

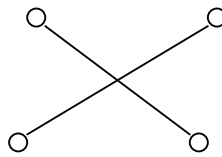
## CHAPITRE 4.

# GRAPHE PLANAIRE ET PROBLEME DE COLORIAGE.

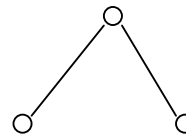
### 4.1. DEFINITION DU GRAPHE PLANAIRE.

C'est un graphe qui peut être représenté sur un plan (ou une sphère) tel que deux arcs (ou arêtes) ne se coupent pas. La représentation de  $G$  sur un plan conformément aux conditions imposées s'appelle un **graphe planaire topologique**.

**REMARQUE.** Deux arêtes ayant un même sommet sont dit ils ne se coupent pas.

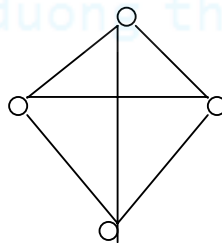


Se Couper

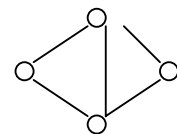
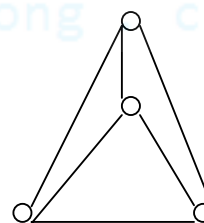


Ne Pas se couper

**EXEMPLE.** Un graphe planaire  $G_1$  a ses représentations  $G_2, G_3$  comme suit :



GRAPHE  $G_1$



REPRESENTATIONS  $G_2, G_3$  du graphe  $G_1$

Soit  $G$  un graphe topologique. Une FACE de  $G$  est par définition une région du plan limitée par des arêtes et qui ne contient ni sommets ni arêtes dans son intérieur ; nous désignons les faces par les lettres  $r, s, t$ , et l'ensemble des faces par  $R$ . Le CONTOUR d'une face  $r$  est le cycle formé par les arêtes frontières de  $r$ . Deux faces  $r$  et  $s$  sont dites ADJACENTES si leurs contours ont au moins une arête commune ; deux faces qui ne se touchent que par un sommet ne sont pas adjacentes.

### EXEMPLE.

- ❖ **Une carte de géographie est un graphe planaire** (à condition qu'il n'y ait pas d'îles). Ce graphe a pour particularité que chacun de ses sommets a un degré  $\geq 3$ . Enfin, on notera que dans tout graphe planaire, il y a une face illimitée et une seule, que l'on appelle la FACE INFINIE (soit sur la FIG. 3.1. : la face  $h$ ) ; les autres faces  $a, b, c, d, e, f, g$  sont les faces finies.

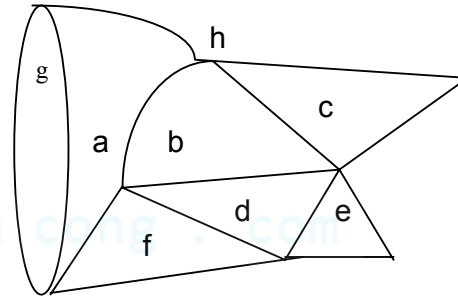


FIG. 4.1. GRAPHE PLANAIRE.

- ❖ **Problème des trois villas et des trois usines.** On a trois villas  $a, b, c$ , que l'on veut relier par des conduites à une usine de production d'eau  $d$ , à une usine de production de gaz  $e$ , à une usine de production d'électricité  $f$ . Peut-on placer (sur un plan) les trois villas, les trois usines, et les trois conduites qui ne se croisent pas en dehors de leurs extrémités ? Le graphe des villas et des usines permet de définir une famille de graphes non planaires.

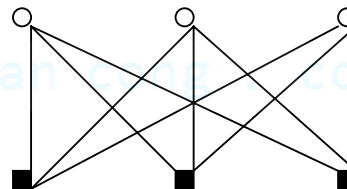


FIG 4.2. GRAPHE NON PLANAIRE DU TYPE 1.

