# GV LÊ VĂN HỢP

# CHƯƠNG VII

# HÀM BOOLE

Ký hiệu n là số nguyên $\geq 1$.

## I. HÀM BOOLE:

**1.1/ ĐẠI SỐ BOOLE NHỊ PHÂN:** Cho $B = \{1, 0\}$. Ta xác định *các phép toán* trên B như sau: $\forall x, y \in B$ (x, y gọi là *các biến Boole*),
$\bar{x} = 1 - x$ (bù Boole), $x \wedge y = x.y$ (tích Boole),
$x \vee y = x + y - x.y$ (tổng Boole)

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 0 |
| $\bar{x}$ | 0 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 0 | 0 |
| y | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x∧y | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 0 | 0 |
| y | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x∨y | 1 | 1 | 1 | 0 |

Kết quả tính toán của các phép toán " bù Boole, tích Boole và tổng Boole " thì giống như tìm chân trị của các phép toán " phủ định, hội và tuyển mệnh đề ".
Cấu trúc đại số $(B, -, \wedge, \vee)$ gọi là *Đại số Boole nhị phân*.
Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật như trong Đại số mệnh đề: $\forall x, y, z \in B$, ta có
* Luật bù kép : $\bar{\bar{x}} = x$
* Luật lũy đẳng : $x.x = x$ và $x \vee x = x$
* Luật giao hoán : $x.y = y.x$
* Luật hấp thu : $x.(x \vee y) = x = x \vee x.y$
* Luật bù De Morgan : $\overline{x.y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ và $\overline{x \vee y} = \bar{x}.\bar{y}$
* Luật kết hợp : $(x.y).z = x.(y.z)$ và $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
* Luật phân phối : $x.(y \vee z) = x.y \vee x.z$ và $x \vee (y.z) = (x \vee y).(x \vee z)$
* Luật trung hòa : $x.1 = x = x \vee 0$
* Luật bù : $x.\bar{x} = 0$ và $x \vee \bar{x} = 1$
* Luật thống trị : $x.0 = 0$ và $x \vee 1 = 1$

**1.2/ HÀM BOOLE:**

a) $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$, ta nói $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là *một vector Boole*.
Mỗi ánh xạ $f : B^n \rightarrow B = \{0, 1\}$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

gọi là *một hàm Boole n biến*.

b) Mỗi hàm Boole n biến được mô tả bằng *một bảng giá trị* có $2^n$ cột ghi các giá trị của hàm Boole theo $2^n$ vector Boole.

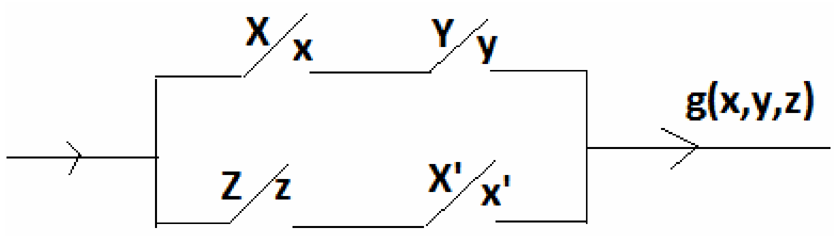
**Ví dụ:**

a) Các cử tri A, B, C bỏ phiếu tín nhiệm ứng viên D. Ta có các biến Boole tương ứng a, b, c ( $a = 1$ nếu A tín nhiệm D hoặc $a = 0$ nếu trái lại. Tương tự cho các biến Boole b và c). Ta có hàm Boole f thể hiện kết quả bỏ phiếu tín nhiệm $f : B^3 \rightarrow B$, $\forall (a, b, c) \in B^3$,
$f(a,b,c) = 1$ (nếu D được tín nhiệm $\geq 2$ phiếu) hoặc $f(a,b,c) = 0$ (nếu trái lại)

| a | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| c | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| f(a,b,c) | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** |

Bảng giá trị của hàm Boole f (x,y,z)

b) Cho các công tắc điện X, Y, Z trong một mạch điện như sau (công tắc điện X' = $\overline{X}$ có trạng thái đóng, mở luôn luôn trái ngược với công tắc X) :




Ta có các biến Boole tương ứng x, y, z ( x = 1 nếu A đóng, x = 0 nếu A mở, x' = $\overline{x}$. Tương tự cho các biến Boole y và z ). Ta có hàm Boole g thể hiện trạng thái của mạch điện : g : $B^3 \to B$, $\forall$(x, y, z) $\in B^3$ , g (x,y,z) = 1 (nếu có điện qua mạch: X, Y đều đóng hoặc X mở, Z đóng) hoặc g (x,y,z) = 0 (nếu trái lại).

| x | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| z | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| g(x,y,z) | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |

Bảng giá trị của hàm Boole g(x,y,z)

## 1.3/ <u>ĐẠI SỐ BOOLE CỦA CÁC HÀM BOOLE:</u>

Đặt $F_n$ = ( Tập hợp các hàm Boole n biến ) = { f | f : $B^n \to B$ }.

Ta có | $F_n$ | = $2^{2^n}$ (bảng giá trị có $2^n$ cột, mỗi cột có 2 khả năng chọn giá trị).

Trong $F_n$, có *các hàm Boole đặc biệt* là *hàm boole hằng* **O** (chỉ nhận giá trị 0) và *hàm boole hằng* **1** (chỉ nhận giá trị 1).

Ta xác định *các phép toán* trên $F_n$ như sau:

$\forall f, g \in F_n$ , $\forall X = (x_1, x_2, \ldots , x_n) \in B^n$,

$\overline{f}(X) = \mathbf{1}(X) - f(X)$ (bù Boole) $(f \wedge g)(X) = f(X).g(X)$ (tích Boole)

$f(X) \vee g(X) = f(X) + g(X) - f(X).g(X)$ (tổng Boole)

Cấu trúc đại số $(F_n, -, \wedge, \vee)$ gọi là *Đại số Boole của các hàm Boole n biến*.

Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật như trong Đại số mệnh đề: $\forall f, g, h \in F_n$, ta có

* Luật bù kép : $\overline{\overline{f}} = f$ * Luật lũy đẳng : $f.f = f$ và $f \vee f = f$
* Luật giao hoán : $f.g = g.f$ * Luật hấp thu : $f.(f \vee g) = f = f \vee f.g$
* Luật bù De Morgan : $\overline{f.g} = \overline{f} \vee \overline{g}$ và $\overline{f \vee g} = \overline{f}.\overline{g}$
* Luật kết hợp : $(f.g).h = f.(g.h)$ và $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$
* Luật phân phối : $f.(g \vee h) = f.g \vee f.h$ và $f \vee (g.h) = (f \vee g).(f \vee h)$
* Luật trung hòa : $f.\mathbf{1} = f = f \vee \mathbf{O}$ * Luật bù : $f.\overline{f} = \mathbf{O}$ và $f \vee \overline{f} = \mathbf{1}$
* Luật thống trị : $f.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ và $f \vee \mathbf{1} = 1$

**Ví dụ:** Cho $f, g \in F_2$ và các hàm **O**, **1**, $\overline{f}$, $\overline{g}$, f. g, $f \vee g$ được thể hiện trong bảng giá trị dưới đây:

| x | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **1**(x,y) | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **O**(x,y) | **0** | **0** | **0** | **0** |
| f (x,y) | 1 | 0 | 0 | 1 |
| g(x,y) | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ (x,y) | **0** | **1** | **1** | **0** |
| $\overline{g}$ (x,y) | **0** | **1** | **0** | **1** |
| (f .g)(x,y) | **1** | **0** | **0** | **0** |
| $(f \vee g)$(x,y) | **1** | **0** | **1** | **1** |

# II. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA HÀM BOOLE:

## 2.1/ TỪ ĐƠN ( CÁC HÀM BOOLE CƠ BẢN ):

Trong $F_n$, xét $2n$ *hàm Boole cơ bản* (ta cũng gọi chúng là $2n$ *từ đơn*):

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ và $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_i}$ ( $1 \le i \le n$ ).

Từ nay về sau, ta ký hiệu đơn giản $\varphi_i = x_i$ và $\psi_i = \overline{x_i}$ ( $1 \le i \le n$ ).

