LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Định nghĩa Tập hợp

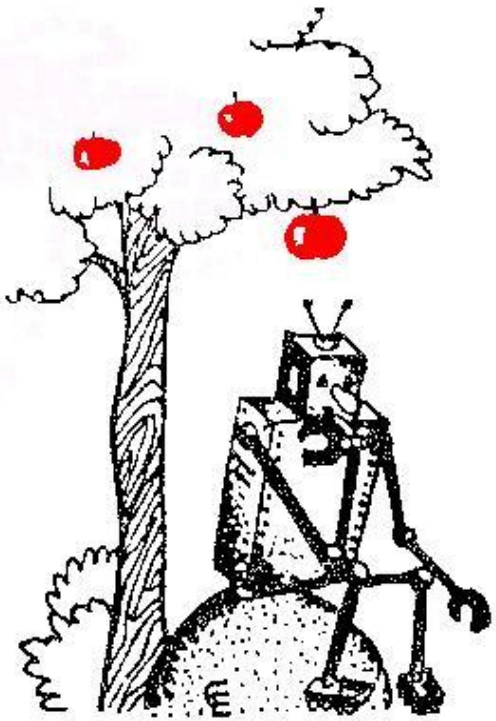
1. Khái niệm

- **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của Toán học.
- Ví dụ:

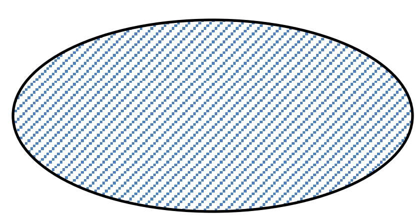
  1) Tập hợp sinh viên của một trường đại học.

  2) Tập hợp các số nguyên

  3) Tập hợp các trái táo trên một cây cụ thể.



- **Sơ đồ Ven**:



Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa

Số phần tử của tập hợp A được gọi là ***lực lượng của tập hợp***, kí hiệu **|A|**.

Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A ***hữu hạn***.

Ngược lại, ta nói A ***vô hạn***.

Ví dụ.

N, **Z**, **R**, là các tập vô hạn

X = {1, 3, 4, 5} là tập hữu hạn |X|=4

Cách xác định tập hợp

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

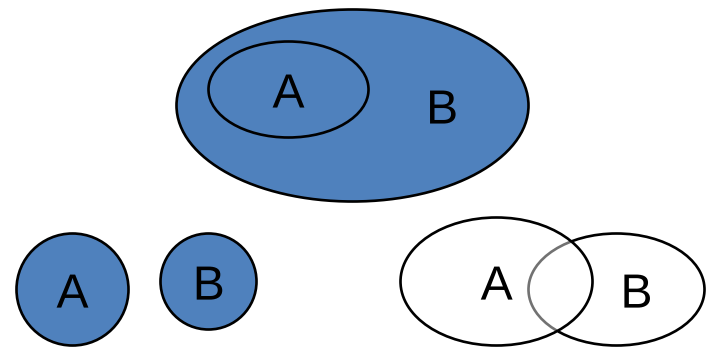
  $A=\{1,2,3,4,a,b\}$

- Đưa ra tính chất đặc trưng

  $B=\{ n \in N \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$

Quan hệ giữa các tập hợp

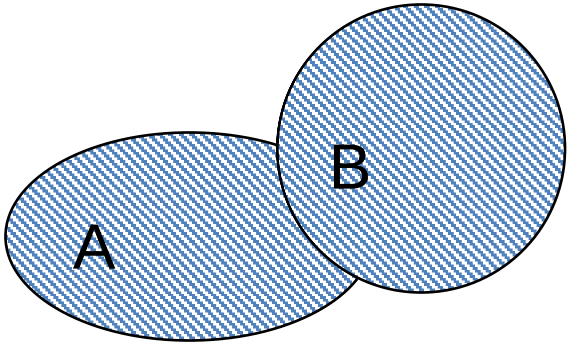
- Tập hợp con
  - A là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B. Ký hiệu: A □ B.



- Hai tập hợp bằng nhau
  - A = B nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B và ngược lại.

2. Các phép toán tập hợp

- **a. Phép hợp**
  - **Hợp** của tập A và tập B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.