## 4.2. FORMULE D'EULER , COROLLAIRES & EXEMPLES.

### 4.2.1. Formule d'EULER.

Si, dans un graphe planaire topologique connexe, il y a  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $f$  faces, on a

$$n - m + f = 2$$

### 4.2.2. Corollaire.

Si, dans un graphe planaire simple, connexe, il y a  $n$  sommets,  $m$  arêtes ( $m > 2$ ) et  $f$  faces, on a

$$3f/2 \leq m \leq 3n - 6. (1)$$

#### Preuve.

Chaque face comprend aux moins trois arêtes.

Chaque arête sont dans deux faces.

Trois arêtes sont déterminées par au plus deux faces.

Donc, le nombre des faces est aux plus  $2m/3$ .

Alors,  $f \leq 2m/3$ . Appliquer la formule EULER et l'on a (1).

### 4.2.3. Corollaire.

Dans tout graphe planaire, il y a un sommet  $x$  dont le degré est  $d(x)$  qui vérifie  $d(x) \leq 5$ .

#### Preuve.

Suppose que tous les sommets ont leurs degrés au plus 6. Alors, on a

$$2m \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n \geq 3n - 6.$$

Contradiction avec (1). Alors la conclusion du corollaire est vraie.

### 4.2.4. Corollaire.

Dans une carte de géographie, il y a au moins une face ayant dans son contour un nombre d'arêtes  $\leq 5$ .

**4.2.5. EXEMPLE.** Nous avons montré que tous les graphes complets de 5 sommets ne sont pas planaire.

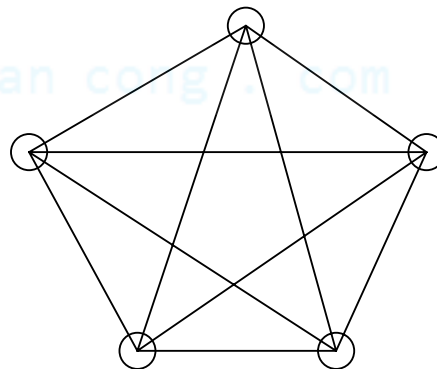


FIG. 4.3. GRAPHE NON PLANAIRE DU TYPE 2.

**Preuve.**

Pour le graphe  $K_5$ , on a  $n = 5$ ,  $m = n(n-1)/2 = 10$ .

Si le graphe  $K_5$  est planaire, en appliquant le corollaire 3.2.2 on a

$$10 = m \leq 3n - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9. \text{ Contradiction.}$$

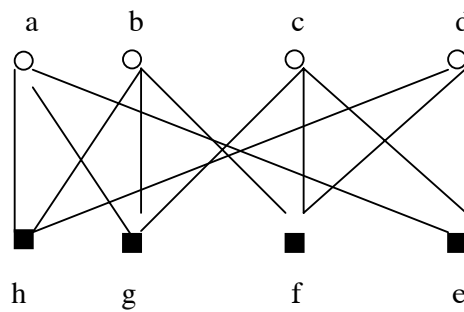
Alors,  $K_5$  est non planaire.

**4.3. INÉGALITÉS DES ARÊTES-SOMMETS.**

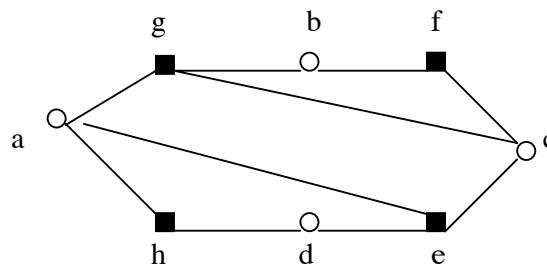
Soit  $G$  un graphe donné. Une question posée est la suivante : '  $G$  est planaire ou non ?'

❖ EXEMPLE 1. Tous les graphes complets  $K_4$  sont planaires.