**Ví dụ:** $F_5 = \{ f \mid f : B^5 \to B \}$ có 10 từ đơn là $x_i$, $\overline{x_i}$ ( $1 \le i \le 5$ ).

$\varphi_2(1,\mathbf{0},1,1,0) = x_2(1,\mathbf{0},1,1,0) = \mathbf{0}$ và $\psi_5(0,1,1,0,\mathbf{0}) = \overline{x_5}(0,1,1,0,\mathbf{0}) = \overline{0} = \mathbf{1}$

$\overline{x_2}\, x_3 \overline{x_5}\, x_1 \overline{x_3} = \overline{x_2}\, \overline{x_5}\, x_1(x_3 \overline{x_3}) = \overline{x_2}\, \overline{x_5}\, x_1.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (giao hoán, kết hợp, bù, thống trị)

$x_4 \overline{x_2}\, x_1 \overline{x_5} \vee x_4 \overline{x_2}\, x_1 x_5 = (x_4 \overline{x_2}\, x_1)(\overline{x_5} \vee x_5) = x_4 \overline{x_2}\, x_1.\mathbf{1} = x_4 \overline{x_2}\, x_1$ (phân phối, kết hợp, bù, trung hòa)

## 2.2/ ĐƠN THỨC:

*Một đơn thức* trong $F_n$ là tích Boole của một số từ đơn sao cho tích này $\neq$ **O**.

Trong một đơn thức, không thể có mặt đồng thời $x_i$ và $\overline{x_i}$ [ vì $x_i \overline{x_i} = \mathbf{O}$ ] và ta không ghi lặp lại các từ đơn [ vì $x_i x_i = x_i$ và $\overline{x_i}\, \overline{x_i} = \overline{x_i}$ ] ( $1 \le i \le n$ ).

*Bậc của một đơn thức* là số từ đơn khác nhau có mặt trong đơn thức.

Một đơn thức trong $F_n$ có bậc (deg = degree) từ 1 đến n.

Một đơn thức có bậc n trong $F_n$ (cao nhất) được gọi là *một đơn thức tối tiểu*.

Mỗi đơn thức tối tiểu trong $F_n$ có dạng tổng quát

$m = y_1\, y_2 \dots y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $\overline{x_i}$ ( $1 \le i \le n$ )

**Ví dụ:** Xét các đơn thức trong $F_5$ (theo 5 biến Boole x, y, z, t và u):

$m_1 = \overline{z}$, $m_2 = y\overline{u}$, $m_3 = \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{t}$, $m_4 = y\, z\, t\, u$ và $m_5 = x\, \overline{y}\, \overline{z}\, t\, u$.

Ta có $\deg(m_i) = i$ ( $1 \le i \le 5$ ) và $m_5 = x\, \overline{y}\, \overline{z}\, t\, u$ là một đơn thức tối tiểu.

## 2.3/ ĐA THỨC: *Một đa thức* f trong $F_n$ là tổng Boole của một số đơn thức ( trong $F_n$ ).

Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \dots, m_k$ là các đơn thức trong $F_n$ ).

**Ví dụ:** Xét đa thức f trong $F_5$ (theo 5 biến Boole x, y, z, t và u) :

$$f(x,y,z,t,u) = \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{z} \vee y\,\bar{t}\,u \vee y\,\bar{u}$$

Ta có $f(1,1,0,0,1) = \bar{1}.\bar{1}.0.0 \vee \bar{0} \vee 1.\bar{0}.1 \vee 1.\bar{1} = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 = 1$.

## 2.4/ DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE:

*Dạng nối rời chính tắc* của một hàm Boole f là một dạng đa thức đặc biệt của f sao cho các thành phần đơn thức trong đó đều là *các đơn thức tối tiểu*. Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là các đơn thức tối tiểu trong $F_n$).

Dạng nối rời chính tắc của f là *duy nhất sai khác một sự hoán vị của các thành phần đơn thức* $m_1, m_2, \ldots$ và $m_k$.

**Ví dụ:** $f \in F_4$ có biểu thức $f(x,y,z,t) = \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee xy\bar{z}\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t$.

Vế phải là tổng Boole của các đơn thức tối tiểu trong $F_4$ nên vế phải là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole f.

## 2.5/ TÌM DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE: Cho $f \in F_n$.

a) Tìm từ *bảng giá trị* của f : Ta để ý các vector Boole $(u_1,u_2, \ldots ,u_n)$ trong bảng giá trị mà $f(u_1,u_2, \ldots ,u_n) = 1$. Ta tạo ra các đơn thức tối tiểu tương ứng với các vector Boole đó : $(u_1,u_2, \ldots ,u_n) \mapsto m = y_1\, y_2 \ldots y_n$ với $y_i = x_i$ (nếu $u_i = 1$) hoặc $y_i = \bar{x}_i$ (nếu $u_i = 0$) [ $1 \le i \le n$ ].

Tổng Boole các đơn thức tối tiểu như vậy chính là dạng nối chính tắc của hàm Boole f.

**Ví dụ:** Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole $x_1, x_2, x_3$) có bảng giá trị như sau:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $f(x_1,x_2,x_3)$ | **1** | 0 | **1** | **1** | 0 | **1** | 0 | **1** |

Ta thấy $f(1,1,1) = f(1,0,1) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = f(0,0,0) = 1$.

$(1,1,1) \mapsto m_1 = x_1x_2x_3$, $(1,0,1) \mapsto m_2 = x_1\bar{x}_2x_3$, $(0,1,1) \mapsto m_3 = \bar{x}_1x_2x_3$,

$(0,1,0) \mapsto m_4 = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ và $(0,0,0) \mapsto m_4 = \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$.

Do đó dạng nối rời chính tắc của f là $f = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$ hay viết cụ thể $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3$.

b) Tìm từ *một dạng đa thức* của f : dùng $u \vee \bar{u} = \mathbf{1}$ (luật bù) và luật trung hòa để nâng bậc các đơn thức trong đa thức. Phối hợp thêm các luật phân phối, kết hợp, giao hoán và lũy đẳng để khai triển và rút gọn về dạng nối rời chính tắc cho f.

**Ví dụ:** Cho $f \in F_3$ có dạng đa thức như sau: $f(x,y,z) = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee x$. Ta có

$$f(x,y,z) = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \mathbf{1}.\bar{y}\,z \vee x.\mathbf{1}.\mathbf{1} = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\,\bar{y}\,z \vee x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x(y\,z \vee y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}) =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} =$$

$$= \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \text{ ( dạng nối rời chính tắc )}$$

**2.6/ <u>ĐỊNH LÝ:</u>** Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Khi đó f có thể viết thành *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó có dạng nối rời chính tắc của f cũng là *một dạng đa thức đặc biệt* của f ). Như vậy ta có thể biểu diễn các hàm Boole dưới dạng đa thức (đơn giản) mà không cần dùng đến bảng giá trị (việc này khá cồng kềnh phức tạp khi $n \geq 4$).

**2.7/ <u>SO SÁNH CÁC DẠNG ĐA THỨC:</u>** Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Giả sử f có 2 dạng đa thức (với các đơn thức $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$) :

$$f = u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_p \ (1) \quad \text{và} \quad f = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_q \ (2)$$

a) Trường hợp 1: Ta nói (1) và (2) *đơn giản như nhau* nếu
- * $p = q$
- * $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ $(1 \leq i \leq p)$

  [ có thể hoán vị $v_1, v_2, \ldots, v_q$ trước khi so sánh các bậc ]

b) Trường hợp 2 : Ta nói (1) *đơn giản hơn* (2) [ hay (2) *phức tạp hơn* (1) ] nếu
- * $p \leq q$
- * $\deg(u_i) \leq \deg(v_i)$ $(1 \leq i \leq p)$

  [ có thể hoán vị $v_1, v_2, \ldots, v_q$ trước khi so sánh các bậc ]
- * Có ít nhất một dấu $<$ xảy ra trong các dấu $\leq$ nói trên

c) Trường hợp 3 : Ta nói (1) và (2) *không so sánh được với nhau* nếu trường hợp 1 và trường hợp 2 không xảy ra.

