

BÀI TẬP VỀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ.

Trương Mỹ Dung 2003 -2004.



BÀI TẬP VỀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ.

CH. 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ.

CH. 2. CẤU TRÚC CÂY.

CH. 3. BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT.

CH. 4. ĐỒ THỊ PHẪNG & BÀI TOÁN TÔ MÀU.

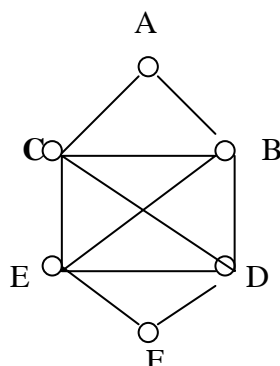
BÀI TẬP TỔNG HỢP.

cuu duong than cong . com

CH. 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ.

1. Vẽ một đồ thị có định hướng (không định hướng) trong các trường hợp sau :
 - ❖ 3 đỉnh và 3 cạnh.
 - ❖ 4 đỉnh, 4 cạnh và không có vòng, không có cạnh song song.
 - ❖ Tính bậc của các đỉnh của hai đồ thị nêu trên.
 - ❖ Liệt kê 4 đồ thị con đều (có bậc của mỗi đỉnh bằng nhau) trong 2 đồ thị nêu trên.
 - ❖ Đều 4 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 3, không có vòng, không có cạnh song song.
 - ❖ Đều 5 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 3.
2. Một đồ thị không định hướng có 21 cạnh có 7 đỉnh bậc 1, 3 đỉnh bậc 2, 7 đỉnh bậc 3, các đỉnh còn lại bậc 4. Đồ thị có bao nhiêu đỉnh ? Nếu thêm 6 đỉnh bậc không thì câu trả lời là bao nhiêu ?
3. Các đồ thị sau đây có bao nhiêu đỉnh nếu chúng có :
 - 12 cạnh, tất cả đỉnh bậc 2.
 - 15 cạnh, 3 đỉnh bậc 4, các đỉnh còn lại bậc 3.
 - 20 cạnh, các đỉnh có cùng bậc.
4. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3 . Đồ thị này tối đa có bao nhiêu đỉnh ?
5. Chứng minh bằng qui nạp tổng bậc các đỉnh là một số chẵn.
6. Chứng minh rằng mọi đồ thị đều có một số chẵn các đỉnh lẻ.
7. Một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì phải có một đường nối hai đỉnh này. Hướng dẫn. Chứng minh bằng phản chứng.
8. Chứng minh Định lý 1 của Định lý EULER.
9. Chứng minh Định lý 2 của Định lý EULER.
10. Chứng minh Định lý 3 của Định lý EULER.

11. Cho đồ thị theo hình vẽ sau :



Dùng cách biểu diễn ma trận kề để tìm chu trình Euler của đồ thị trên.

12. Chứng minh định lý 2 của tính chất của đồ thị HAMILTON.

13. Trong một ma trận kề, cho biết những tính chất sau có đúng hay không, nếu không hãy cho một phản thí dụ :

- Trên đường chéo chính tất cả đều bằng không nếu và chỉ nếu đồ thị không có vòng. Vòng tại đỉnh thứ i tương ứng với $x_{ii} = 1$.
- Nếu đồ thị không có vòng, bậc của đỉnh bằng với số phần tử 1 trong dòng tương ứng.
- Hoán vị dòng hay cột dẫn tới việc đổi trật tự của đỉnh.
- Cột thay đổi thì dòng cũng thay đổi.
- Nếu một đồ thị G không liên thông và có 2 thành phần G_1 và G_2 , nếu và chỉ nếu ma trận kề được chia như sau :

$$M\langle G \rangle = \begin{vmatrix} M\langle G_1 \rangle & 0 \\ 0 & M\langle G_2 \rangle \end{vmatrix}$$

Trong đó $M\langle G_1 \rangle$, $M\langle G_2 \rangle$ là ma trận kề của G_1 và G_2

CH. 2. CẤU TRÚC CÂY.