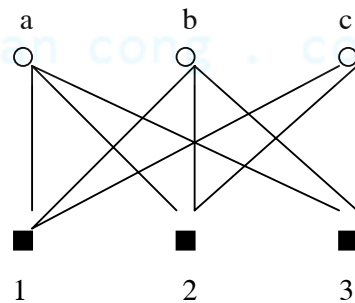
❖ EXEMPLE 2. Soit  $G$  un graphe comme suit :



Le graphe  $G$  est planaire car il est représenté comme le suivant :



❖ EXEMPLE 3. Le graphe suivant n'est pas planaire.



## INÉGALITÉS DES ARÊTES-SOMMETS

Soit  $G$  un graphe planaire, connexe ayant  $n$  sommets,  $m$  arêtes et le contour  $g$  des faces a le nombre des arêtes plus grand que 3. Alors, on a

$$m \leq (n-2)g/(g-2).$$

**Preuve.** Utiliser la matrice d'adjacence et la formule d'Euler.

❖ **EXEMPLE.** A l'aide de la formule d'EULER, nous avons montré que le graphe des trois villas et des trois usines (FIG. 3.2.) ne peut être planaire. En effet, tout cycle dans  $K_{3,3}$  a au moins 4 arêtes. Donc, si  $K_{3,3}$  est planaire, toute face a au moins 4 arêtes. D'après cette inégalité, on a :

$$9 = m \leq (6-2)4/(4-2) = 8.$$

Contradiction. Alors,  $K_{3,3}$  non planaire.

❖ **REMARQUE.**

Le graphe des villas et des usines (Type 1) et le graphe des 5 sommets (Type 2) permettent de définir toute une famille de graphes non planaires.

### 4.4. THEOREME DE KURATOWSKI.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe  $G$  soit planaire est qu'il n'admette pas de sous graphes partiels du type 1 ou type 2.

### 4.5. PROBLEME DE COLORIAGE DES SOMMETS D'UN GRAPHE.

#### 4.5.1. Définition.

La coloration d'un graphe consiste en une affectation de couleurs à tous les sommets du graphes de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

La coloration est une application  $\gamma : X \rightarrow N$  telle que pour tout  $(x, y) \in X$ ,  $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ .

**EXEMPLE.**

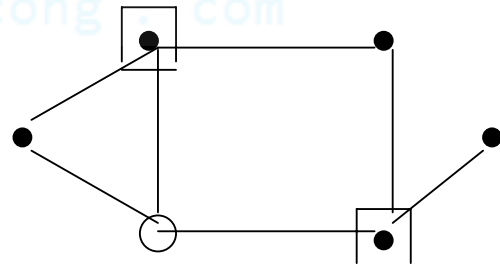


FIG. 4.6.

Le nombre CHROMATIQUE  $\gamma(G)$  est défini comme le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires à la coloration des sommets de  $G$ .

Un graphe  $G$  tel que  $\gamma(G) \leq k$  qui est coloriable en  $k$  couleurs est dit **k-chromatique**.

Une borne inférieure est donnée par  $d + 1$  avec  $d$  le plus grand degré d'un sommet.

$$\gamma(G) \leq d + 1$$

## APPLICATIONS.

### ❖ EMPLOI DU TEMPS.

On veut faire passer des examens oraux. Les contraintes d'intégrité sont :

- ♦ Un professeur ne peut examiner qu'un élève à la fois.
- ♦ Un élève est examiné par un professeur unique à un temps donné.

La répartition des examens est connue. (Professeur  $P_i$  élève  $E_j$ ) :

EXEMPLE.  $(P_1, E_1), (P_1, E_2), (P_1, E_3), (P_2, E_1), (P_2, E_2)$ .

### ❖ CARTE GEORAPHIQUE.

Un des problèmes les plus intéressants est la coloration d'une carte géographique, telles que deux régions n'aient pas la même couleur.