**<u>Ví dụ:</u>**

a) Cho $f \in F_4$ và f có 3 dạng đa thức như sau:

$f(x,y,z,t) = x\,y \vee \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4$ (1) $(p = 4)$

$= x\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,y \vee \bar{x}\,z\,t = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4$ (2) $(q = 4)$

$= x\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee x\,y = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \vee w_5$ (3) $(r = 5)$

Ta có (1) và (2) đơn giản như nhau [ $p = q = 4$ và $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$ ]

Ta có (1) đơn giản hơn (3) [ $p = 4 < r = 5$ và $\deg(u_i) \leq \deg(w_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$ ]

b) Cho $g \in F_4$ và g có 2 dạng đa thức như sau:

$g(x,y,z,t) = z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4$ (4) $(p = 4)$

$= \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee z\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,t = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4$ (5) $(q = 4)$

Ta cần hoán vị $v_3$ với $v_1$ rồi ký hiệu lại các chỉ số trước khi so sánh các bậc :

$g(x,y,z,t) = z\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z\,t = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4$ (6) $(r = 4)$

Ta có (4) đơn giản hơn (6) [ $p = r = 4$, $\deg(u_i) \leq \deg(w_i)$ khi $1 \leq i \leq 4$ và $\deg(u_2) = 3 < \deg(w_2) = 4$ ].

c) Cho $h \in F_4$ và h có 2 dạng đa thức như sau:

$h(x,y,z,t) = x \vee \bar{x}\,y\,z\bar{t} = u_1 \vee u_2$ (7) $(p = 2)$

$= x\,z \vee y\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{z} = v_1 \vee v_2 \vee v_3$ (8) $(q = 3)$

Ta có (7) và (8) không so sánh được với nhau.

**2.8 / <u>DẠNG CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CỦA HÀM BOOLE:</u>**

Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$. Ta đã biết f có *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó *dạng nối rời chính tắc* của f là *dạng đa thức phức tạp nhất* của f ). Bằng cách *so sánh các dạng đa thức*, ta chọn ra các dạng đa thức *đơn giản nhất*

*có thể được* cho f (nghĩa là không có dạng nào khác đơn giản hơn chúng). Chúng chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của f.
Phạm vi chương trình là tìm các công thức đa thức tối tiểu của các hàm Boole *không quá 4 biến* bằng *phương pháp biểu đồ KARNAUGH*.

## III. PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH:

**3.1/ BẢNG MÃ:** Cho Đại số Boole nhị phân B = { 1, 0 }.

a) Bảng mã cho $B^1$ (biến Boole x)

| **x** | $\bar{x}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |

b) Bảng mã cho $B^2$ (các biến Boole x và y)

| | **x** | $\bar{x}$ |
|---|---|---|
| **y** | 11 | 01 |
| $\bar{y}$ | 10 | 00 |

c) Bảng mã cho $B^3$ (các biến Boole x, y và z)

| | **x** | **x** | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ |
|---|---|---|---|---|
| **z** | 101 | 111 | 011 | 001 |
| $\bar{z}$ | 100 | 110 | 010 | 000 |
| | $\bar{y}$ | **y** | **y** | $\bar{y}$ |

d) Bảng mã cho $B^4$ (các biến Boole x, y, z và t)

| | **x** | **x** | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **z** | 1010 | 1110 | 0110 | 0010 | $\bar{t}$ |
| **z** | 1011 | 1111 | 0111 | 0011 | **t** |
| $\bar{z}$ | 1001 | 1101 | 0101 | 0001 | **t** |
| $\bar{z}$ | 1000 | 1100 | 0100 | 0000 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | **y** | **y** | $\bar{y}$ | |

**3.2/ GHI CHÚ:**

a) Khái niệm " *kề nhau* " trong bảng mã được hiểu như sau:
* Dòng (cột) 1 kề với dòng (cột) 2. Dòng (cột) 2 kề với dòng (cột) 3.
* Dòng (cột) 3 kề với dòng (cột) 4. Dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.

Bảng mã cũng có thể được xem như *một mặt trụ* nên có thể *uốn cong theo chiều dọc hoặc chiều ngang* để dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.

b) Hai ô " *kề nhau* " trong bảng mã có mã số chỉ sai khác nhau một vị trí.

**3.3/ BIỂU ĐỒ KARNAUGH CỦA HÀM BOOLE:**

Cho $f \in F_n$ $(n \leq 4)$ và bảng giá trị của f.
Ta để ý các vector Boole $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ trong bảng giá trị có $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$.

Mỗi vector Boole $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ như vậy tương ứng với ô có cùng mã số $u_1u_2 \ldots u_n$ trong bảng mã của $B^n$. Đánh dấu các ô tương ứng đó trong bảng mã. Tập hợp S gồm các ô được đánh dấu gọi là biểu đồ Karnaugh của hàm Boole f và ta ký hiệu biểu đồ đó là S = Kar(f ) hay gọn hơn nữa là S = K(f ).

**Ví dụ:** Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole $x_1, x_2, x_3$) có bảng giá trị như sau:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $f(x_1,x_2,x_3)$ | **1** | 0 | **1** | **1** | 0 | **1** | 0 | **1** |

Ta thấy f (1,1,1) = f (1,0,1) = f (0,1,1) = f (0,1,0) = f (0,0,0) = 1.
Đánh dấu các ô có mã số tương ứng 111, 101, 011, 010 và 000 trong bảng mã của $B^3$, ta được biểu đồ S = Kar(f) gồm 5 ô như sau :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **x** | **x** | $\overline{x}$ | $\overline{x}$ |
| **z** | 101 | 111 | 011 | |
| $\overline{z}$ | | | 010 | 000 |
| | $\overline{y}$ | **y** | **y** | $\overline{y}$ |

Ta có thể vẽ biểu đồ S = Kar(f ) một cách đơn giản hơn nữa là

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | * | * | |
| | | * | * |

**3.4/ <u>NHẬN XÉT:</u>** Một hàm Boole $f \in F_n$ được xác định nếu biết một trong các yếu tố sau:

a) Bảng giá trị của f.
b) Một dạng đa thức của f.
c) Dạng nối rời chính tắc của f (dạng đa thức đặc biệt và phức tạp nhất của f ).
d) Biểu đồ Karnaugh của f (nếu $n \le 4$).

**3.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>** Cho $f, g \in F_n$ $(n \le 4)$. Khi đó

a) $K(\overline{f})$ là *phần bù* của K(f ) trong bảng mã của $B^n$.
b) $K(f.g) = K(f) \cap K(g)$ và $K(f \vee g) = K(f) \cup K(g)$.
c) $f \le g \Leftrightarrow K(f) \subset K(g)$. Suy ra $f = g \Leftrightarrow K(f) = K(g)$.

**Ví dụ:** Cho $f, g \in F_3$ có các biểu đồ Karnaugh như sau:

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | | * | * |
| | * | * | |

Kar(f ) (5 ô)

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | * | | * |
| | * | * | * |

Kar(g) (6 ô)

Ta suy ra biểu đồ Karnaugh của các hàm Boole $\overline{f}$, $\overline{g}$, f .g và $f \vee g$ lần lượt như sau:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | * | | |
| * | | | * |

Kar($\overline{f}$) (3 ô)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | * | |
| * | | | |

Kar($\overline{g}$) (2 ô)

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | | | * |
| | * | * | |

Kar(f .g) (4 ô)

| | | | |
|---|---|---|---|
| * | * | * | * |
| | * | * | * |

Kar($f \vee g$) (7 ô)

## 3.6/ BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐƠN THỨC:

Cho *đơn thức* $m \in F_n$ . Ta đã biết $1 \le \deg(m) \le n$.

a) Nếu $\deg(m) = p$ thì $K(m)$ là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có $2^{n-p}$ ô.

b) Nếu $\deg(m) = n$ (m là *đơn thức tối tiểu*) thì $K(m)$ có đúng 1 ô.

