

# BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC  
KHOA TOÁN - TIN HỌC  
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

## Outline

- 1 Không gian mẫu và biến cố
- 2 Đại số và xích ma đại số
- 3 Xác suất
- 4 Tính liên tục của xác suất
- 5 Không gian xác suất hữu hạn
- 6 Xác suất có điều kiện
- 7 Công thức BAYES
- 8 Sự độc lập

## Outline

- 1 Không gian mẫu và biến cố
- 2 Đại số và xích ma đại số
- 3 Xác suất
- 4 Tính liên tục của xác suất
- 5 Không gian xác suất hữu hạn
- 6 Xác suất có điều kiện
- 7 Công thức BAYES
- 8 Sự độc lập

## Không gian mẫu và biến cố

### Định nghĩa 1

Xét một phép thử, trong đó kết quả xuất hiện là không thể được xác định trước. Tuy nhiên, mặc dù kết quả của phép thử này không thể biết trước nhưng ta giả sử rằng tập tất cả các kết quả có thể (possible outcomes) là được biết.

- Tập tất cả các kết quả có thể của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó và kí hiệu là  $\Omega$ .
- Mỗi phần tử của  $\Omega$  được gọi là một *biến cố sơ cấp*.
- Mỗi tập con của  $\Omega$  được gọi là một *biến cố*.
- Biến cố không thể xảy ra khi thực hiện phép thử được gọi là *Biến cố bất khả*. Kí hiệu là  $\emptyset$ .
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện một phép thử được gọi là *Biến cố chắc chắn*. Kí hiệu là  $\Omega$ .

## BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Ví dụ 2

- Gieo đồng xu hai mặt. Kí hiệu  $S$  ( $N$ ) chỉ kết quả xuất hiện mặt sấp (ngửa). Không gian mẫu của phép thử này là  $\Omega = \{S, N\}$ .
- Gieo hai đồng xu đồng thời. Không gian mẫu của phép thử này là  $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$ . Trong đó, kết quả  $SS$  chỉ cả hai đồng xu đều sấp,  $SN$  chỉ đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt sấp, đồng xu thứ hai xuất hiện mặt ngửa, v.v.

## BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 3 (Quan hệ giữa hai biến cố)

Cho hai biến cố  $E$  và  $F$  trong không gian mẫu  $\Omega$ . Ta nói

- Biến cố  $E$  chứa trong biến cố  $F$  hoặc  $E$  là tập con của  $F$  nếu mọi kết quả của  $E$  đều thuộc  $F$ . Kí hiệu  $E \subset F$
- Hai biến cố  $E$  và  $F$  là tương đương (bằng nhau) nếu  $E \subset F$  và  $F \subset E$ .

### Định nghĩa 4 (Các phép toán trên các biến cố)

Cho hai biến cố  $E$  và  $F$  trong không gian mẫu  $\Omega$ . Ta nói

- Biến cố tổng của  $E$  và  $F$  là biến cố  $E \cup F$ .
- Biến cố giao của  $E$  và  $F$  là biến cố  $E \cap F$ .
- Hai biến cố  $E$  và  $F$  xung khắc nhau nếu  $EF = \emptyset$ .
- Biến cố đối của  $E$  là biến cố  $\Omega \setminus E$ . Kí hiệu  $E^c$  hoặc  $\bar{E}$ .

## Outline

## BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

- 1 Không gian mẫu và biến cố
- 2 Đại số và xích ma đại số
- 3 Xác suất
- 4 Tính liên tục của xác suất
- 5 Không gian xác suất hữu hạn
- 6 Xác suất có điều kiện
- 7 Công thức BAYES
- 8 Sự độc lập

## BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 5

Họ các tập con  $\mathcal{A}$  của  $\Omega$  được gọi là một đại số nếu thỏa các tính chất sau:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii)  $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$
- (iii)  $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

## BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Nhận xét 6

Giả sử  $\mathcal{A}$  là một đại số. Khi đó

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii)  $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$ .
- (iii) Nếu  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  thì  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$  và  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

### Chứng minh.

Dễ dàng suy từ định nghĩa.  $\square$

### Ví dụ 7

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ ,  $\mathcal{P}(\Omega)$  (họ tất cả các tập con của  $\Omega$ ) đều là các đại số.

