



Nguyễn Thành Nhựt

TOÁN RỜI RẠC

<https://sites.google.com/site/nhutclass/toanroirac>

Nội dung: gồm 5 phần

1. Cơ sở logic
2. Quan hệ
3. Phép đếm
4. Hàm Bool
5. Đồ thị

Thang điểm

- ❖ Sửa bài tập 30%
- ❖ Kiểm tra giữa kỳ 20%
- ❖ Thi cuối kỳ 50%

Tài liệu

1. Slides bài giảng.

2. Giáo trình:

1. Toán rời rạc, Nguyễn Hữu Anh.
2. Toán rời rạc nâng cao, Trần Ngọc Danh.
3. Discrete Mathematics and its applications, Kenneth H. Rosen.

Chương I: Cơ sở logic

Nội dung:

- Mệnh đề
- Dạng mệnh đề
- Quy tắc suy diễn
- Vị từ, lượng từ
- Quy nạp toán học

I. Mệnh đề

1. **Định nghĩa:** **Mệnh đề** là một khẳng định có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.

Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh... không là mệnh đề.

Ví dụ:

- Mặt trời quay quanh trái đất.
- $1+1 = 2$.
- Hôm nay trời đẹp quá! (không là mệnh đề)
- Học bài đi! (không là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (không là mệnh đề)

I. Mệnh đề

Ký hiệu: người ta dùng các ký hiệu P, Q, R, \dots để chỉ mệnh đề.

Chân trị của mệnh đề:

Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị **đúng**, ngược lại ta nói P có chân trị **sai**.

Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là **1** (hay Đ,T) và **0** (hay S,F)

Bài tập làm ngay

Kiểm tra các khẳng định sau có phải là mệnh đề không?

- Paris là thành phố của Mỹ.
- π là số tự nhiên.
- con nhà ai mà xinh thế!
- 3 là số nguyên tố.
- Toán rời rạc là môn bắt buộc của ngành Tin học.
- Bạn có khỏe không?
- $x^2 + 1$ luôn dương.

I. Mệnh đề

2. **Phân loại:** gồm 2 loại

- a. **Mệnh đề sơ cấp** (nguyên thủy): thường là một mệnh đề khẳng định đơn.
- b. **Mệnh đề phức hợp:** là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề sơ cấp nhờ liên kết bằng các liên từ (**và, hay, khi và chỉ khi,...**) hoặc trạng từ **“không”**.

Ví dụ:

- 2 **không** là số nguyên tố
- 2 là số nguyên tố (**sơ cấp**)
- **Nếu** $3 > 4$ **thì** trời mưa
- An đang xem phim **hay** An đang học bài
- Hôm nay trời đẹp **và** $1 + 1 = 3$

I. Mệnh đề

3. Các phép toán: có 5 phép toán

a. **Phép phủ định**: phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là $\neg P$ hay \overline{P} (đọc là "không" P hay "phủ định của" P).

Bảng chân trị :

P	$\neg P$
1	0
0	1

Ví dụ :

+ 2 là số nguyên tố

Phủ định: 2 **không** là số nguyên tố

+ $1 > 2$

Phủ định : $1 \leq 2$

I. Mệnh đề

b. **Phép nối liền** (hội, giao): của hai mệnh đề P , Q được kí hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là “**P và Q**”), là mệnh đề được định bởi : $P \wedge Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

Bảng chân trị

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ví dụ:

- $3 > 4$ và Trần Hưng Đạo là một vị tướng
- 2 là số nguyên tố và 2 là số chẵn
- An đang hát và uống nước

I. Mệnh đề

c. **Phép nối rời** (tuyển, hợp): của hai mệnh đề P , Q được kí hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là “ **P hay Q** ”), là mệnh đề được định bởi : $P \vee Q$ sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ví dụ:

- $\pi > 4$ hay $\pi > 5$
- 2 là số nguyên tố hay 2 là số chẵn

I. Mệnh đề

Ví dụ

- “Hôm nay, An giúp mẹ lau nhà và rửa chén”
- “Hôm nay, cô ấy đẹp và thông minh ”
- “Ba đang đọc báo hay xem phim”

I. Mệnh đề

- d. **Phép kéo theo**: Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q , ký hiệu bởi $P \rightarrow Q$ (đọc là “ P kéo theo Q ” hay “Nếu P thì Q ” hay “ P là điều kiện đủ của Q ” hay “ Q là điều kiện cần của P ”) là mệnh đề được định bởi:
 $P \rightarrow Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:

- Nếu $1 = 2$ thì Lenin là người Việt Nam
- Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì $1 + 3 = 5$
- $\pi > 4$ kéo theo $5 > 6$
- $\pi < 4$ thì trời mưa
- Nếu $2 + 1 = 0$ thì tôi là chủ tịch nước

I. Mệnh đề

e. **Phép kéo theo hai chiều:** Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q , ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ (đọc là “ P nếu và chỉ nếu Q ” hay “ P khi và chỉ khi Q ” hay “ P là điều kiện cần và đủ của Q ” hay “ P tương đương với Q ”), là mệnh đề xác định bởi:

$P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:

- $2=4$ khi và chỉ khi $2+1=0$
- 6 chia hết cho 3 khi và chỉ khi 6 chia hết cho 2
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN
- $\pi > 4$ là điều kiện cần và đủ của $5 > 6$

Bài tập

❖ Tại lớp: 1, 2, 4ab, 5

❖ Về nhà: 3, 4cde, 6, 7, 8, 9

II. Dạng mệnh đề

1. Định nghĩa: Dạng mệnh đề là một biểu thức được cấu tạo từ:

- Các hằng mệnh đề
- Các biến mệnh đề p, q, r, \dots , tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc $()$.