**Ví dụ:** Cho $n = 4$.

a) $m = z$ và $u = \bar{y}$ [ $\deg(m) = \deg(u) = 1$ ].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | | | |
| z | * | * | * | * | |
| z | * | * | * | * | t |
| | | | | | t |
| | | | | | |
| | | y | y | | |

Kar(z)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | | | |
| z | * | | | * | |
| z | * | | | * | t |
| | * | | | * | t |
| | * | | | * | |
| | $\bar{y}$ | y | y | $\bar{y}$ | |

Kar ( $\bar{y}$ )

Kar(z) là hình chữ nhật và Kar( $\bar{y}$ ) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-1} = 8$ ô.

b) $m = x\bar{t}$ và $u = \bar{x}y$ [ $\deg(m) = \deg(u) = 2$ ].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | | | |
| z | * | * | | | $\bar{t}$ |
| z | | | | | t |
| | | | | | t |
| | * | * | | | $\bar{t}$ |
| | | y | y | | |

Kar( $x\bar{t}$ )

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
| z | | | * | | $\bar{t}$ |
| z | | | * | | t |
| | | | * | | t |
| | | | * | | $\bar{t}$ |
| | | y | y | | |

Kar( $\bar{x}y$ )

Kar( $x\bar{t}$ ) là hình chữ nhật mở rộng và Kar( $\bar{x}y$ ) là hình chữ nhật có $2^{4-2} = 4$ ô.

c) $m = \bar{x}zt$ và $u = \bar{y}z\bar{t}$ [ $\deg(m) = \deg(u) = 3$ ].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
| z | | | | | |
| z | | | * | * | t |
| | | | | | t |
| | | | | | |
| | | y | y | | |

Kar( $\bar{x}zt$ )

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | | | |
| z | * | | | * | $\bar{t}$ |
| z | | | | | t |
| | | | | | t |
| | | | | | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | y | y | $\bar{y}$ | |

Kar( $\bar{y}z\bar{t}$ )

Kar( $\bar{x}zt$ ) là hình chữ nhật và Kar( $\bar{y}z\bar{t}$ ) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-3} = 2$ ô.

d) $m = \bar{x}yz\bar{t}$ [ $\deg(m) = 4$ và m là đơn thức tối tiểu ].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
| z | | | * | | $\bar{t}$ |
| z | | | | | t |
| | | | | | t |
| | | | | | $\bar{t}$ |
| | | y | y | | |

Kar( $\bar{x}yz\bar{t}$ )

Kar( $\bar{x}zt$ ) là hình chữ nhật có $2^{4-4} = 1$ ô.

## 3.7/ BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐA THỨC:

Cho *đa thức* $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là *các đơn thức* của $F_n$).
Nếu $n \leq 4$ thì $Kar(f) = Kar(m_1) \cup Kar(m_2) \cup \ldots \cup Kar(m_k)$.

**Ví dụ:** Cho $f \in F_4$ và $f(x,y,z,t) = \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee x$. Ta có
$S = Kar(f) = K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}) \cup K(\bar{x}\,z) \cup K(\bar{x}\,y\,\bar{z}\,t) \cup K(x)$ trong đó $K(x)$ gồm 8 ô (.), $K(\bar{x}\,z)$ gồm 4 ô (–), $K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t})$ gồm 4 ô (~) và $K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t})$ gồm 1 ô (+).
Do đó $S = Kar(f)$ gồm 14 ô trong $B^4$ như sau:

| | **x** | **x** | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **z** | . | . | – | – | $\bar{t}$ |
| **z** | . | . | – | – | **t** |
| | . | . | + | | **t** |
| | .~ | . | | ~ | $\bar{t}$ |
| | | **y** | **y** | | |

## 3.8/ TẾ BÀO VÀ TẾ BÀO LỚN TRONG BIỂU ĐỒ:

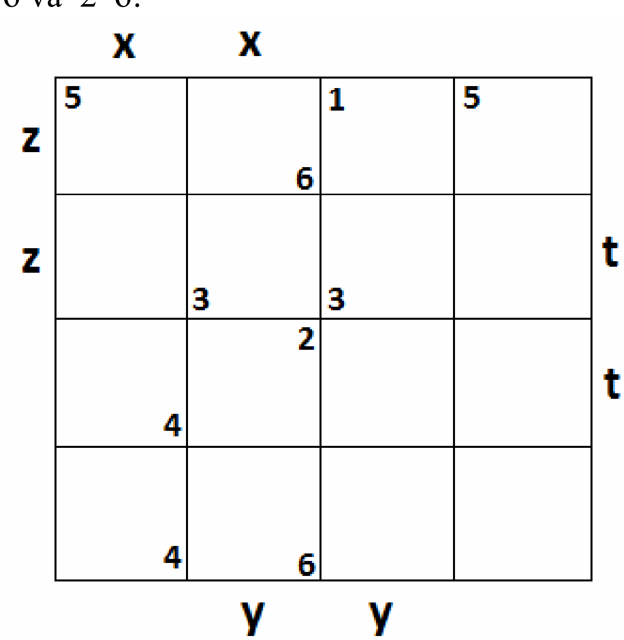
Cho $f \in F_n$ ($n \leq 4$) và $S = Kar(f)$.

a) *Một tế bào* trong $S$ là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có số ô là $2^r$ ($0 \leq r \leq 4$).
Như vậy số ô của một tế bào có thể là 1, 2, 4, 8 và 16.
Một tế bào trong $S$ chính là *biểu đồ của một đơn thức nào đó* trong $F_n$.

b) *Một tế bào lớn* $T$ trong $S$ là *một tế bào tối đại* (theo quan hệ thứ tự $\subset$ trên tập hợp các tế bào trong $S$), nghĩa là không có tế bào $T'$ nào trong $S$ thỏa $T \subset T'$ và $T \neq T'$.

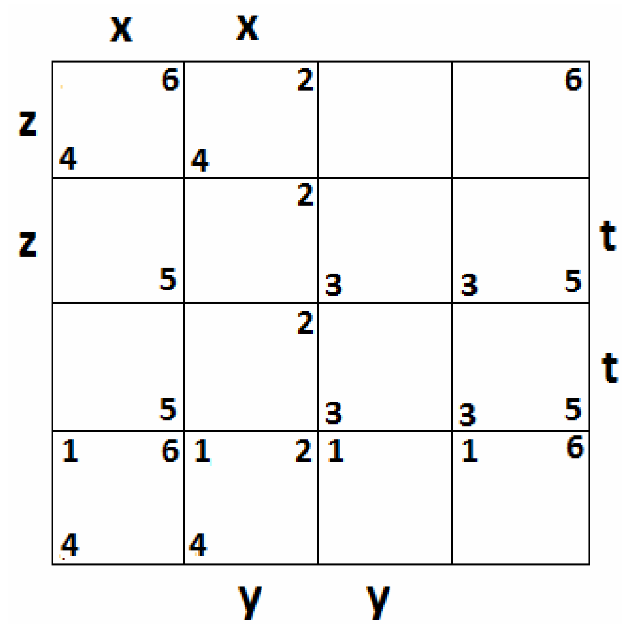
**Ví dụ**

a) Một số tế bào 1 ô và 2 ô.



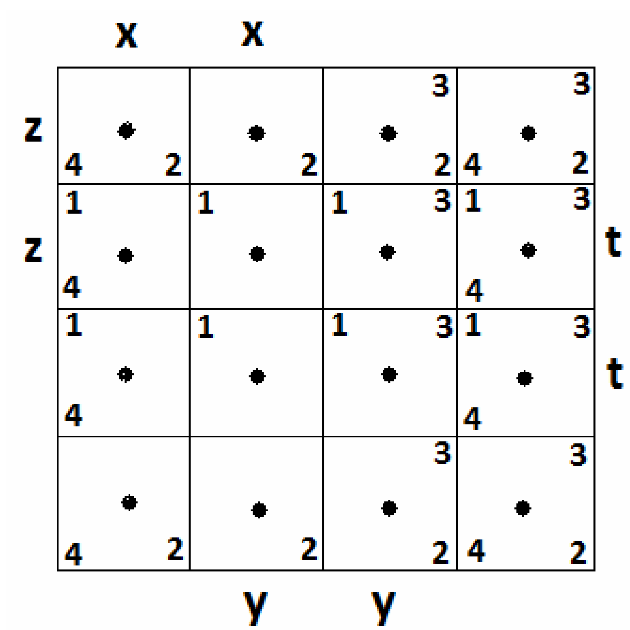

$T_1 = \bar{x}\,y\,z\,\bar{t}$ (1 ô), $T_2 = x\,y\,\bar{z}\,t$ (1 ô), $T_3 = (x \vee \bar{x})\,y\,z\,t = y\,z\,t$ (2 ô),
$T_4 = x\,\bar{y}\,\bar{z}\,(t \vee \bar{t}) = x\,\bar{y}\,\bar{z}$ (2 ô), $T_5 = \bar{y}\,z\,\bar{t}$ (2 ô), $T_6 = x\,y\,\bar{t}$ (2 ô)

b) Một số tế bào 4 ô.