## Outline

## BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

- 1 Không gian mẫu và biến cố
- 2 Đại số và xích ma đại số
- 3 Xác suất
- 4 Tính liên tục của xác suất
- 5 Không gian xác suất hữu hạn
- 6 Xác suất có điều kiện
- 7 Công thức BAYES
- 8 Sự độc lập

## BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 8 ( $\sigma$ -đại số)

Họ các tập con  $\mathcal{F}$  của  $\Omega$  được gọi là một  $\sigma$ -đại số nếu  $\mathcal{F}$  là một đại số và

$$\forall (A_i) \subset \mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

### Định nghĩa 9 (Độ đo xác suất)

Cho  $\mathcal{F}$  là một  $\sigma$ -đại số. Ánh xạ  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là một độ đo xác suất nếu thỏa các tính chất sau:

- (i)  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- (ii)  $P(\Omega) = 1$
- (iii) Nếu  $(A_i) \subset \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , thì
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## Không gian xác suất

## BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 10 (Không gian xác suất)

Bộ ba  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , trong đó  $\Omega$  là một tập tùy ý,  $\mathcal{F}$  là một  $\sigma$ -đại số các tập con của  $\Omega$ ,  $P$  là độ đo xác suất trên  $\mathcal{F}$ , được gọi là một không gian xác suất.

### Tính chất 11

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ .
- (ii) Nếu  $A, B \in \mathcal{F}$  và  $A \cap B = \emptyset$  thì
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- (iii)  $\forall A, B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- (iv)  $\forall (A_i) \subset \mathcal{F}, P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

## Chứng minh

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

- (i) Chọn  $A_i = \emptyset$ ,  $\forall i$  và sử dụng (iii) trong định nghĩa 9.  
(ii) Chọn  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$ ,  $A_i = \emptyset \forall i > 2$  và sử dụng (iii) trong định nghĩa 9.  
(iii) Ta viết  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$  thành tổng của các biến cố xung khắc như sau:

$$A = (A \setminus B) \cup AB$$

$$B = (B \setminus A) \cup AB$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup AB$$

Áp dụng tính chất (ii), ta được

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(AB) \quad (1)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(AB) \quad (2)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(AB) \quad (3)$$

Cuối cùng, lấy (1) + (2) - (3) về theo về, ta có đpcm.

## Chứng minh

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

(iv) Đặt

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

...

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

Ta có,

$$B_n \subset A_n$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

## Chứng minh

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

Ta có,

$$B_n \subset A_n$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Do đó,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## Outline

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

1 Không gian mẫu và biến cố

2 Đại số và xích ma đại số

3 Xác suất

4 Tính liên tục của xác suất

5 Không gian xác suất hữu hạn

6 Xác suất có điều kiện

7 Công thức BAYES

8 Sự độc lập

## Định nghĩa 12

Một dãy các biến cố  $\{E_n, n \geq 1\}$  được gọi là

- một dãy tăng nếu  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$
- một dãy giảm nếu  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$

## Định nghĩa 13

- Cho  $\{E_n, n \geq 1\}$  là một dãy tăng các biến cố, ta định nghĩa biến cố  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ , bởi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

- Cho  $\{E_n, n \geq 1\}$  là một dãy giảm các biến cố, ta định nghĩa biến cố  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ , bởi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

## Mệnh đề 14

Nếu  $\{E_n, n \geq 1\}$  là một dãy tăng hoặc giảm các biến cố, thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) \quad (4)$$

## Chứng minh

Đầu tiên, giả sử rằng  $\{E_n, n \geq 1\}$  là một dãy tăng, và định nghĩa dãy biến cố  $\{F_n, n \geq 1\}$ , bởi

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)^c = E_n E_{n-1}^c \quad n > 1$$

$$\text{vì } \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}.$$

Ta thấy rằng các biến cố  $F_n$  xung khắc từng đôi một và thỏa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{và} \quad \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

## Chứng minh ...

Do đó,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(F_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \end{aligned}$$

## Chứng minh ...

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

Nếu  $\{E_n, n \geq 1\}$  là một dãy giảm, thì  $\{E_n^c, n \geq 1\}$  là một dãy tăng. Do đó, theo kết quả ở trên,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c) \quad (5)$$