$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

  - Ký hiệu: $A \cup B$
  - Ví dụ:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{c, d, e, f\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Tính chất phép hợp

1. Tính lũy đẳng $A \cup A = A$

2. Tính giao hoán $A \cup B = B \cup A$

3. Tính kết hợp $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

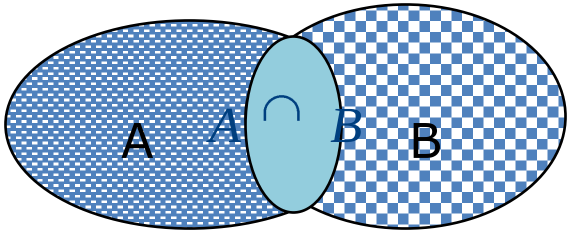
4. Hợp với tập rỗng $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$

Phép giao

- ***Giao*** của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

- Ký hiệu: $A \cap B$



- Tính chất:
  1) Tính lũy đẳng $A \cap A = A$
  2) Tính giao hoán $A \cap B = B \cap A$
  3) Tính kết hợp $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  4) Giao với tập rỗng $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$

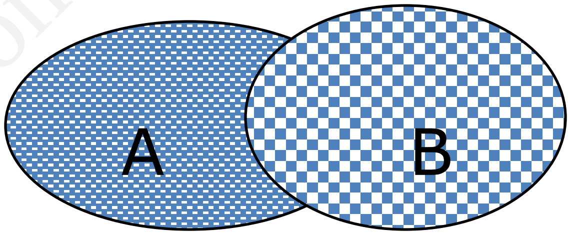
<u>Tính phân phối của phép giao và hợp</u>

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hiệu của hai tập hợp

- **ĐN:**
  - Hiệu của hai tập hợp là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc tập này mà không thuộc tập kia



$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

  - Ký hiệu A\B

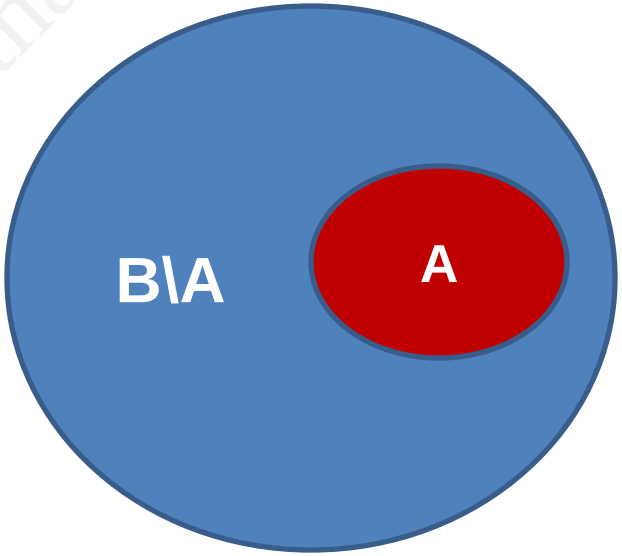
⊕Luật De Morgan:

$$1)\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2)\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Tập bù

- Nếu A là con của B thì B\A được gọi là tập bù của A trong B.



Tập các tập con của một tập hợp

ĐN: Cho X là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của X được ký hiệu là P(X)

Ví dụ

$$X = \{a, b\}$$

$$P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}, \; P(Y) = ?$$

$$|X| = n \longrightarrow |P(X)| = ?$$

Tích Đề Các

ĐN: Tích Đề các của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp bao gồm tất cả các cặp thứ tự (x,y) với $x \in A,\ y \in B$

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

– Ký hiệu A.B hoặc $A \times B$

– Chú ý: Tích của 2 tập hợp không có tính chất giao hoán.

$$|A \times B| = ?$$

Mở rộng các phép toán cho nhiều tập hợp

Các phép toán giao, hợp, tích có thể mở rộng cho nhiều tập hợp

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = (x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I,\ x_i \in A_i$$

Bài tập

- Tại lớp: 1, 2, 3, 4, 5, 6ab, 7ab, 8ab, 9ab, 10ab, 11ab, 12a, 14, 15a

- Về nhà: còn lại.

