

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

I. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B, A_1, A_2, \dots và A_n .

- a) Nếu A và B rời nhau ($A \cap B = \emptyset$) thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.
 b) Nếu A_1, A_2, \dots và A_n rời nhau từng đôi một ($A_i \cap A_j = \emptyset$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) thì $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

Ví dụ:

- a) Lớp học L có 80 sinh viên nam và 65 sinh viên nữ. Ta có thể viết $L = A \cup B$ với $A = \{x \in L \mid x \text{ là nam}\}$, $B = \{x \in L \mid x \text{ là nữ}\}$ và $A \cap B = \emptyset$. Suy ra $|L| = |A \cup B| = |A| + |B| = 80 + 65 = 145$.
 Vậy lớp học L có 145 sinh viên.
 b) Trường T có 300 học sinh lớp VI, 280 học sinh lớp VII, 250 học sinh lớp VIII và 220 học sinh lớp IX. Ta có thể viết $T = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$ với $A_j = \{x \in T \mid x \text{ học lớp } j\}$ ($6 \leq j \leq 9$) và $A_i \cap A_j = \emptyset$ khi $6 \leq i \neq j \leq 9$.
 Suy ra $|T| = |A_6| + |A_7| + |A_8| + |A_9| = 300 + 280 + 250 + 220 = 1.050$.
 Vậy trường T có 1.050 học sinh.

1.2/ MỆNH ĐỀ: Cho tập hợp *hữu hạn* E và $B \subset E$.

- a) Đặt $\wp(E) = \{A \mid A \subset E\}$ ($\wp(E)$ là *tập hợp tất cả các tập hợp con* của E)
 Nếu $|E| = n$ (n nguyên ≥ 0) thì $|\wp(E)| = 2^n$.
 b) $|B| = |E| - |\bar{B}|$ (nếu việc đếm $|E|$ và $|\bar{B}|$ dễ dàng hơn việc đếm $|B|$).

Ví dụ: Cho $E = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ và $\Pi = \wp(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

- a) Do $|E| = 9$ nên $|\Pi| = 2^9 = 512$.
 b) Cho $\Phi = \{A \mid A \subset E \text{ và } (1 \in A \text{ hay } 2 \in A)\}$ thì $\Phi \subset \Pi$ và $\bar{\Phi} = \{A \mid A \subset E \text{ và } (1 \notin A \text{ và } 2 \notin A)\} = \wp(F)$ với $F = E \setminus \{1, 2\}$ và $|F| = 7$.
 Suy ra $|\Phi| = |\Pi| - |\bar{\Phi}| = 2^9 - 2^7 = 512 - 128 = 384$.

1.3/ NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A và B . Ta có

- a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (nguyên lý bù trừ).
 b) $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = |B| + |A \setminus B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

Ví dụ: Lớp học L có 95 sinh viên học tiếng Anh, 60 sinh viên học tiếng Pháp và 43 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Giả sử mỗi sinh viên trong lớp L đều học tiếng Anh hay tiếng Pháp. Hỏi lớp L có bao nhiêu sinh viên? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Anh? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Pháp?
 Đặt $A = \{x \in L \mid x \text{ học tiếng Anh}\}$, $B = \{x \in L \mid x \text{ học tiếng Pháp}\}$ thì

$L = A \cup B$ và $A \cap B = \{x \in L \mid x \text{ học tiếng Anh và tiếng Pháp}\}$. Ta có
 $|L| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 95 + 60 - 43 = 112$
 Số sinh viên chỉ học tiếng Anh $= |A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 95 - 43 = 52$
 Số sinh viên chỉ học tiếng Pháp $= |B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 60 - 43 = 17$

1.4/ NGUYÊN LÝ CÔNG: Một công việc có thể thực hiện bằng một trong k cách khác nhau (chọn cách này thì không chọn các cách khác). Cách thứ j có thể thu được m_j kết quả khác nhau ($1 \leq j \leq k$). Ta có số kết quả khác nhau có thể xảy ra khi thực hiện xong công việc là $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)$.

Ví dụ: Người ta đưa vào danh sách bầu chọn “quả bóng vàng” gồm 5 cầu thủ Đức, 4 cầu thủ Argentina, 3 cầu thủ Hà Lan và 2 cầu thủ Brazil. Số cầu thủ là ứng viên của “quả bóng vàng” là $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ (cầu thủ).

1.5/ NGUYÊN LÝ NHÂN: Một quá trình bao gồm k công việc diễn ra liên tiếp hoặc đồng thời. Việc thứ j có thể có m_j cách thực hiện ($1 \leq j \leq k$). Số cách khác nhau để thực hiện xong quá trình là $(m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k)$.

