

## Chương 4

# ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

[lvluyen@hcmus.edu.vn](mailto:lvluyen@hcmus.edu.vn)

▶ <http://www.math.hcmus.edu.vn/~luyen/dsb1>

**FB:** [fb.com/daisob1](https://www.facebook.com/daisob1)

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

## Chương 4. ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

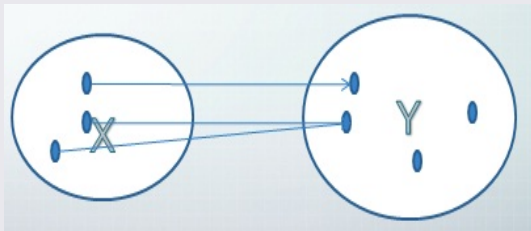
## 4.1. Định nghĩa

- ① Ảnh xạ
- ② Ảnh xạ tuyến tính

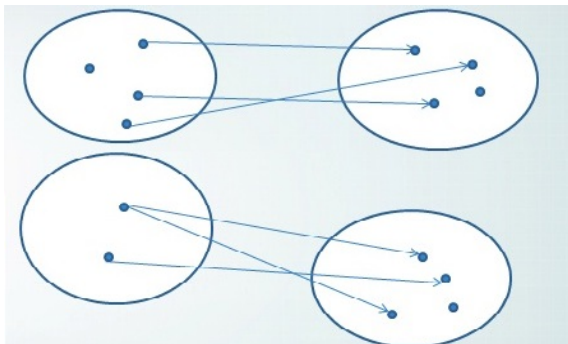
### 4.1.1. Ánh xạ

**Định nghĩa.** Một **ánh xạ**  $f$  từ tập  $X$  vào tập  $Y$  là một phép liên kết từ  $X$  vào  $Y$  sao cho mỗi phần tử  $x$  của  $X$  được liên kết với **duy nhất một phần tử**  $y$  của  $Y$ , ký hiệu:  $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$



Khi đó  $X$  được gọi là **tập nguồn**,  $Y$  được gọi là **tập đích**.



Không là ánh xạ

### Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi  $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$  là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  xác định bởi  $h(\frac{m}{n}) = m$  **không** là ánh xạ.

## 4.1.2. Ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa.** Cho  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ trên  $\mathbb{R}$ . Ta nói ánh xạ  $f : V \longrightarrow W$  là một **ánh xạ tuyến tính** nếu thỏa hai điều kiện sau:

- i)  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  với mọi  $u, v \in V$ ;
- ii)  $f(\alpha u) = \alpha f(u)$  với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$  và với mọi  $u \in V$ .

**Nhận xét.** Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

**Ký hiệu.**

- $L(V, W)$  là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ  $V$  vào  $W$ .
- Nếu  $f \in L(V, V)$  thì  $f$  được gọi là một **toán tử tuyến tính** trên  $V$ .  
Viết tắt  $f \in L(V)$ .

**Ví dụ.** Cho ánh xạ  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chúng tỏ  $f$  là ánh xạ tuyến tính.

**Giải.** Với mọi  $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ . Ta có

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$  được kiểm tra tương tự.

**Ví dụ.**(tự làm) Cho ánh xạ  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y, y - 3z).$$

Chúng tỏ  $f$  là ánh xạ tuyến tính.

**Mệnh đề.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- (i)  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ;
- (ii) Với mọi  $u \in V$ , ta có  $f(-u) = -f(u)$ ;
- (iii) Với mọi  $u_1, \dots, u_m \in V$  và với mọi  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , ta có
$$f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_m f(u_m).$$

**Ví dụ.** Cho  $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  và

$$f(1, 2, 1) = (2, 1); f(-1, 2, 3) = (4, -3).$$

Tính  $f(5, 2, -3)$ ?