ÁNH XẠ

Khái niệm

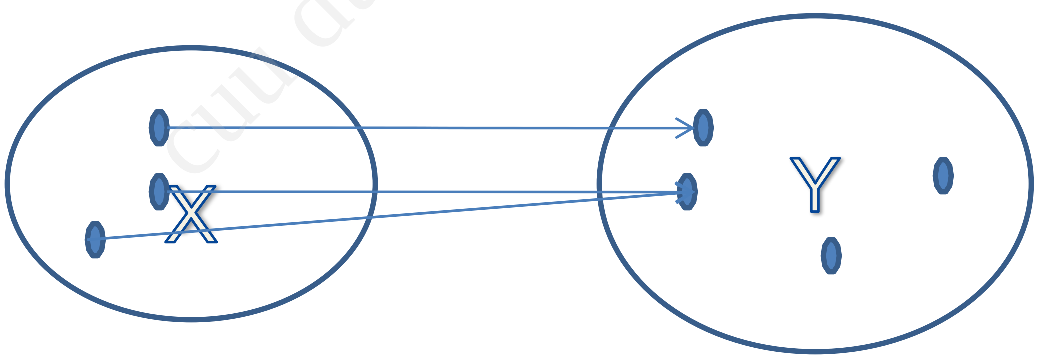
1. Định nghĩa. Cho hai tập hợp X, Y $\neq \varnothing$. Ánh xạ giữa hai tập X và *Y* là một qui tắc f sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để *y* = *f*(*x*)

Ta viết:

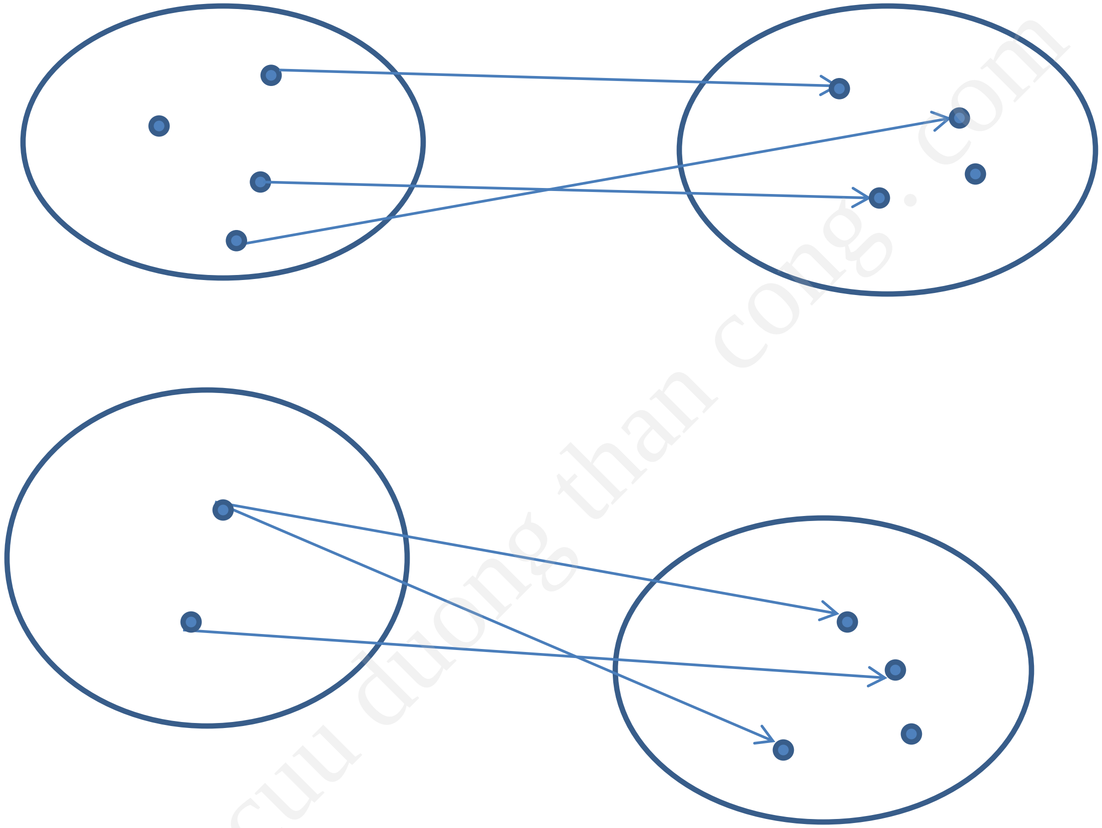
$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y : y = f(x)$