Ví dụ:

a) Đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là một quá trình bao gồm 4 công việc liên tiếp trong đó việc 1: đi từ Sài Gòn đến Long An (giả sử có 3 lộ trình), việc 2: đi từ Long An đến Tiền Giang (giả sử có 4 lộ trình), việc 3: đi từ Tiền Giang đến Vĩnh Long (giả sử có 2 lộ trình) và việc 4: đi từ Vĩnh Long đến Cần Thơ (giả sử có 3 lộ trình). Khi đó số lộ trình khác nhau để đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72 \text{ (lộ trình).}$$

b) Xét số nguyên dương $N = \overline{abcd}$ có 4 chữ số thập phân trong đó a tùy ý, b chẵn, $c : 3$ và $d > 3$. Việc xây dựng số N xem như một quá trình bao gồm 4 công việc đồng thời (a có 9 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn, d có 6 cách chọn). Số lượng số N có thể tạo ra là $9 \times 5 \times 4 \times 6 = 1080$ (số).

1.6/ NGUYÊN LÝ DIRICHLET: (Khẳng định sự tồn tại)

Có n con cá và m cái ao (chưa có cá) thỏa $n > m$.

Thả tùy ý n cá xuống m ao. Khi đó

a) Có ít nhất một ao chứa ít nhất 2 cá.

b) Có ít nhất một ao chứa ít nhất $\left[\frac{n}{m}\right]$ cá ($\forall a \in \mathbf{R}, [a]$ là phần nguyên giả của a , nghĩa là $[a]$ là số nguyên nhỏ nhất thỏa $[a] \geq a$).

Ví dụ:

a) Trong giảng đường hiện có 367 sinh viên. Có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau (tính từ ngày 1/1 đến ngày 31/12 của mỗi năm).

Số sinh viên (số cá) là $367 > 366 =$ số ao (số ngày sinh nhật có thể có). Dùng nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất 2 sinh viên có cùng ngày sinh nhật.

b) Cho $A \subset S = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ và $|A| \geq 6$.

Chứng minh có $a, b \in A$ thỏa $a + b = 11$.

Mỗi số của A được xem như là một con cá có mã số chính là số đó. Ta có ≥ 6 cá.

Tạo ra 5 ao B, C, D, E và F để thả cá từ tập hợp A với qui định đặc biệt (một cách thả đặc biệt): B chỉ nhận cá có mã số 1 và 10, C chỉ nhận cá có mã số 2 và 9, D chỉ nhận cá có mã số 3 và 8, E chỉ nhận cá có mã số 4 và 7, F chỉ nhận cá có mã số 5 và 6. Số cá $\geq 6 > 5 =$ số ao nên theo nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất một ao nào đó chứa đúng 2 cá (gọi là a và b). Theo qui định đặc biệt, ta có $a + b = 11$.

c) Lớp học có 100 học sinh. Có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ học sinh có tháng sinh giống

nhau và có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{7} \right\rceil = 15$ học sinh có ngày sinh (tính theo thứ) là như nhau.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (KHÔNG LẬP):

2.1/ PHÉP HOÁN VỊ: Cho số nguyên $n \geq 1$.

- Một *phép hoán vị (không lập)* trên n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử.
- Số phép hoán vị trên n phần tử là $P_n = n! = 1.2.3. \dots (n-1).n$

Ví dụ:

- Có $P_3 = 3! = 6$ cách sắp xếp 3 phần tử a, b, c vào 3 vị trí cho trước như sau: abc, acb, cba, bac, bca và cab.
- Có $P_7 = 7! = 5040$ cách sắp xếp 7 người vào một bàn dài có 7 ghế (mỗi ghế chỉ có 1 người ngồi).

2.2/ PHÉP TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP: Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$.

- Một *tổ hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *không quan tâm đến thứ tự chọn*.
- Một *chỉnh hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *có quan tâm đến thứ tự chọn* (hoặc sau khi chọn xong lại tiếp tục xếp m phần tử đã chọn vào m vị trí cho sẵn).
- Số tổ hợp n chọn m là $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.
- Số chỉnh hợp n chọn m là $A_n^m = C_n^m P_m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Ví dụ:

- Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để lập đội văn nghệ. Số cách chọn là $C_{10}^4 = 210$.
- Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để bổ nhiệm làm đội trưởng, đội phó, thư ký và thủ quỹ của một đội công tác xã hội. Số cách chọn là $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4 = 210 \times 24 = 504$
- Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 2. Số dãy số có được là $C_8^3 \times 9^5 = 3.306.744$.
- Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có các chữ số 1, 4, 9 (mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần) và các chữ số còn lại thì khác nhau từng đôi một. Số dãy số có được là $A_8^3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 846.720$.
- Có bao nhiêu dãy số gồm 9 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau hay có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau?
Ta giải bài toán này bằng nguyên lý bù trừ.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau là 7.9^6
 Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là 6.9^5
 Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau và có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là $A_4^2 \times 8^2 = 12 \times 64 = 768$.
 Số dãy số cần tìm là $(7.9^6 + 6.9^5) - 768 = 69.9^5 - 768 = 4.073.613$