1. Chứng minh Định lý 1 về tính chất cơ bản của cây.
2. Chứng minh Định lý 2 về tính chất cơ bản của cây.
3. Cho $G=(S,A)$ là đồ thị có định hướng có n đỉnh. G' là đồ thị không định hướng tương ứng với G . Chứng minh những phát biểu sau là tương đương với nhau:
 - a. G có một gốc và G' là cây.
 - b. Có một gốc r sao cho mọi đỉnh khác nối với gốc bằng một đường duy nhất.
 - c. G' liên thông và $\exists r \in G, d^-(r) = 0, \forall x \neq r \ d^-(x) = 1$.
 - d. G' không có chu trình và $\exists r \in G, d^-(r) = 0, \forall x \neq r \ d^-(x) = 1$.
4. Chứng minh bằng qui nạp rằng trong một cây nhị phân, số tối đa các đỉnh có độ sâu k là 2^k .
5. Chứng minh rằng mọi cây nhị phân có f lá và s đỉnh trong thì $f \leq s + 1$.
6. Cho một cây nhị phân G . Ký hiệu đó $g(G), d(G)$ lần lượt là cây con trái và cây con phải của G . Hàm f định nghĩa trên tập cây nhị phân như sau:

$$\begin{aligned} f(H) &= 0 && \text{nếu } H \text{ là cây rỗng.} \\ &= \max(f(g(H)), f(d(H))), && \text{nếu } f(g(H)) \neq f(d(H)). \\ &= f(d(H)) + 1. && \text{nếu } f(g(H)) = f(d(H)). \end{aligned}$$
 Hàm này được gọi là số Strahler.
 - a. Cho biết số Strahler của một cây nhị phân đầy đủ có độ cao n có $2^{n+1} - 1$ đỉnh? Tìm liên hệ giữa độ cao của một cây nhị phân và số Strahler.
 - b. Viết một thủ tục đệ qui dựa trên phép duyệt sau (suffixe ou postfixe).
7. Chứng minh rằng trong một cây T m -cành đầy đủ có i đỉnh trong thì có $m \cdot i + 1$ đỉnh. Suy ra T có i đỉnh trong thì T có $l = (m-1)i + 1$ lá.
8. Có thể tìm được một cấu trúc cây (cây có gốc), giả sử gốc là r , và có tất cả 8 đỉnh (kể cả gốc) và thỏa điều kiện dưới đây hay không? Nếu có vẽ cây đó ra, nếu không? Giải thích.
 - ❖ Mọi đỉnh đều có bậc 1.
 - ❖ 4 đỉnh có bậc 0 và 4 đỉnh có bậc 2.
 - ❖ Cây 3-cành và có độ cao (độ sâu) là 2.

9. Các phát biểu sau đúng hay sai ?

- ❖ Nếu đồ thị G không có chu trình và có 25 cạnh và 26 đỉnh thì G liên thông.
- ❖ Nếu đồ thị G có 32 cạnh và 28 đỉnh thì G không phải là cây.
- ❖ Nếu G liên thông, có 10 cạnh và 10 đỉnh thì G có ít nhất một chu trình.

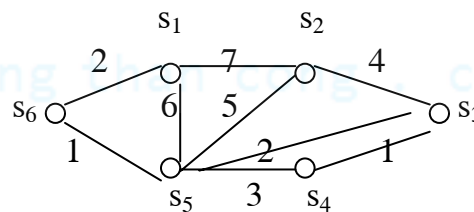
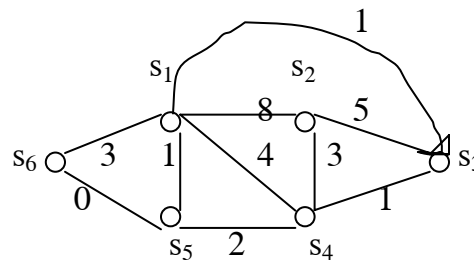
10. Giả sử một cây nhị phân có danh sách các đỉnh khi duyệt theo thứ tự GIỮA là $\{5, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 25, 27, 32, 40, 48, 50, 60\}$, với gốc là 25. Vẽ lại cây nhị phân và cho biết danh sách các đỉnh theo phép duyệt TRƯỚC & SAU.

