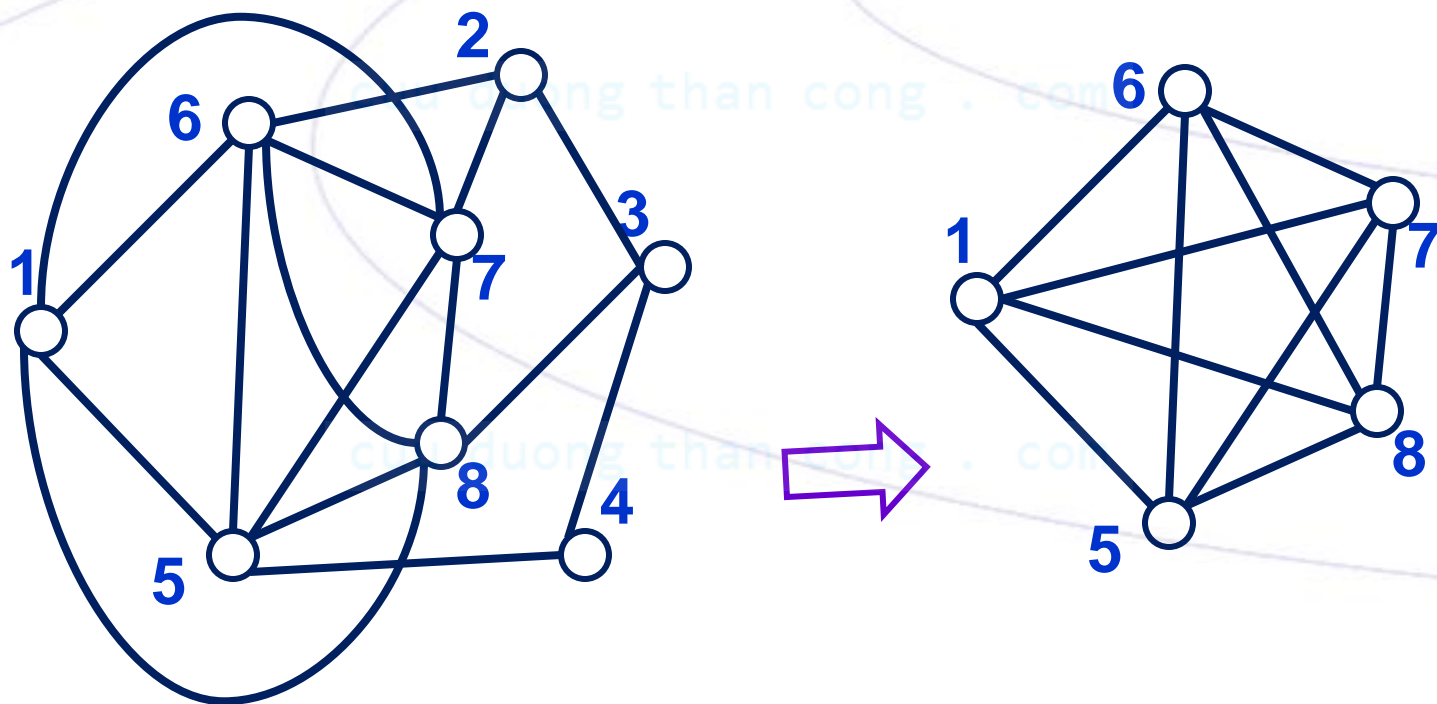
ĐỊNH LÝ KURATOWSKY

K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất theo nghĩa:

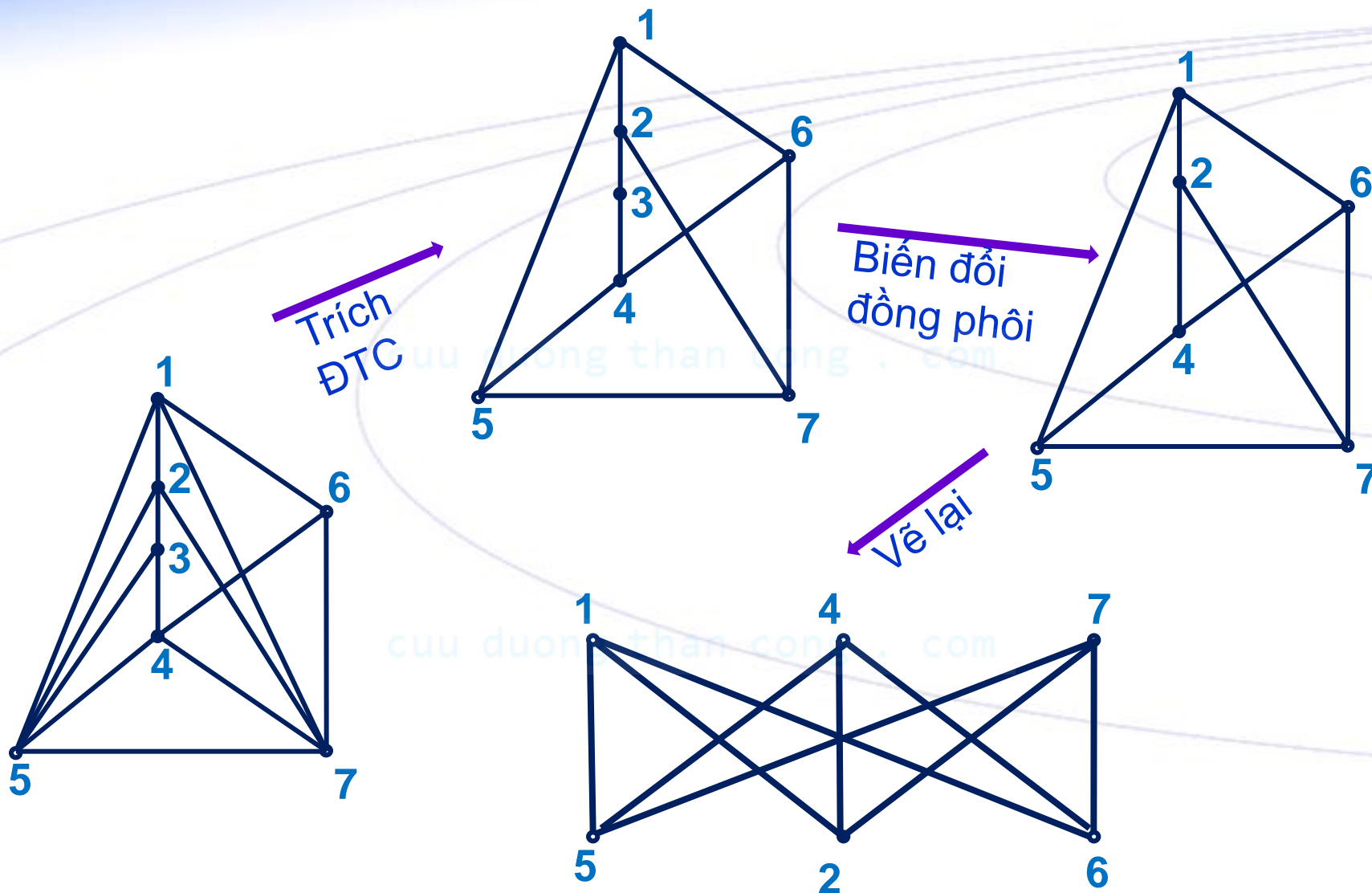
- ✦ Xóa bất kỳ đỉnh hoặc cạnh của các đồ thị trên sẽ nhận được đồ thị phẳng
- ✦ K_5 là đồ thị không phẳng ít đỉnh nhất.
- ✦ $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng ít cạnh nhất

ĐỊNH LÝ KURATOWSKY

3. Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có tính phẳng là G không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hay $K_{3,3}$.