Mặt khác,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) \quad (6)$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) \quad (7)$$

## Chứng minh ...

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

Thay (6) và (7) vào (5) ta được

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

## Outline

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

- 1 Không gian mẫu và biến cố
- 2 Đại số và xích ma đại số
- 3 Xác suất
- 4 Tính liên tục của xác suất
- 5 Không gian xác suất hữu hạn
- 6 Xác suất có điều kiện
- 7 Công thức BAYES
- 8 Sự độc lập

## Không gian xác suất hữu hạn

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 15

Trường hợp  $|\Omega| < \infty$ , ta có thể định nghĩa độ đo xác suất  $P$  trên  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} P: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \frac{|A|}{|\Omega|} \end{aligned}$$

Ta gọi độ đo xác suất này là độ đo xác suất rời rạc.

| Không gian xác suất hữu hạn<br>Ví dụ  |  |
|---|--|
| <b>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</b><br><br>Nguyễn Văn Thìn<br><br>Không gian mẫu và biến cố<br><br>Đại số và xích ma đại số<br><br>Xác suất<br><br>Tính liên tục của xác suất<br><br>Không gian xác suất hữu hạn<br><br>Xác suất có điều kiện<br><br>Công thức BAYES<br><br>Sự độc lập | <b>Ví dụ 16</b><br><br>Rút ngẫu nhiên không hoàn lại 3 lá bài từ một bộ bài, tính xác suất trong 3 lá bài vừa rút không có lá bài nào là chất cơ.  |
|   | <b>Ví dụ 17</b><br><br>Nếu 1 nhóm có thứ tự gồm 3 chữ số dạng 000 → 999 được chọn 1 cách ngẫu nhiên. Tính xác suất trong số đó có đúng 1 chữ số lớn hơn 5.   |
|   | <b>Ví dụ 18</b><br><br>Trong một hộp có 100 bóng đèn trong đó có 75 bóng đèn tốt và 25 bóng đèn hư. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 15 bóng đèn, tính xác suất trong số 15 bóng đèn lấy ra có ít nhất một bóng đèn hư. |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |

| Không gian xác suất hữu hạn<br>Ví dụ  |   |
|---|---|
| <b>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</b><br><br>Nguyễn Văn Thìn<br><br>Không gian mẫu và biến cố<br><br>Đại số và xích ma đại số<br><br>Xác suất<br><br>Tính liên tục của xác suất<br><br>Không gian xác suất hữu hạn<br><br>Xác suất có điều kiện<br><br>Công thức BAYES<br><br>Sự độc lập | <b>Ví dụ 19</b><br><br>Gọi $E, F, G$ là 3 biến cố. Hãy biểu diễn các biến cố sau thông qua 3 biến cố kể trên <ol style="list-style-type: none"> <li>Chỉ <math>E</math> xảy ra.</li> <li>Cả <math>E</math> và <math>G</math> xảy ra, <math>F</math> không xảy ra.</li> <li>Có ít nhất 1 trong 3 biến cố xảy ra.</li> <li>Có ít nhất 2 biến cố xảy ra.</li> <li>Có đúng 2 biến cố xảy ra.</li> <li>Có nhiều nhất 2 biến cố xảy ra.</li> </ol> |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

| Outline   |  |
|---|--|
| <b>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</b><br><br>Nguyễn Văn Thìn<br><br>Không gian mẫu và biến cố<br><br>Đại số và xích ma đại số<br><br>Xác suất<br><br>Tính liên tục của xác suất<br><br>Không gian xác suất hữu hạn<br><br>Xác suất có điều kiện<br><br>Công thức BAYES<br><br>Sự độc lập | <ol style="list-style-type: none"> <li>Không gian mẫu và biến cố</li> <li>Đại số và xích ma đại số</li> <li>Xác suất</li> <li>Tính liên tục của xác suất</li> <li>Không gian xác suất hữu hạn</li> <li>Xác suất có điều kiện</li> <li>Công thức BAYES</li> <li>Sự độc lập</li> </ol> |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |

| Xác suất có điều kiện   |  |
|---|--|
| <b>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</b><br><br>Nguyễn Văn Thìn<br><br>Không gian mẫu và biến cố<br><br>Đại số và xích ma đại số<br><br>Xác suất<br><br>Tính liên tục của xác suất<br><br>Không gian xác suất hữu hạn<br><br>Xác suất có điều kiện<br><br>Công thức BAYES<br><br>Sự độc lập | <b>Định nghĩa 20</b><br><br>Xác suất của biến cố $A$ được tính với giả thiết biến cố $B$ đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của $A$ với điều kiện $B$ , kí hiệu là $P(A B)$ và được tính theo công thức $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (8)$   |
|   | <b>Tính chất 21</b> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>P(A B) \geq 0</math></li> <li><math>P(\Omega B) = 1</math></li> <li>Nếu <math>(A_i) \subset \mathcal{F}</math>, <math>A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \neq i</math> thì               <math display="block">P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i   B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i   B)</math> </li> </ol> |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |

## Xác suất có điều kiện

### BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

Chứng minh.

Dễ dàng có được từ định nghĩa. ☐

Nhận xét 22

Cho  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  là một không gian xác suất,  $B \in \mathcal{F}$  thỏa  $P(B) > 0$ . Đặt

$$\begin{aligned} P(\cdot|B): \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P(A|B) \end{aligned}$$

thì  $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$  cũng là một không gian xác suất.

### BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

Ví dụ 23

Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối và đồng chất.

- (a) Tính xác suất tổng điểm hai mặt của xúc sắc bằng 8 biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 3.
- (b) Tính xác suất tổng điểm hai mặt bằng 6 biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 3.

## Giải Ví dụ 23

### BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

### BIÊN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn  
Thìn

Không gian  
mẫu và biến  
cố

Đại số và  
xích ma đại  
số

Xác suất

Tính liên  
tục của xác  
suất

Không gian  
xác suất  
hữu hạn

Xác suất có  
điều kiện

Công thức  
BAYES

Sự độc lập

Ví dụ 24

Trong một hộp gồm 8 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại hai bi từ hộp, tính xác suất để cả hai bi đều là bi đỏ.



<https://fb.com/tailieudientucntt>

Công thức xác suất toàn phần

Ví dụ

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

Ví dụ 30

Một người có hai đồng xu, đồng xu thứ nhất là đồng xu cân đối, đồng xu thứ 2 có xác suất mặt ngửa gấp 3 lần mặt sấp. Anh ta chọn ngẫu nhiên một đồng xu và gieo. Tính xác suất mặt hiện là mặt ngửa. Nếu gieo được mặt ngửa thì xác suất chọn được đồng xu cân đối là bao nhiêu?

Công thức xác suất toàn phần

Ví dụ

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

Công thức Bayes

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

Định lí 31 (Công thức Bayes)

Cho  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là một hệ đầy đủ,  $B$  là một biến cố bất kỳ

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) P(A_i)}$$

Chứng minh.

Theo định nghĩa xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

□

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

- Không gian mẫu và biến cố
- Đại số và xích ma đại số
- Xác suất
- Tính liên tục của xác suất
- Không gian xác suất hữu hạn
- Xác suất có điều kiện
- Công thức BAYES
- Sự độc lập

CuuDuongThanCong.com

<https://fb.com/tailieudientucntt>

## Sự độc lập

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 32

Hai biến cố  $A$  và  $B$  được gọi là độc lập nếu

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

### Nhận xét 33

Nếu  $A, B$  độc lập thì

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

## Sự độc lập

Ví dụ

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Ví dụ 34

Gieo hai con xúc sắc và theo dõi mặt phía trên của chúng:

$A = \{\text{Tổng hai xúc sắc bằng 7}\}$

$B = \{\text{Xúc sắc thứ nhất ra mặt 5}\}$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(AB) = \frac{1}{36}$$

## Sự độc lập

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

### Định nghĩa 35

Họ các biến cố  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  được gọi là độc lập nếu

$$\forall 2 \leq k \leq n, \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n,$$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