11. Cho $G = (S, A)$ là một đồ thị không định hướng, liên thông, có trọng lượng. Chia G thành 2 đồ thị con $G_1 = (S_1, A_1)$, $G_2 = (S_2, A_2)$ sao cho $S = S_1 \cup S_2$. T_1 (T_2) lần lượt là cây phủ tối thiểu của S_1 (S_2). Chọn cạnh v có trọng lượng nhỏ nhất trong các cạnh nối một đỉnh của S_1 và một đỉnh của S_2 . $T = T_1 \cup T_2 \cup \{v\}$.
Vậy T có phải là cây phủ tối thiểu của G hay không? Nếu phải thì chứng minh, nếu không, tìm một phản thí dụ.

12. Viết thủ tục PRIM

13. Viết thủ tục KRUSKAL.

14. Sử dụng thuật toán Prim và Kruskal tìm cây phủ tối thiểu của hai đồ thị sau:



CH. 3. BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT.

1. Dùng thuật giải DIJKSTRA- MOORE tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 8 & \infty & 3 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 1 & 3 & 0 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 1 & 7 & \infty & 5 & 0 \end{array}$$

2. Dùng thuật giải DIJKSTRA- MOORE tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 2 đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 1 & 4 & 4 & \infty \\ 4 & \infty & 4 & 1 & 0 & 2 & \infty & 4 \\ 5 & \infty & \infty & 4 & 2 & 0 & 12 & 1 \\ 6 & \infty & \infty & 4 & \infty & 12 & 0 & 4 \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

3. Dùng thuật giải BELLMAN-FORD tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & -4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 8 & \infty & 3 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 1 & -3 & 0 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 1 & 7 & -6 & \infty & 0 \end{array}$$

4. Dùng thuật giải BELLMAN-FORD tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 2 đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 3 & 0 & \infty & -4 & \infty & \infty & -1 \\ 3 & -6 & -2 & 0 & 1 & 2 & 4 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & -2 & 1 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{array}$$

5. Dùng thuật giải FOYD để tìm A, P.

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 8 & \infty & \infty & 2 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 6 & 8 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 20 & \infty & 5 & 13 & \infty & 0 \end{array}$$

6. Dùng thuật giải FOYD để tìm A, P.

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 8 & 13 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 12 & 8 & 13 & 3 & 0 \end{array}$$

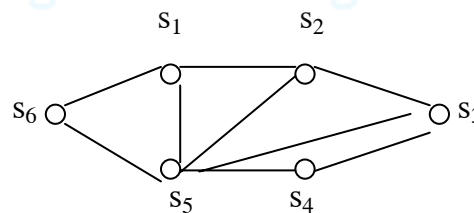
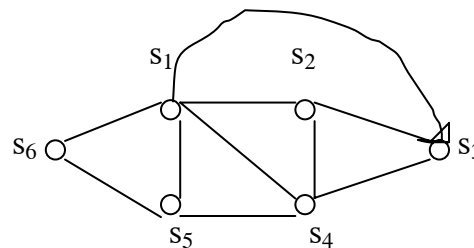
7. Dùng thuật giải FOYD –WARSHALL để tìm A, P.

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

8. Tìm một phản thí dụ để cho thấy rằng thuật toán DIJKSTRA-MOORE không áp dụng được cho trường hợp đồ thị có trọng lượng bất kỳ.
9. Gọi A_k là ma trận xây dựng được trong thuật toán FLOYD ($k=1..n$).
- Chứng minh rằng hàng k và cột k trong 2 ma trận A_k A_{k-1} giống hệt nhau.
 - Chứng minh rằng nếu trên hàng (cột) k của A_k có phần tử bằng ∞ thì cột (hàng) chứa phần tử đó trong 2 ma trận A_k A_{k-1} giống hệt nhau.

CH. 4. ĐỒ THỊ PHẪNG & BÀI TOÁN TÔ MÀU.

