

HỆ QUẢ LOGIC

Hệ quả logic

Định nghĩa: F được gọi là **hệ quả logic** của E nếu $E \rightarrow F$ là hằng đúng.

Ký hiệu $E \Rightarrow F$

Ví dụ: $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$

Trong phép tính mệnh đề người ta không phân biệt những mệnh đề tương đương logic với nhau. Do đó đối với những dạng mệnh đề có công thức phức tạp, ta thường biến đổi để nó tương đương với những mệnh đề đơn giản hơn.

Để thực hiện các phép biến đổi ta sử dụng qui tắc thay thế và quy luật logic.

Hệ quả logic

Qui tắc thay thế: Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.

Ví dụ. $\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$

Qui tắc suy diễn

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p, q, r \dots$ (tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là **kết luận**.

Nói cách khác, dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh:
 $(p \wedge q \wedge r \wedge \dots)$ có hệ quả logic là h

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \dots \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Các qui tắc suy diễn

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens)

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[p \rightarrow q \wedge p] \Rightarrow q$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

Ví dụ

- Nếu An học chăm thì An học tốt.
- Mà An học chăm

Suy ra An học tốt.

- Trời mưa thì đường ướt.
- Mà chiều nay trời mưa.

Suy ra Chiều nay đường ướt.

2. Quy tắc phủ định

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[p \rightarrow q \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

❖ Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\therefore \neg p}$$

Ví dụ

Nếu An đi học đầy đủ thì An đậu toán rời rạc.
An không đậu toán rời rạc.

Suy ra: An không đi học đầy đủ

3. Qui tắc tam đoạn luận

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r \right] \Rightarrow p \rightarrow r$$

❖ Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$$

Ví dụ

- Nếu trời mưa thì đường ướt.
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra nếu trời mưa thì đường trơn.

- Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
- Cái gì hiếm thì đắt

Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt (☺)

4. Qui tắc tam đoạn luận rời

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[p \vee q \wedge \neg q] \rightarrow p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ý nghĩa của qui tắc: nếu một trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp không xảy ra thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ xảy ra.

Ví dụ

Chủ nhật, An thường lên thư viện hoặc về quê
Chủ nhật này, An không về quê

Suy ra: Chủ nhật này, An lên thư viện

5. Quy tắc nối liền

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$$

Ví dụ

Hôm nay An học bài.

Hôm nay An phụ mẹ nấu ăn.

Suy ra: Hôm nay An học bài và phụ mẹ nấu ăn.

6. Quy tắc đơn giản

Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Ví dụ

Hôm nay An đi học Toán rồi rạc và học Anh văn.

Suy ra: Hôm nay An học Toán rồi rạc.

7. Qui tắc mâu thuẫn

(chứng minh bằng phản chứng)

Ta có tương đương logic

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow h] \Leftrightarrow [p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \neg h \rightarrow 0]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng ta chứng minh nếu thêm phủ định của h vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn.

Ví dụ. Cho a, b, c là 3 đường thẳng phân biệt và $a \parallel c$ và $b \parallel c$ chứng minh $a \parallel b$.

7. Quy tắc mâu thuẫn

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow h] \Leftrightarrow [p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \neg h \rightarrow 0]$$

Dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \\ \hline \vdots h \end{array}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \\ \hline \neg h \\ \hline \vdots 0 \end{array}$$

7. Quy tắc mâu thuẫn

Hãy chứng minh:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \rightarrow s \end{array}$$

Cm bằng phản chứng.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \neg r \\ \neg s \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

8. Quy tắc chứng minh theo trường hợp

Dựa trên hằng đúng:

$$\left[p \rightarrow r \wedge q \rightarrow r \right] \rightarrow \left[p \vee q \rightarrow r \right]$$

Ý nghĩa: nếu p suy ra r và q suy ra r thì p hay q cũng có thể suy ra r .

- Chứng minh rằng:

$$(n^3 - 4n) : 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

9. Phản ví dụ

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$$

không là một hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Suy luận sau có đúng ko?

Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe.

Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc.

Nhưng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

Giải

p: ông Minh được tăng lương.

q: ông Minh nghỉ việc.

r: vợ ông Minh mất việc.

s: gia đình phải bán xe.

t: vợ ông hay đi làm trễ.

Suy luận trên không đúng

Phản ví dụ

s=0

t=1

p=1

q=0

r=1

$$\neg p \rightarrow q$$

$$q \wedge r \rightarrow s$$

$$t \rightarrow r$$

$$\frac{p}{\therefore \neg s \rightarrow \neg t}$$

Ví dụ

Chứng minh suy luận sau:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \vee s$$

$$t \rightarrow q$$

$$\overline{s}$$

$$\hline \therefore \overline{r} \rightarrow \overline{t}$$

Áp dụng các Quy tắc suy diễn

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p \vee s$$

$$t \rightarrow q$$

—

s

$$\therefore \overline{r} \rightarrow \overline{t}$$

$$\frac{p \vee s \quad \overline{s}}{\therefore p}$$

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad p}{\therefore q \rightarrow r}$$

$$\frac{t \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore t \rightarrow r}$$

Theo luật logic, ta có

$$t \rightarrow r \Leftrightarrow \overline{r} \rightarrow \overline{t}$$

Ví dụ khác

Kiểm tra suy luận sau:

$$p \rightarrow q$$

$$\bar{r} \vee s$$

$$p \vee r$$

$$\hline \therefore \bar{q} \rightarrow s$$

CM bằng phản chứng

Ta có:

- 1) Giả sử $\overline{q} \rightarrow s$ (Giả thiết phản chứng)
- 2) $\overline{q} \wedge \overline{s}$ (Luật phủ định De Morgan)
- 3) \overline{q} và \overline{s} (Luật đơn giản)
- 4) $p \rightarrow q$ (Tiền đề)
- 5) \overline{p} (Qui tắc phủ định)

Áp dụng các qui Tắc Suy Diễn

- 6) $\bar{r} \vee s$ (Tiền đề)
 - 7) \bar{r} (Từ 3, 6, do tam đoạn luận rời)
 - 8) $\bar{p} \wedge \bar{r}$ (Định nghĩa phép nối liền)
 - 9) $\overline{p \vee r}$ (Luật phủ định De Morgan)
 - 10) $p \vee r$ (Tiền đề)
 - 11) $\mathbf{0}$ (Luật phần tử bù)
- \therefore Suy luận trên là đúng (Qui tắc phản chứng).

Ví dụ khác

Kiểm tra suy luận sau:

$$p$$
$$p \rightarrow r$$
$$p \rightarrow (q \vee \bar{r})$$
$$\bar{q} \vee \bar{s}$$

$$\therefore s$$

Giải

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \bar{r}) \\ \bar{q} \vee \bar{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Suy luận đã cho là sai.

Phản ví dụ:

$$p = q = r = 1, s = 0.$$

Bài tập

❖ **Tại lớp: 17a, 19a, 20a, 21a, 22a, 23a, 24, 27a, 28a, 29a, 30a**

❖ **Về nhà: còn lại**