Dạng mệnh đề được gọi là **hằng đúng** nếu nó luôn lấy giá trị **1**

Dạng mệnh đề gọi là **hằng sai** (hay mâu thuẫn) nếu nó luôn lấy giá trị **0**.

Ví dụ:

$$E(p,q) = \neg(\neg p \wedge q)$$

$$F(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge \neg(q \wedge r)$$

II. Dạng mệnh đề

Bảng chân trị của dạng mệnh đề $E(p,q,r)$: là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r .

Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Ví dụ:

$E(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow r$. Ta có bảng chân trị sau

II. Dạng mệnh đề

Mệnh đề $E(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow r$ theo 3 biến p,q,r có bảng chân trị sau

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

II. Dạng mệnh đề

Bài tập: Lập bảng chân trị của những dạng mệnh đề sau

$$E(p,q) = \neg(p \wedge q) \wedge p$$

$$F(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q$$

Độ ưu tiên các phép toán

1. Ngoặc ()
2. Phủ định
3. Và
4. Hay
5. Kéo theo \rightarrow
6. Kéo theo hai chiều

❖ Ví dụ:

- $p \vee q \rightarrow r$ hiểu là $(p \vee q) \rightarrow r$
- $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q$ hiểu là $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow (\neg q)$

Bài tập

❖ **Tại lớp: 11ab, 12ab, 13abc**

❖ **Về nhà: 10, 11, 12, 13**

TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

II.2 Tương đương logic

Định nghĩa: Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu $E \Leftrightarrow F$ (hay $E \equiv F$).

Ví dụ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Định lý: Hai dạng mệnh đề E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là hằng đúng.

Tương đương logic

Các luật logic

1. Phủ định của phủ định

$$\neg \neg p \Leftrightarrow p$$

2. Luật De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

3. Luật giao hoán

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

4. Luật kết hợp

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Tương đương logic

5. Luật phân phối

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. Luật lũy đẳng

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

7. Luật trung hòa

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

Tương đương logic

8. Luật về phần tử bù

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

9. Luật thống trị

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

10. Luật hấp thụ

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

Tương đương logic

11. Luật về phép kéo theo:

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p \end{aligned}$$

Ví dụ: Nếu trời mưa thì đường trơn \Leftrightarrow nếu đường không trơn thì trời không mưa

Bài tập:

Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

Giải

$$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (luật 11. về phép kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \text{ (luật phân phối)}$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \text{ (De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee r \text{ (luật 11. về phép kéo theo)}$$

$$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ (luật 11. về phép kéo theo)}$$

Phép chứng minh đảo đề

❖ Ứng dụng luật về phép kéo theo

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- Để CM $p \rightarrow q$ đúng, ta CM $\neg q \rightarrow \neg p$ đúng.

❖ Ví dụ:

- Cho n là số tự nhiên. CM nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.
- Ta CM nếu n là số lẻ thì n^2 là số lẻ.

Phép chứng minh phản ví dụ

❖ Ứng dụng luật về phép kéo theo kết hợp luật De Morgan

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $\neg (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
- Để CM $p \rightarrow q$ sai, ta CM p đúng, q sai.
- “Phản ví dụ” = “trường hợp làm MĐ sai”

❖ Ví dụ:

- Cho n là số tự nhiên. “Nếu n^2 chia hết cho 4 thì n cũng chia hết cho 4”.
- Để CM phát biểu trên sai ta tìm 1 số n nào đó không thoả. (chẳng hạn $n = 6$).

Phép chứng minh phản chứng

❖ Để CM p đúng ta CM nếu p sai thì suy ra điều vô lý hay mâu thuẫn.

❖ VD:

- CM căn bậc hai của 2 là số vô tỷ.

❖ Giải:

- Giả sử căn 2 là số hữu tỷ, tức là $2^{1/2} = m/n$ (dạng tối giản) với m, n là các số nguyên và $\text{UCLN}(m, n) = 1$.
- $(m/n)^2 = 2$. Hay $m^2 = 2n^2$. Nên m chẵn
- Khi đó $m = 2k$. Suy ra $n^2 = 2k^2$. Nên n cũng chẵn.
- Như vậy $\text{UCLN}(m, n) > 1$ (mâu thuẫn).

Bài tập

❖ **Tại lớp: 14a, 15a, 16ab**

❖ **Về nhà: 14b**

Bài tập về nhà

- 1. Đọc lại slide bài giảng và chương liên quan trong giáo trình [1], [3].**
- 2. Làm bài tập liên quan còn lại trong giáo trình**