1. Chứng minh công thức EULER.
2. Chứng minh bất đẳng thức Đỉnh - Cạnh.
3. Một đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị.
4. Đồ thị đơn, phẳng, liên thông G có 9 đỉnh, bậc các đỉnh lần lượt là 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số mặt của G .
5. Tìm số đỉnh và số cạnh của K_n $K_{m,n}$.
6. Chứng minh rằng K_n phẳng nếu và chỉ nếu $n \leq 4$.
7. Chứng minh rằng mọi đồ thị phẳng liên thông ít hơn 12 đỉnh có ít nhất một đỉnh bậc nhỏ hơn 5.
8. Hai đồ thị sau có phẳng hay không?



BÀI TẬP TỔNG HỢP.

1. Cho đồ thị G được biểu diễn bằng ma trận kề, có trọng lượng (phần tử dòng i , cột $j \neq 0$ chỉ trọng lượng của cạnh nối đỉnh i và đỉnh j) sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		4			-7	-6		
2				1				
3		3						5
4			-5		7		6	
5						8		-2
6			-1				-3	
7								5
8		-4						

H.1. Ma trận kề của đồ thị G .

Trả lời các câu hỏi sau:

- Biểu diễn đồ thị trên bằng hình vẽ.
- Sử dụng ma trận kề trên để tính bậc của các đỉnh 4 và đỉnh 6.
- Sử dụng ma trận kề trên để tính $\Gamma^-(6)$, $\Gamma^-(8)$.
- Dùng thuật toán BELLMAN tìm đường đi ngắn nhất của G từ đỉnh 1 đến đỉnh 4.
- Cho biết tính phẳng của đồ thị G .

2. Cho đồ thị G được biểu diễn bằng ma trận kề (phần tử dòng i , cột $j \neq 0$ chỉ trọng lượng của cạnh nối đỉnh i và đỉnh j) sau:

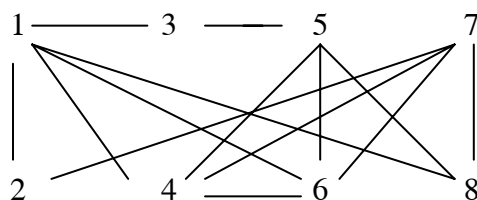
	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		2		3		1
2			1		2		3	
3				5		6		7
4		2			1		4	
5	1		4					5
6		1		2				
7	1				2	3		
8							3	

H.2. Ma trận kề của đồ thị G .

Trả lời các câu hỏi sau:

- Biểu diễn đồ thị trên bằng hình vẽ.
- Sử dụng ma trận kề trên để tính bậc của các đỉnh 4 và đỉnh 6.
- Dùng thuật toán DIJKSTRA tìm đường đi ngắn nhất của G từ đỉnh 4 đến đỉnh còn lại của đồ thị.
- Cho biết tính phẳng của đồ thị G .

3. **Phần I.** Cho đồ thị G_1 được biểu diễn bằng hình vẽ sau:



1. Biểu diễn ma trận kề của G_1 .
2. G_1 có vẽ bằng một nét được hay không?. Nếu được hãy chứng minh và chỉ ra một cách vẽ.
3. Xét tính phẳng của G_1 (phải giải thích và chứng minh rõ ràng).

Phần 2. Cho đồ thị G_2 được biểu diễn bằng ma trận kề, có trọng lượng (phần tử dòng i , cột $j \neq 0$ chỉ trọng lượng của cạnh nối đỉnh i và đỉnh j) sau:

	1	2	3	4	5	6	7
1		4			2	1	2
2	4			1			1
3					3	2	
4		1			4		3
5	2		3	4		4	
6	1		2		4		5
7	2	1		3		5	

H.3. Ma trận kề của đồ thị G_2 .

1. Áp dụng PRIM để tìm cây phủ ngắn nhất của G_2 với đỉnh gốc là đỉnh 2.
2. Tìm một đường đi ngắn nhất của G_2 từ đỉnh 2 đến đỉnh 5.