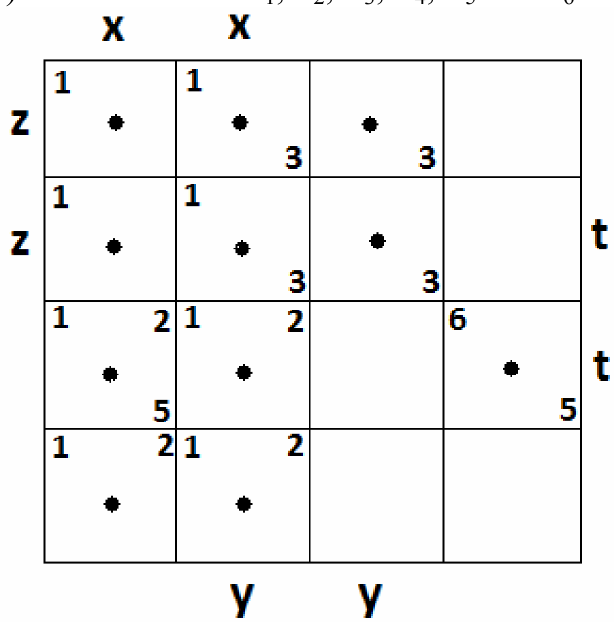

$T_1 = \bar{z}\,\bar{t}$ (4 ô), $T_2 = x\,y$ (4 ô), $T_3 = \bar{x}\,t$ (4 ô),
$T_4 = x\bar{t}$ (4 ô), $T_5 = \bar{y}\,t$ (4 ô), $T_6 = \bar{y}\,\bar{t}$ (2 ô)

c) Một số tế bào 8 ô và 16 ô.



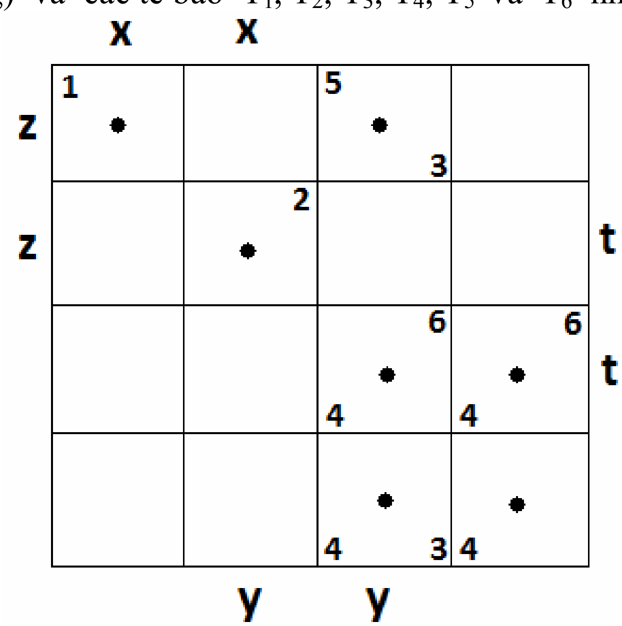

$T_1 = t$ (8 ô), $T_2 = \bar{t}$ (8 ô), $T_3 = \bar{x}$ (8 ô), $T_4 = \bar{y}$ (8 ô),
$T_5$ (cả 16 ô của bảng) $= (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z})(t \vee \bar{t}) = \mathbf{1}$

d) Cho $S = Kar(f)$ và các tế bào $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ và $T_6$ như hình dưới đây :




Ta có $T_1, T_3, T_5$ là các tế bào lớn và $T_2, T_4, T_6$ là các tế bào không lớn
(vì $T_2 \subset T_1$ và $T_2 \neq T_1$, $T_4 \subset T_3$ và $T_4 \neq T_3$, $T_6 \subset T_5$ và $T_6 \neq T_5$ )

e) Cho $S = Kar(g)$ và các tế bào $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ và $T_6$ như hình dưới đây :




Ta có $T_1, T_2, T_3, T_4$ là các tế bào lớn và $T_5, T_6$ là các tế bào không lớn.
(vì $T_5 \subset T_3$ và $T_5 \neq T_3$, $T_6 \subset T_4$ và $T_6 \neq T_4$ )

# IV. CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:

**4.1/ PHÉP PHỦ TỐI TIỂU CHO TẬP HỢP:** Cho các tập hợp $S, T_1, T_2, \ldots$ và $T_k$.

a) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ thì $\{ T_1, T_2, \ldots, T_k \}$ gọi là *một phép phủ* của S.

b) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ và $\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} T_i \neq S$ (bỏ bớt bất kỳ $T_j$ nào ra đều dẫn đến phần hội của các tập hợp còn lại không phủ được S) thì ta nói $\{ T_1, T_2, \ldots, T_k \}$ gọi là *một phép phủ tối tiểu* của S.

c) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ và $\exists j \in \{ 1, 2, ..., k \}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} T_i = S$ thì ta nói $\{ T_1, T_2, ..., T_k \}$ gọi là *một phép phủ chưa tối tiểu* của $S$ (khi bỏ bớt $T_j$, phần hội của các tập hợp còn lại vẫn phủ được $S$).

**Ví dụ:** Cho $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

a) Xét $T_1 = \{ 2, 3, 6 \}$, $T_2 = \{ 1, 4, 6 \}$ và $T_3 = \{ 1, 3, 5 \}$.
Ta có $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = S$, $T_1 \cup T_2 \neq S$, $T_1 \cup T_3 \neq S$ và $T_2 \cup T_3 \neq S$ nên $\{ T_1, T_2, T_3 \}$ là một phép phủ tối tiểu của $S$.

b) Xét $Z_1 = \{ 1, 2, 5 \}$, $Z_2 = \{ 4, 5 \}$, $Z_3 = \{ 2, 3, 5 \}$ và $Z_4 = \{ 3, 6 \}$.
Ta có $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 = S$ và $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_4 = S$ nên $\{ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \}$ là một phép phủ chưa tối tiểu của $S$ (vì dư $Z_3$).

## 4.2/ THUẬT TOÁN TÌM CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:

Cho $f \in F_n$ $(n \leq 4)$ và $S = Kar(f)$.

a) Ý tưởng chính:

* Tìm *tất cả các tế bào lớn* của $S$.
* Chỉ ra *một số phép phủ* của $S$ (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).
* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của $S$ từ các phép phủ nói trên (sơ loại).
* Viết các công thức đa thức cho $f$ tương ứng với các phép phủ tối tiểu trên.
* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức tối ưu* cho $f$ (loại chính thức).

b) Thuật toán cụ thể:

* Xác định *tất cả các tế bào lớn* của $S$ (chỉ rõ vị trí của chúng trên biểu đồ và gọi tên chúng).
* Chọn ô $P_1$ (tùy ý) $\in S$ và tế bào lớn $T_1$ (tùy ý) thỏa $P_1 \in T_1$.
  Chọn ô $P_2$ (tùy ý) $\in S \setminus T_1$ và tế bào lớn $T_2$ (tùy ý) thỏa $P_2 \in T_2$.
  Chọn ô $P_3$ (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và tế bào lớn $T_3$ (tùy ý) thỏa $P_3 \in T_3$.
  Chọn ô $P_4$ (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ và tế bào lớn $T_4$ (tùy ý) thỏa $P_4 \in T_4$.
  Tiếp tục quá trình trên cho đến khi $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k) = \varnothing$, nghĩa là ta có được *một phép phủ* $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$.
* Kết thúc quá trình chọn các ô và các tế bào lớn, ta thu được *một hay nhiều phép phủ* của $S$ (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).
* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của $S$ từ các phép phủ nói trên (sơ loại).
* Viết *các công thức đa thức* cho $f$ tương ứng với mỗi phép phủ tối tiểu trên
* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức đơn giản nhất có thể được*. Đây chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của $f$. (loại chính thức).