VÍ DỤ



CÔNG THỨC EULER

✦ Định lý: G là đồ thị phẳng, liên thông gồm n đỉnh, e cạnh. Giả sử biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức (công thức Euler):

$$f = e - n + 2$$

✦ Hệ quả: Nếu G là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh (với $e > 2$). Giả sử biểu diễn phẳng G chia mặt phẳng ra thành f vùng. Ta có:

$$\bullet e \geq (3/2)f$$

$$\bullet e \leq 3n - 6$$

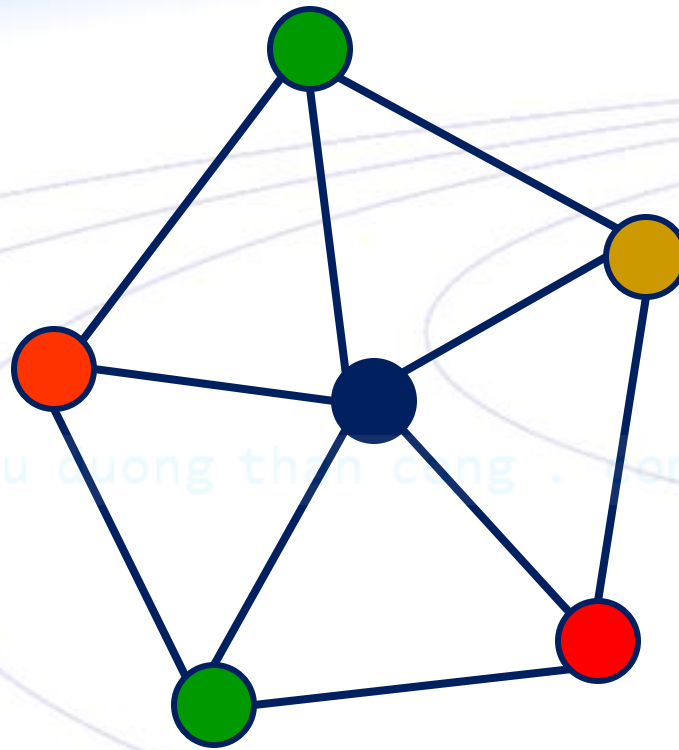
VÍ DỤ

★ Chứng minh tính không phẳng của K_5 :

◆ K_5 là đồ thị đơn và liên thông có $n=5$ và $e=10$, ta có $e=10 > 9=3n-6$ do đó K_5 không phẳng

★ Lưu ý: $K_{3,3}$ là đồ thị đơn, liên thông có $n=6$ và $e=9$ thỏa $e \leq 3n - 6$ nhưng không phẳng.

cuu duong than cong . com



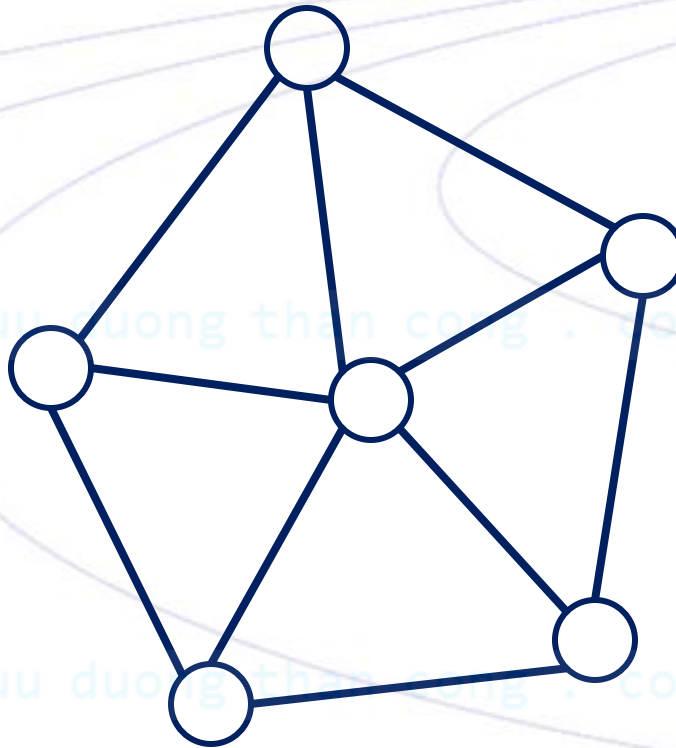
TÔ MÀU ĐỒ THỊ



ĐỊNH NGHĨA

- ✦ Phép TÔ MÀU ĐỒ THỊ là một cách gán cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.
- ✦ SẮC SỐ CỦA ĐỒ THỊ G , ký hiệu $\gamma(G)$, là số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một phép tô màu G chỉ sử dụng k màu.