### ❖ ALLOCATION DE REGISTRES.

Un programme place des valeurs de ses variables en mémoire. Tandis qu'un programme numérique a besoin de placer les valeurs de ses variables dans des registres. Puisque les registres sont très rapides et donc très chers, une utilisation efficace est nécessaire.

Si deux variables ne sont pas utilisés en même temps, on peut leur allouer un même registre.

Donc pour chaque variable on calcule le temps du début et de la fin. Une variable est dite active entre son temps du début et de la fin. On construit donc un graphe  $G = (X, U)$  avec :

- ♦  $X$  = l'ensemble des variables.
- ♦ Une arête entre deux variables si elles sont actives en même temps.

Le nombre chromatique de  $G$  est égal au nombre minimum de registres nécessaires.

Le graphe  $G$  est un graphe d'intervalles ; en effet à chaque variable on associe un intervalle du temps, et deux variables sont reliées si les deux intervalles correspondants se recouvrent.

**4.5.2. Algorithme Glouton.****ALGORITHME.** Algorithme Glouton**Données :** Un graphe  $G = (X, U)$ .**Résultats :** Une coloration  $\gamma : X \rightarrow N$ .**Début**Soit  $\tau = x_1, x_2, \dots, x_n$  une numérotation des sommets de  $G$ .Soit  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  un ensemble de couleurs.Répète de  $i=1$  jusqu'à  $n$  : $\gamma(x_i) = \min\{k \in C \text{ tel que pour tout sommet } y \text{ adjacent à } x, \gamma(y) \neq k\}$ **Fin.****4.5.3. THEOREME DE CINQ COULEURS (KEMPE-HEADWOOD).**

Un graphe planaire est 5-chromatique.

**4.5.4. PROBLÈME DE QUATRE COULEURS.****❖ HYPOTHESIS DU PROBLÈME DE QUATRE COULEURS.**

Sur une carte géographique quelconque, on dit qu'elle est **colorée** si chaque région est colorée par une couleur définie telle que deux régions adjacentes (ayant une même partie de frontière) doivent être colorées par deux couleurs différentes. Un problème est posé «**Il est nécessaire d'utiliser combien de couleurs pour colorer une carte géographique quelconque**». Ce problème est fondé par Professeur De Morgan depuis 1852 «Toute carte géographique peut être colorée par quatre couleurs tel que deux pays adjacents doivent être colorés par deux couleurs différentes. Ensuite, il y a beaucoup d'efforts de mathématiciens pour résoudre ce problème. Jusqu'à l'année 1976, un groupe des mathématiciens (K. Appel, W. Haken, J.Koch) qui ont recherché une solution à l'aide du résultat de l'ordinateur IBM ont affirmé que l'hypothèse de quatre couleurs est vraie.

**❖ RELATION ENTRE LE PROBLÈME DE QUATRE COULEURS ET LE NOMBRE CHROMATIQUE.**

Considérons un graphe planaire topologique  $G$  connexe, et sans sommets isolés; on lui fera correspondre un graphe planaire topologique  $G^*$  de la façon suivante :

A l'intérieur de toute face  $s$  de  $G$ , on place un sommet  $x^*$  de  $G^*$ , à toute arête  $u$  de  $G$ , on fera correspondre une arête  $u^*$  de  $G^*$  qui reliera les sommets  $x^*$  et  $y^*$  correspondant aux faces  $s$  et  $t$  qui se trouvent de part et d'autre de l'arête  $u$ . Le graphe topologique  $G^*$  ainsi défini est planaire, connexe, et n'a pas de sommets isolés : on l'appelle le GRAPHE DUAL de  $G$ . On remarque que :

❖ Le graphe dual de  $G^*$  est  $G$  ;❖ Si  $G$  admet plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets,  $G^*$  admet des sommets de degré deux (anti-nœuds).**❖ THEOREME DE QUATRE COULEURS**

Tous les graphes planaires sont 4-chromatique.