**Giải.** Ta có  $(5, 2, -3) = 3(1, 2, 1) - 2(-1, 2, 3)$ . Suy ra

$$f(5, 2, -3) = 3(2, 1) - 2(4, -3) = (-2, 9).$$



**Định lý.** Cho  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ,  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là cơ sở của  $V$ . Khi đó, nếu  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  là một tập hợp của  $W$  thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  sao cho

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu  $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  thì

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

a) Chứng tỏ  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

b) Tìm ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

## Giải.

a) Chứng tỏ  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Ta có  $|A| = 1$ , suy ra  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính. Vì  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  bằng số vectơ của  $\mathcal{B}$  nên  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

b) Tìm ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , ta sẽ tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ . Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array} \right).$$

Vậy  $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + y - z \\ -x + z \end{pmatrix}$ . Suy ra

$$u = (x - y - z)u_1 + (2x + y - z)u_2 + (-x + z)u_3.$$

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - y - z)f(u_1) + (2x + y - z)f(u_2) + (-x + z)f(u_3) \\ &= (x - y - z)(2, 1, -2) + (2x + y - z)(1, 2, -2) \\ &\quad + (-x + z)(3, 5, -7) \\ &= (x - y, y + 2z, x - 3z). \end{aligned}$$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho

$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 2); u_2 = (-2, 5, -4); u_3 = (0, -1, 1))$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . Tìm  $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  thỏa

$$f(u_1) = (1, 1, -2); f(u_2) = (1, -2, 1); f(u_3) = (1, 2, -1).$$

**Đáp án.**  $f(x, y, z) = (-x + 3y + 4z, -3x + 2z, -3y - 4z)$ .

## 4.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

- ① Không gian nhân
- ② Không gian ảnh

## 4.2.1. Không gian nhân

**Định nghĩa.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathbf{Ker}f = \{u \in V \mid f(u) = \mathbf{0}\}$$

Khi đó  $\mathbf{Ker}f$  là không gian con của  $V$ , ta gọi  $\mathbf{Ker}f$  là *không gian nhân* của  $f$ .

**Nhận xét.** Dựa vào định nghĩa, ta được

$$u \in \mathbf{Ker}f \Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0}.$$

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của  $\mathbf{Ker}f$ ?

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

**Giải.** Gọi  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Ta có

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là  $u_1 = (2, -1, 1)$ .

Vậy,  $\text{Ker } f$  có một cơ sở là  $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$ .

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, x + 3y + 3z - t, 2x + 3y + 6z + 7t).$$

Tìm một cơ sở của  $\text{Ker } f$ ?

**Hướng dẫn.** Xét hệ phương trình thuần nhất với ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z, t) = (-3a - 8b, 3b, a, b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là  $u_1 = (-3, 0, 1, 0)$  và  $u_2 = (-8, 3, 0, 1)$ .

Vậy,  $\text{Ker } f$  có một cơ sở là  $\{u_1 = (-3, 0, 1, 0); u_2 = (-8, 3, 0, 1)\}$ .

## 4.2.1. Không gian ảnh

**Định nghĩa.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\text{Im}f = \{f(u) \mid u \in V\}.$$

Khi đó  $\text{Im}f$  là không gian con của  $W$ , ta gọi  $\text{Im}f$  là *không gian ảnh* của  $f$ .

**Định lý.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

là tập sinh của  $V$  thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của  $\text{Im}f$ .



**Nhận xét.** Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở  $\text{Im}f$ , ta chọn một tập sinh  $S$  của  $V$  (để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó  $\text{Im}f$  sinh bởi tập ảnh của  $S$ .

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của  $\text{Im}f$ ?

**Giải.** Gọi  $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ . Ta có

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, 3),$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 3, 5),$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1).$$

Ta có  $\text{Im}f$  sinh bởi  $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ .

Lập ma trận  $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó  $\text{Im} f$  có cơ sở là  $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}.$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 3x + 2y, 2x + 2y - z, 4x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của  $\text{Im} f$ ?