2.3/ TÍNH CHẤT: Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$. Khi đó

- $C_n^m = C_n^{n-m}$ (sự đối xứng ở hai cực)
- $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- Khi $m \geq 1$ thì $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ (hạ chỉ số dưới)

Ví dụ:

- $C_7^0 = C_7^7 = 1$, $C_7^1 = C_7^6 = 7$, $C_7^2 = C_7^5 = 21$ và $C_7^3 = C_7^4 = 35$.
- $C_9^5 = C_8^5 + C_8^4 = (C_7^5 + C_7^4) + (C_7^4 + C_7^3)$

2.4/ NHỊ THỨC NEWTON: Cho số nguyên $n \geq 1$ và các số thực x, y . Ta có

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i} \quad (\text{số mũ của } x \text{ tăng dần và số mũ của } y \text{ giảm dần})$$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i \quad (\text{số mũ của } x \text{ giảm dần và số mũ của } y \text{ tăng dần})$$

Ví dụ:

$$(x + y)^6 = \sum_{i=0}^6 C_6^i x^i y^{6-i} = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$$

$$= \sum_{i=0}^6 C_6^i x^{6-i} y^i = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

2.5/ HÊ QUẢ: Cho số nguyên $n \geq 1$. Ta có

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = [(-1) + 1]^n = 0$.
- Suy ra $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$.

III. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (CÓ LẮP):

3.1/ PHÉP HOÁN VỊ LẮP: Cho các số nguyên dương k, n_1, n_2, \dots và n_k .

Có k loại vật khác nhau, loại thứ j có n_j vật giống hệt nhau ($1 \leq j \leq k$).

Tổng số vật là $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

- Một phép hoán vị lắp trên n phần tử nói trên là một cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử và không phân biệt các vật cùng loại.

- Số phép hoán vị lắp trên n phần tử nói trên là

$$P_n^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Ví dụ: Từ các chữ số 8, 1, 1, 9, 9, 4, 4, 4, ta có thể tạo ra bao nhiêu số điện thoại khác nhau gồm 8 chữ số (chẳng hạn như số điện thoại 41948149, ...) ?
 Đây là phép đếm số hoán vị lặp trên $n = 8$ phần tử với $k = 4$ loại vật, mỗi loại vật là một loại chữ số và số vật của mỗi loại là $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 2, n_4 = 3$.
 Kết quả cần tìm là $P_8^*(1, 2, 2, 3) = \frac{8!}{1!2!2!3!} = 1680$.

3.2/ ÁP DỤNG: Cho các số nguyên $n \geq 1, k \geq 2$ và các số thực x_1, x_2, \dots, x_k .
 Ta có khai triển đa thức Newton nhiều biến (mở rộng nhị thức Newton) :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \\ n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0}} P_n^*(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

$$\text{trong đó } P_n^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Ví dụ: Tìm hệ số của đơn thức $x^4 y^5 z^3 u$ trong khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$.

a) Cách 1: dùng nhị thức Newton nhiều lần liên tiếp.

$$\begin{aligned} (9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} &= C_{13}^4 (9x)^4 (-2y + 5z - 8t + u)^9 + \dots = \\ &= 9^4 C_{13}^4 x^4 [C_9^5 (-2y)^5 (5z - 8t + u)^4] + \dots = -2^5 9^4 C_{13}^4 C_9^5 x^4 y^5 [C_4^3 (5z)^3 (-8t + u)] + \dots \\ &= -2^5 5^3 9^4 C_{13}^4 C_9^5 C_4^3 (x^4 y^5 z^3 u) + \dots = -32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4 (x^4 y^5 z^3 u) + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Hệ số cần tìm là } -32 \times 125 \times 6561 \times 715 \times 126 \times 4 = -9.457.287.840.000$$

b) Cách 2: dùng trực tiếp đa thức Newton. Đặt $a = 9x, b = -2y, c = 5z$ và $d = -8t$.

$$\begin{aligned} (9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} &= (a + b + c + d + u)^{13} = P_{13}^*(4, 5, 3, 0, 1) a^4 b^5 c^3 d^0 u^1 + \dots = \\ &= \frac{13!}{4!5!3!0!1!} (9x)^4 (-2y)^5 (5z)^3 (-8t)^0 u^1 + \dots = -2^8 3^{10} 5^4 7^1 11^1 13^1 (x^4 y^5 z^3 u) + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Hệ số cần tìm là } -2^8 3^{10} 5^4 7^1 11^1 13^1 = -9.457.287.840.000$$

3.3/ PHÉP TỔ HỢP LẶP: Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.