**4.3/ GHI CHÚ:** Việc chọn các ô $P_1, P_2, P_3, ...$ là tùy ý trong các phạm vi cho phép. Tuy nhiên ta có thể chọn theo *các thứ tự ưu tiên sau* để thuật toán tiến hành được *nhanh gọn hơn*:

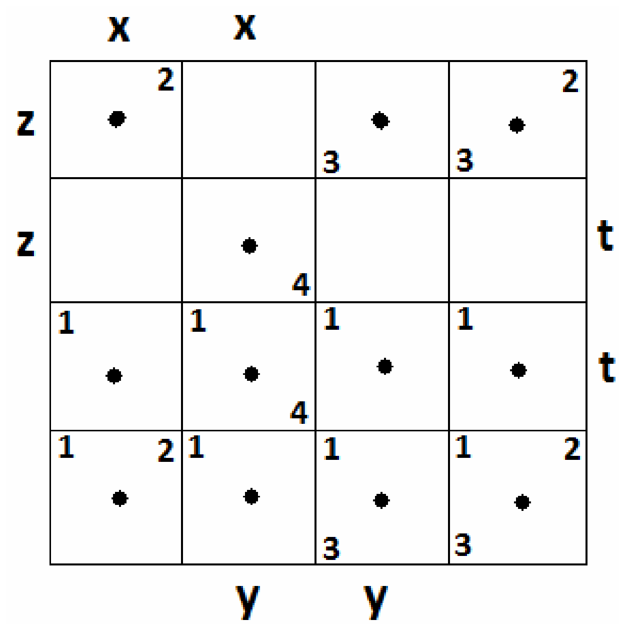
* *Ưu tiên 1*: chọn trước các ô chỉ thuộc 1 tế bào lớn và lấy tất cả các tế bào lớn tương ứng với các ô đó.

* *Ưu tiên 2* : xét tiếp các ô chỉ thuộc 2 tế bào lớn. Nếu có nhiều ô cùng ưu tiên 2 thì chọn trước các ô có đặc điểm ‘‘ không ở chung tế bào lớn với các ô đã bị xóa ’’.
* Ưu tiên thông thường : chọn trước ô ở hàng trên (so với các ô ở hàng dưới), nếu nhiều ô cùng ở hàng trên thì chọn trước ô ở phía trái. Ưu tiên thông thường chỉ tạo ra sự thống nhất trong việc chọn ô.

**<u>Ví dụ:</u>**

a) $f \in F_4$ có $S = K(f)$ với

$K(f) = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \}$




Các tế bào lớn trong $S$ là∈ $T_1 = \bar{z}$ , $T_2 = \bar{y}\,\bar{t}$ , $T_3 = \bar{x}\,\bar{t}$ và $T_4 = xyt$.

Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_2$ , $(1,3) \in T_3$ , $(2,2) \in T_4$ và $(3,1) \in T_1$ . Ta có $S \setminus (T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1) = \varnothing$ nên $S = T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1$ là phép phủ duy nhất của $S$

$T_2 \to T_3 \to T_4 \to T_1$ ( sơ đồ phủ của $S$ )

Do đó $f(x,y,z) = \bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{t} \vee xyt \vee \bar{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của $f$

b) $g \in F_4$ có $S = K(g) = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4) \}$.

Các tế bào lớn trong $S$ là

$T_1 = xz\bar{t}$ , $T_2 = yz\bar{t}$ , $T_3 = \bar{x}yz$, $T_4 = \bar{x}yt$ , $T_5 = y\bar{z}t$ và $T_6 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$ .

Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_1$ , $(3,2) \in T_5$ và $(4,4) \in T_6$ . Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6) \neq \varnothing$.

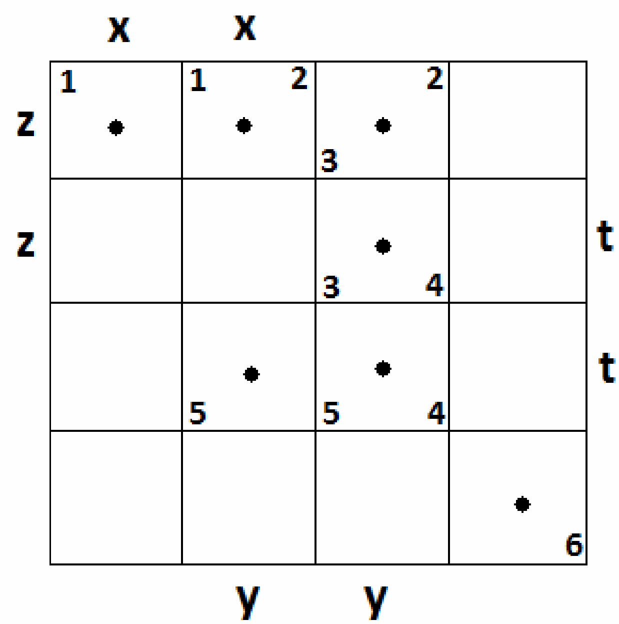
Ưu tiên 2: chọn $(1,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6)$ và để ý $(1,3) \in (T_2 \cap T_3)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2) \neq \varnothing$ nên chọn $(2,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2)$ và để ý $(2,3) \in (T_3 \cap T_4)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4$ (2).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3$ (3).

Sơ đồ các phép phủ của $S$ là
$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] & T_5 \arrow[r] & T_6 \arrow[r] \arrow[d] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_3 \\ & & T_3 & T_4 & \end{tikzcd}$$



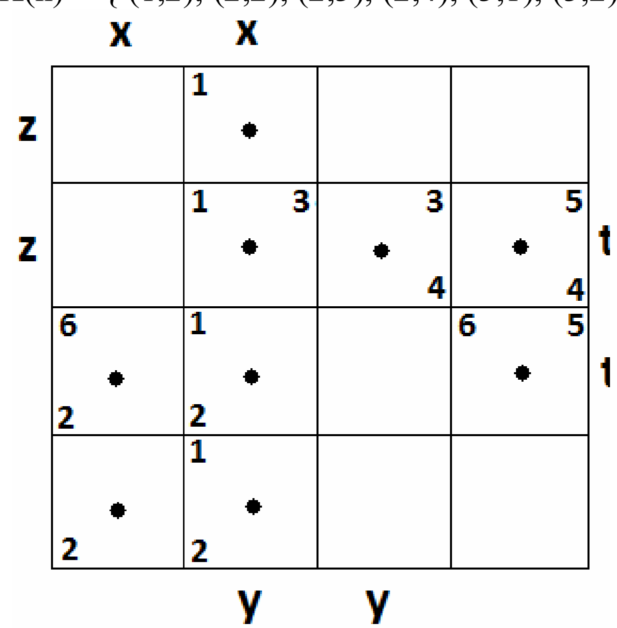

Phép phủ (1) chưa tối tiểu [ dư $T_2$ khi so với phép phủ (3)] nên bị loại.
Các phép phủ (2) và (3) đều tối tiểu.
Từ (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho g :

$g(x,y,z) = xz\overline{t} \vee y\overline{z}t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee yz\overline{t} \vee \overline{x}yt$ (*)

$g(x,y,z) = xz\overline{t} \vee y\overline{z}t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}yz$ (**)

Ta có (**) là công thức đa thức tối tiểu cho g [ loại (*) vì nó phức tạp hơn (**) ].

c) $h \in F_4$ có $S = K(h) = \{ (1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2) \}$.




Các tế bào lớn trong S là
$T_1 = xy$, $T_2 = x\overline{z}$, $T_3 = yzt$, $T_4 = \overline{x}zt$, $T_5 = \overline{x}\,\overline{y}t$ và $T_6 = \overline{y}\,\overline{z}t$.

Ưu tiên 1: $(1, 2) \in T_1$ và $(4,1) \in T_2$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2) \neq \varnothing$.

Ưu tiên 2: chọn $(2,4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và để ý $(2,4) \in (T_4 \cap T_5)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4) \neq \varnothing$ nên chọn $(3,4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4)$ và để ý $(3,4) \in (T_5 \cap T_6)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (2).

Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5) \neq \varnothing$ nên chọn $(2,3) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5)$ và để ý $(2,3) \in (T_3 \cap T_4)$.
Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (3).
Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (4).

Sơ đồ các phép phủ của $S$ là

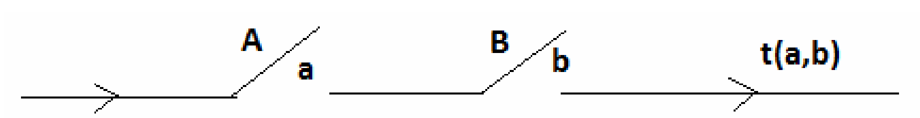
$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[r] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_4 \arrow[r] \arrow[d] & T_5 \\ & T_3 & T_5 \arrow[l] \arrow[d] & T_6 & \\ & & T_4 & & \end{tikzcd}$$

Phép phủ (4) trùng với phép phủ (1) . Các phép phủ (1), (2) và (3) đều tối tiểu.
Từ (1), (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho $h$ :
$h(x,y,z) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x} z t \vee \bar{x}\,\bar{y} t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x} z t \vee \bar{y}\,\bar{z} t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} t \vee yzt$
Các công thức trên (đơn giản như nhau) là các công thức đa thức tối tiểu của $h$.