## 4.3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa.** Cho  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  là cơ sở của  $V$ ,  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  là cơ sở của  $W$  và  $f \in L(V, W)$ . Ta đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}} \ [f(u_2)]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [f(u_n)]_{\mathcal{C}}).$$

Khi đó ma trận  $P$  được gọi là **ma trận biểu diễn** của ánh xạ  $f$  theo cặp cơ sở  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ , ký hiệu  $P = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  (hoặc  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ).

**Nhận xét.** Khi  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $W = \mathbb{R}^m$ , ta có phương pháp tìm  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  như sau:

- Tính  $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ .
- Đặt  $M = (v_1^\top \ v_2^\top \ \dots \ v_m^\top \mid f(u_1)^\top \ f(u_2)^\top \ \dots \ f(u_n)^\top)$ .
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan, đưa  $M$  về dạng  $(I_m \mid P)$
- Khi đó  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P$ .

**Ví dụ.** Xét ánh xạ tuyến tính  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở  $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$ ,  
 $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$ . Tìm  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ ?

**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned}f(u_1) &= (0, 3), \\f(u_2) &= (-1, 3), \\f(u_3) &= (0, 4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Lập} \quad (v_1^\top \ v_2^\top \mid f(u_1)^\top \ f(u_2)^\top \ f(u_3)^\top) &= \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -6 & -4 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** (tự làm) Xét ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, -y + 2z)$$

và cặp cơ sở  $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$   
 $\mathcal{C} = \{u'_1 = (1, 2), u'_2 = (3, 5)\}$ . Tìm  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ ?

**Đáp án.**  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -18 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ.** Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính  $f$  theo cặp cơ sở chính tắc.

**Giải.**

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Định nghĩa.** Cho  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  là cơ sở của  $V$  và  $f \in L(V)$ . Khi đó ma trận  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  được gọi là **ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính**  $f$ , ký hiệu  $[f]_{\mathcal{B}}$ . Rõ ràng

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{B}})$$

**Ví dụ.** Cho  $f \in L(\mathbb{R}^3)$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x - 4y + 3z, 2x - y - z)$$

và  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ . Tìm  $[f]_{\mathcal{B}_0}$ ?

**Đáp án.**

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho các vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)$$

và ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

- a) Chứng minh  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Tìm  $[f]_{\mathcal{B}}$ .

**Đáp án.**  $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

**Định lý.** Cho  $V$  và  $W$  là các không gian vectơ;  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  và  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  tương ứng là các cặp cơ sở trong  $V$  và  $W$ . Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  ta có

i)  $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$

ii)  $[f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$

**Hệ quả.** Cho  $\mathcal{B}$  và  $\mathcal{B}'$  là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều  $V$ . Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính  $f \in L(V)$  ta có

i)  $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}.$

ii)  $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1))$$

và ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z). \text{ Tìm } [f]_{\mathcal{B}}?$$



**Giải.** Gọi  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ , ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}),$$

trong đó  $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , do đó

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Ví dụ.** Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , biết ma trận biểu diễn của  $f$  trong cặp cơ sở  $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0))$  và  $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1); v_2 = (2, 1))$  là

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của  $f$ .

**Giải.**

**Cách 1.** Do  $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$ .
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$ .
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$ .

Cho  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ .

$$\text{Lập } (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x + y + z \\ 0 & 1 & 0 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & x - z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y \\ x - z \end{pmatrix}.$$

Suy ra  $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$ .

Vậy, ta có

$$\begin{aligned}f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\&= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\&= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z).\end{aligned}$$

**Cách 2.** Gọi  $\mathcal{B}_0$  và  $\mathcal{C}_0$  lần lượt là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  và  $\mathbb{R}^2$ . Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0).$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bullet (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} &= (\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}) = (v_1^\top \ v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ \bullet (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) &= (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z).$$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho  $f$  là toán tử tuyến tính trong không gian  $\mathbb{R}^3$  được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3).$$

- a) Tìm ma trận biểu diễn  $f$  trong cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Tìm ma trận biểu diễn  $f$  trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$