Có k loại vật khác nhau, mỗi loại vật có nhiều vật giống hệt nhau.

a) Một tổ hợp lặp k loại vật chọn m là một cách chọn ra m vật từ k loại vật nói trên sao cho mỗi loại vật được chọn một số lần tùy ý không quá m và không phân biệt các vật cùng loại.

b) Số tổ hợp lặp k loại vật chọn m là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)} = C_{m+(k-1)}^m$

Ví dụ: An đến siêu thị mua 15 cái mũ. Siêu thị bán 4 loại mũ (cùng kiểu dáng, chất lượng và giá cả) có các màu trắng, xanh, đen và nâu. Hỏi An có bao nhiêu cách mua mũ (theo màu sắc) ?

Mỗi cách mua mũ là một tổ hợp lặp 4 loại vật chọn ra 15 vật.

$$\text{Số cách mua mũ là } K_4^{15} = C_{15+(4-1)}^{(4-1)} = C_{18}^3 = 816.$$

3.4/ ÁP DỤNG: Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.

Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$ (các ẩn số x_1, x_2, \dots và x_k là các số nguyên ≥ 0).

Mỗi nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên chính là một cách chọn ra m vật từ k loại vật, mỗi giá trị x_j là số vật loại thứ j được chọn ($1 \leq j \leq k$).

Do đó số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình cũng là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)}$.

Ví dụ:

a) Xếp tùy ý 20 viên bi (y hệt nhau) vào 4 cái hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

Gọi x_j là số bi xếp vào hộp thứ j ($1 \leq j \leq 4$) thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ và x_1, x_2, x_3 và x_4 nguyên ≥ 0 . Số cách xếp = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên) = $K_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

b) Khi khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?

$$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = \sum_{\substack{p+q+r+s+n=13 \\ p,q,r,s,n \geq 0}} c(p,q,r,s,n) x^p y^q z^r t^s u^n \text{ với } c(p,q,r,s,n) \in \mathbf{R}.$$

Mỗi đơn thức $c(p, q, r, s, n) x^p y^q z^r t^s u^n$ tương ứng với một bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) . Mỗi bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) chính là một nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$. Do đó số đơn thức xuất hiện = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$) = $K_5^{13} = C_{17}^4 = 2380$.

c) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t + u = 17$ trong đó

$x \geq 2, y \geq 0, z \geq -3, t \geq 0$ và $u \geq 4$ (*).

Đổi biến $x' = (x - 2) \geq 0, z' = (z + 3) \geq 0$ và $u' = (u - 4) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y + z' + t + u' = 14$ với x', y, z', t, u' đều nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{14} = C_{18}^4 = 3060$.

d) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z = 21$ trong đó $x > -4, y > 5$ và $2 \leq z < 7$ (*). Do x, y nguyên nên $(x > -4 \Leftrightarrow x \geq -3)$ và $(y > 5 \Leftrightarrow y \geq 6)$.

Đổi biến $x' = (x + 3) \geq 0, y' = (y - 6) \geq 0$ và $z' = (z - 2) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' < 5$ (**).

Xét phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 (I) và

phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' \geq 5$ (II).

Đổi biến $z'' = (z - 5) \geq 0$, (II) tương đương với phương trình $x' + y' + z'' = 11$ với x', y', z'' đều nguyên ≥ 0 (III).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên của (**) =

= Số nghiệm của (I) - số nghiệm của (II) =

= Số nghiệm của (I) - số nghiệm của (III) = $K_3^{16} - K_3^{11} = C_{18}^2 - C_{13}^2 = 153 - 78 = 75$

e) Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của bất phương trình $x + y + z \leq 19$ (*).

Đặt $t = 19 - (x + y + z)$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t = 19$ với x, y, z, t đều nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_4^{19} = C_{22}^3 = 1540$

f) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z + t > -20$ trong đó $x < 1, y \leq 4, z \leq -3$ và $t < 6$ (*).

Đổi biến $x' = -x \geq 0, y' = -y \geq -4, z' = -z \geq 3$ và $t' = -t \geq -5$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y' + z' + t' \leq 19$. Đổi biến $y'' = (y' + 4) \geq 0,$

$z'' = (z' - 3) \geq 0$ và $t'' = (t' + 5) \geq 0$, ta có bất phương trình tương đương

$x' + y'' + z'' + t'' \leq 25$. Đặt $u = 25 - (x' + y'' + z'' + t'')$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t + u = 25$ với x, y, z, t, u đều nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{25} = C_{29}^4 = 23.751$