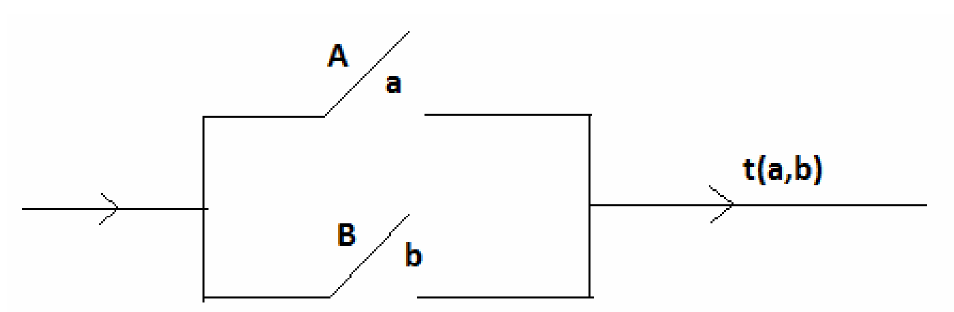
# V. ĐẠI SỐ CÁC MẠCH ĐIỆN:

## 5.1/ HÀM BOOLE CỦA MẠCH ĐIỆN:

a) Mạch điện là một hệ thống bao gồm các công tắc điện và các dây dẫn.
Mỗi công tắc điện tương ứng với *một biến Boole* (biến Boole này = 1 hoặc 0 tùy thuộc vào trạng thái đóng hoặc mở của công tắc). Hai công tắc A và B (tương ứng với các biến Boole a và b) trên một dây dẫn sẽ được *mắc nối tiếp* hoặc *mắc song song*. Ta có hàm Boole theo hai biến
$t(a, b) = 1$ (nếu có điện qua dây) hoặc $= 0$ (nếu trái lại)



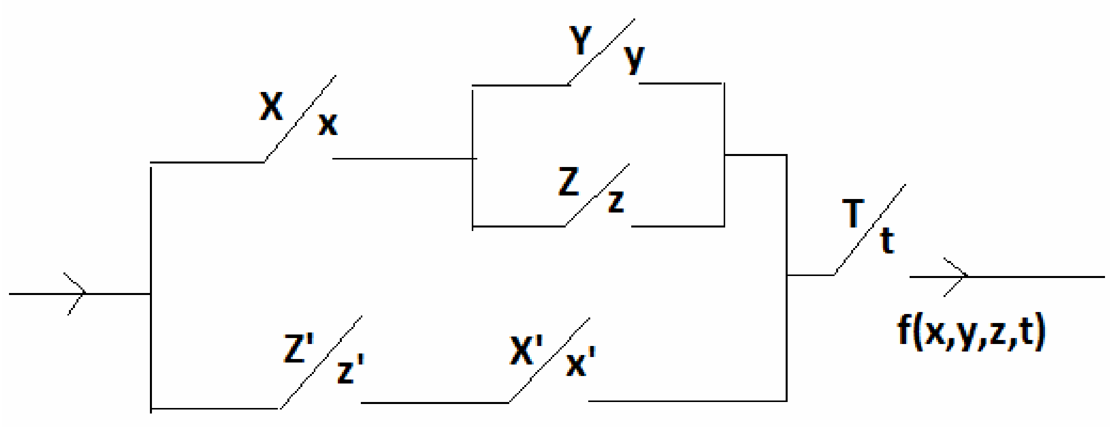

Cấu trúc mắc nối tiếp $t(a, b) = ab$




Cấu trúc mắc song song $t(a, b) = a \vee b$

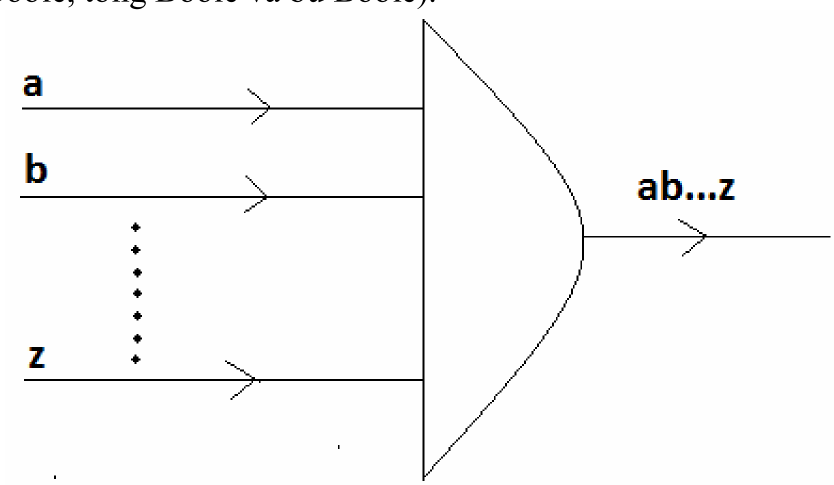
b) Xét mạch điện có $n$ công tắc điện $A_1, A_2, \dots, A_n$ (ứng với các biến Boole $a_1, a_2, \dots, a_n$). Ta có hàm Boole theo $n$ biến
$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ (nếu có điện qua mạch) hoặc $= 0$ (nếu trái lại)
Từ các cấu trúc mắc nối tiếp hoặc mắc song song trong mạch điện, ta có thể viết $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dưới dạng một đa thức theo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ trong $F_n$ .

**Ví dụ:** Cho một mạch điện với các công tắc điện X, Y, Z và T như sau:
( ở đây $X' = \overline{X}$, $Z' = \overline{Z}$, $x' = \overline{x}$ và $z' = \overline{z}$ ) :

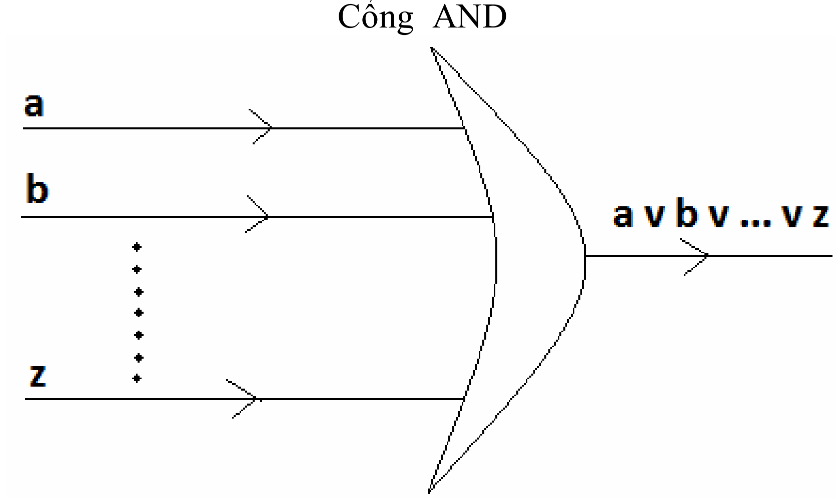



Ta viết hàm Boole f của mạch điện trên dưới dạng đa thức.
Ta có $f(x,y,z,t) = [\, x(y \vee z) \vee \overline{z}\,\overline{x}\,]t = (xy \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{z})t$
$= xyt \vee xzt \vee \overline{x}\,\overline{z}\,t$ (dạng đa thức của f).

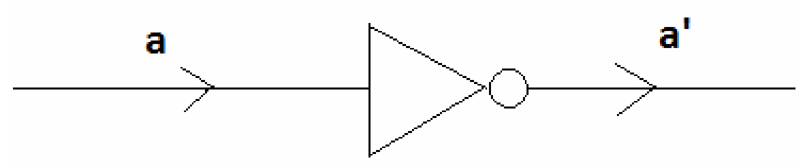
**5.2/ CỔNG:** Cổng là một thiết bị điện có một hay nhiều dòng điện đi vào và chỉ có một dòng điện đi ra.
Có 3 loại cổng: cổng AND, cổng OR và cổng NOT (ứng với các phép toán tích Boole, tổng Boole và bù Boole).