VÍ DỤ



$$\gamma(G) = 4$$

TÍNH CHẤT

1. Nếu đồ thị G có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì $\gamma(G) \geq 2$.
2. Đồ thị đủ N đỉnh K_N có sắc số là N . Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đẳng cấu K_R thì $\gamma(G) \geq R$.
3. Nếu đồ thị G là một chu trình sơ cấp N đỉnh thì:
 - ♦ $\gamma(G) = 2$ nếu N chẵn, $\gamma(G) = 3$ nếu N lẻ;
 - ♦ $\gamma(G) = (N \bmod 2) + 2$.

ĐỊNH LÝ

1. Nếu T là một cây N đỉnh với $N \geq 2$ thì $\gamma(T) = 2$.
2. G là đồ thị liên thông có ít nhất 1 cạnh. Khi đó $\gamma(G) = 2$ khi và chỉ khi G không chứa chu trình sơ cấp có số cạnh lẻ.
3. Đồ thị $G = (X, E)$. Gọi $d_{\max}(G) = \max\{d(x) / x \in X\}$.
Ta có: $\gamma(G) \leq d_{\max}(G) + 1$.



GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG

//Giải thuật tham lam tô màu đồ thị

Input: $G(X, E)$

Output: đồ thị được tô màu

1. Xác định bậc các đỉnh trong đồ thị; khởi động $color = 1$;
2. Lặp trong khi còn đỉnh chưa được tô màu
 1. Tô màu tất cả các đỉnh có thể tô được bằng màu $color$ theo thứ tự ưu tiên bậc từ cao đến thấp
 2. $color = color + 1$

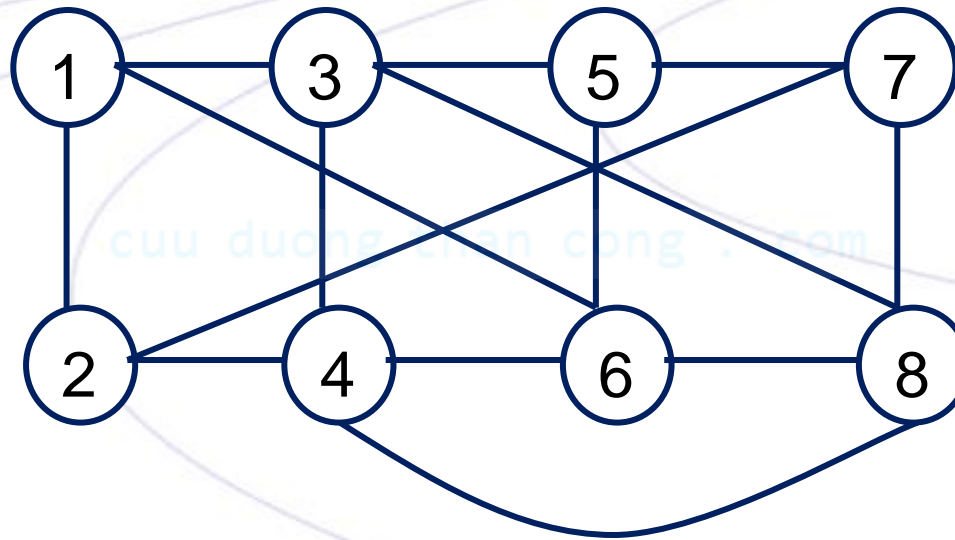


TÔ MÀU ĐỒ THỊ PHẪNG

- ✦ Giả thiết 4 màu: “Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau” (De Morgan, 10/1852).
- ✦ Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô được bằng nhiều nhất 4 màu ???

BÀI TẬP

Cho đồ thị G :



1. Xét tính phẳng của G

2. Tô màu G