### Ví dụ 36

$$A, B, C \text{ độc lập} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

## Sự độc lập

Ví dụ

### BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố

Đại số và xích ma đại số

Xác suất

Tính liên tục của xác suất

Không gian xác suất hữu hạn

Xác suất có điều kiện

Công thức BAYES

Sự độc lập

Gieo hai con xúc sắc và quan sát mặt trên của chúng. Gọi

$A = \{\text{Xúc sắc 1 ra mặt 1, 2 hoặc 3}\}$

$B = \{\text{Xúc sắc 2 ra mặt 4, 5 hoặc 6}\}$

$C = \{\text{Tổng điểm trên hai xúc sắc bằng 9}\}$

Ta có,

$$P(AB) = \frac{9}{36}, \quad P(AC) = \frac{1}{36}, \quad P(BC) = \frac{3}{36}$$

$$P(A) = \frac{18}{36}, \quad P(B) = \frac{18}{36}, \quad P(C) = \frac{4}{36}$$

Do đó,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) \neq P(A)P(C)$$

$$P(BC) \neq P(B)P(C)$$

| Sự độc lập ...<br>Ví dụ   |   |
|---|---|
| <div> <div>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</div> <div> <div>Nguyễn Văn Thìn</div> <div>Không gian mẫu và biến cố</div> <div>Đại số và xích ma đại số</div> <div>Xác suất</div> <div>Tính liên tục của xác suất</div> <div>Không gian xác suất hữu hạn</div> <div>Xác suất có điều kiện</div> <div>Công thức BAYES</div> <div>Sự độc lập</div> </div> </div> | <p>Nghĩa là</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>A, B</math> độc lập,</li> <li>■ <math>A, C</math> không độc lập,</li> <li>■ <math>B, C</math> không độc lập,</li> <li>■ <math>A, B, C</math> không độc lập.</li> </ul> |

| Sự độc lập<br>Một ví dụ khác  |   |
|---|---|
| <div> <div>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</div> <div> <div>Nguyễn Văn Thìn</div> <div>Không gian mẫu và biến cố</div> <div>Đại số và xích ma đại số</div> <div>Xác suất</div> <div>Tính liên tục của xác suất</div> <div>Không gian xác suất hữu hạn</div> <div>Xác suất có điều kiện</div> <div>Công thức BAYES</div> <div>Sự độc lập</div> </div> </div> | <div>Ví dụ 37</div> <p>Hai con xúc sắc được gieo liên tục cho tới khi tổng điểm ở mặt trên của chúng là 5 hoặc 7 thì dừng. Tính xác suất tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 xảy ra trước.</p> |

| Gợi ý   |   |
|---|---|
| <div> <div>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</div> <div> <div>Nguyễn Văn Thìn</div> <div>Không gian mẫu và biến cố</div> <div>Đại số và xích ma đại số</div> <div>Xác suất</div> <div>Tính liên tục của xác suất</div> <div>Không gian xác suất hữu hạn</div> <div>Xác suất có điều kiện</div> <div>Công thức BAYES</div> <div>Sự độc lập</div> </div> </div> | <p>Gọi <math>A</math> là biến cố “tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 xảy ra trước”.</p> <p><math>A_n</math> là biến cố “tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 ở lần gieo thứ <math>n</math> và trong <math>n - 1</math> lần gieo trước có tổng khác 5 và 7”. Khi đó,</p> $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ <p>Bởi vì <math>A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m</math> nên</p> $P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (10)$ <p>Mỗi lần tung hai con xúc sắc sẽ có 36 khả năng xuất hiện khác nhau. Trong đó, có 4 khả năng xuất hiện để tổng điểm</p> |

| Gợi ý ...   |   |
|---|---|
| <div> <div>BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT</div> <div> <div>Nguyễn Văn Thìn</div> <div>Không gian mẫu và biến cố</div> <div>Đại số và xích ma đại số</div> <div>Xác suất</div> <div>Tính liên tục của xác suất</div> <div>Không gian xác suất hữu hạn</div> <div>Xác suất có điều kiện</div> <div>Công thức BAYES</div> <div>Sự độc lập</div> </div> </div> | <p>là 5 <math>((1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1))</math>, và 6 khả năng xuất hiện để tổng điểm là 7 <math>((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1))</math>. Do đó, số khả năng xuất hiện để tổng điểm khác 5 và 7 là <math>36 - 4 - 6 = 26</math>. Vì các phép thử là độc lập nhau, nên</p> $P(A_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$ <p>Thay vào (10) ta được,</p> $P(A) = \frac{4}{36} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} = \frac{4}{36} \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} = 0.4 \quad (11)$ |