Cổng AND




Cổng OR




Cổng NOT

## 5.3/ THIẾT KẾ MẠNG CÁC CỔNG TỔNG HỢP HÀM BOOLE:

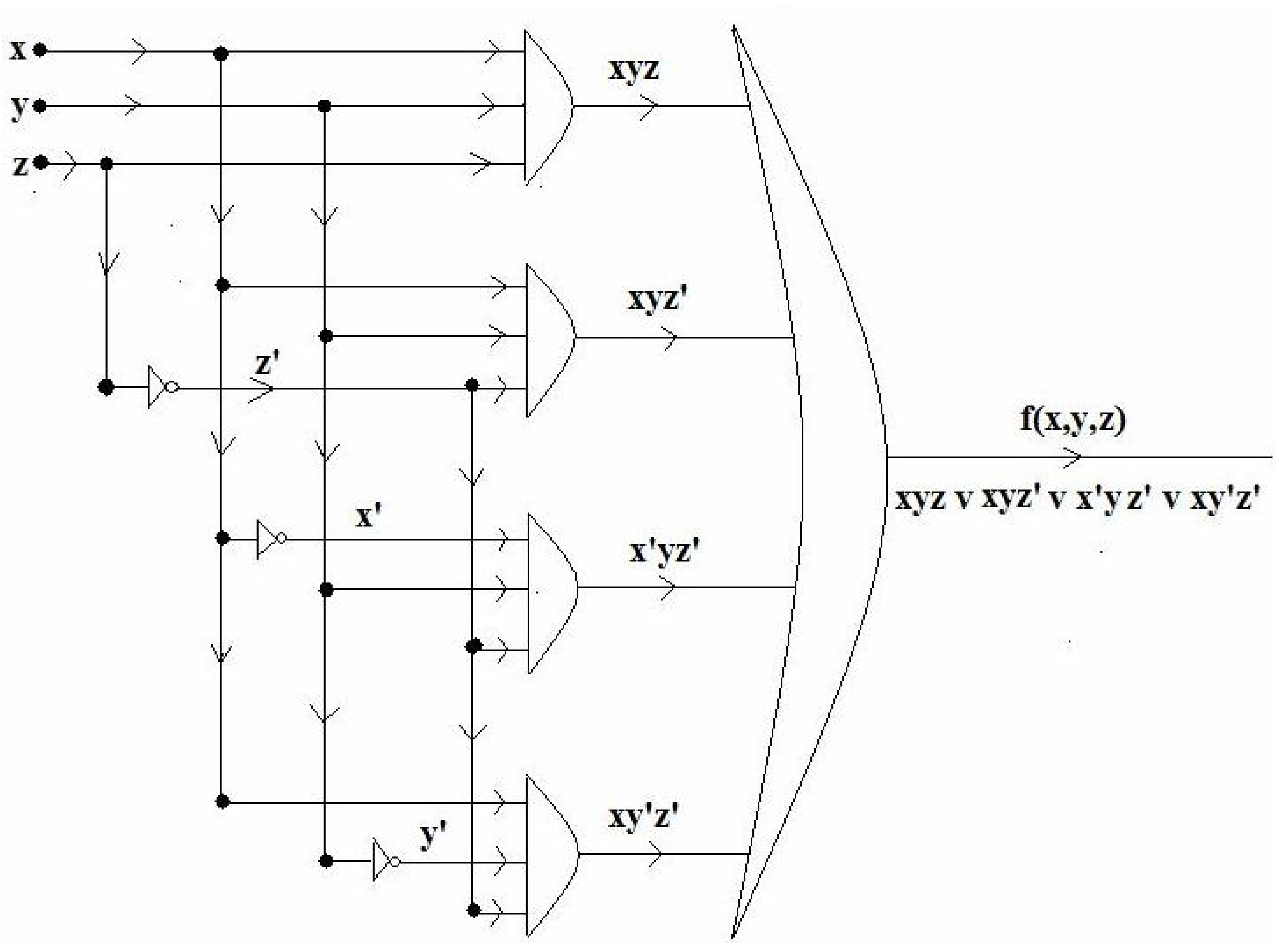
Cho $f \in F_n$. Ta biết f có một hay nhiều dạng đa thức khác nhau.

a) Ta có thể dựa vào một dạng đa thức tùy ý của f để thiết kế một mạng (gồm các cổng AND, OR, NOT) tổng hợp f.

b) Để tối ưu hóa, ta nên dùng một công thức đa thức tối tiểu của f thiết kế mạng các cổng tổng hợp nó. Ta sẽ tiết giảm được chi phí mua sắm các cổng và dây dẫn.

**Ví dụ:** $f \in F_3$ và $f(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$ (đây là một dạng đa thức của f và cũng là dạng nối rời chính tắc của f ).

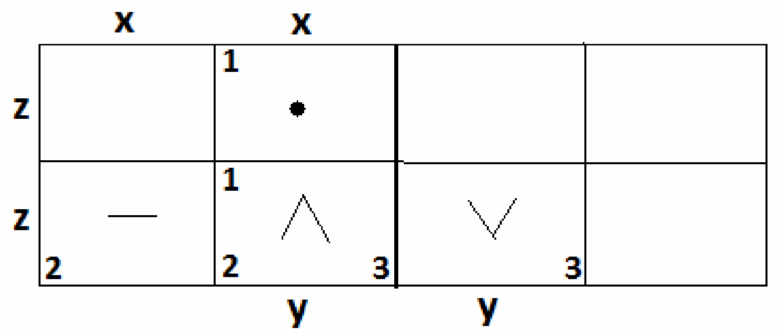
a) Dựa vào dạng đa thức trên, ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f như sau:



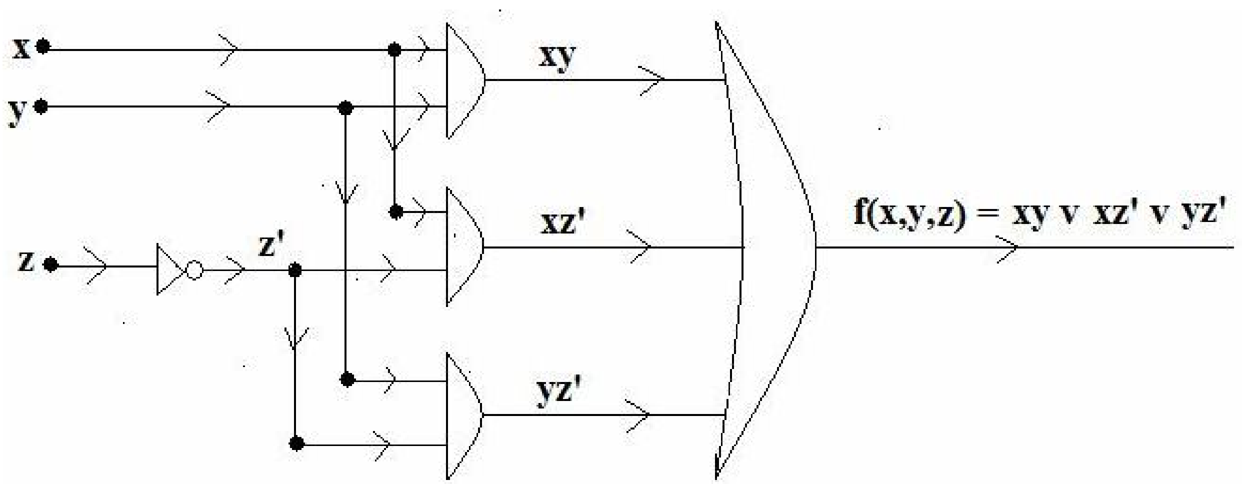

Mạng các cổng (chưa tối ưu hóa) tổng hợp hàm boole f

b) Ta tìm một công thức đa thức tối tiểu cho f trước khi thiết kế mạng các cổng cho nó.

Vẽ $S = Kar(f) = K(xyz) \cup K(xy\bar{z}) \cup K(\bar{x}y\bar{z}) \cup K(x\bar{y}\bar{z})$ trong bảng mã $B^3$.




Các tế bào lớn trong S là $T_1 = xy$, $T_2 = x\overline{z}$ và $T_3 = y\overline{z}$.
Ưu tiên 1: $(1, 2) \in T_1$, $(2,1) \in T_2$ và $(2,3) \in T_3$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ là phép phủ duy nhất của S ( $T_1 \to T_2 \to T_3$ ).
Do đó $f(x,y,z) = xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của f
Ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f dựa theo công thức đa thức tối tiểu trên.




Mạng các cổng (đã tối ưu hóa) tổng hợp hàm boole f

---