Ví dụ



Cả hai đều Không là ánh xạ

Ánh xạ bằng nhau

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là *bằng nhau* nếu $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

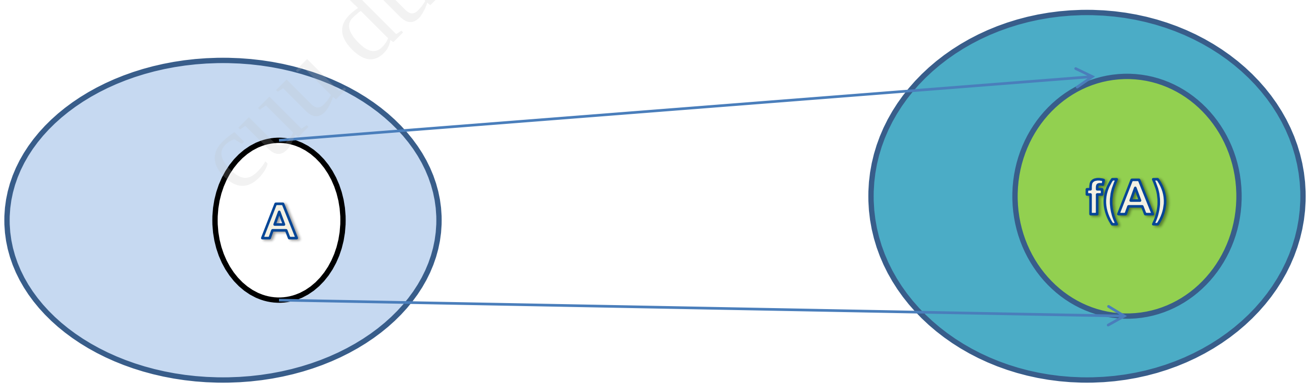
Ví dụ: Xét ánh xạ $f(x)=(x-1)(x+1)$ và $g(x) =x^2-1$ từ R->R

Ta có $(x-1)(x+1) = x^2 – 1$ nên $f(x) = g(x)$ $\forall x \in R$

Vậy hai ánh xạ này bằng nhau.

Ảnh và ảnh ngược

- Cho ánh xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa:
- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là **ảnh** của A



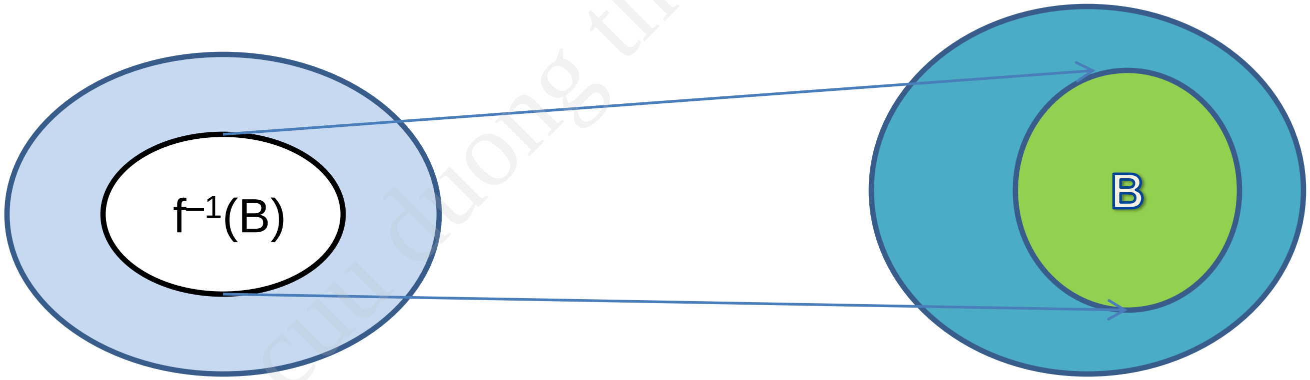
Ảnh và ảnh ngược

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

Như vậy $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$;

$y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ảnh ngược của B



Như vậy $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Ví dụ ảnh và ảnh ngược

Ví dụ. Cho f: **R** $\to$**R** được xác định $f(x)=x^2 +1$

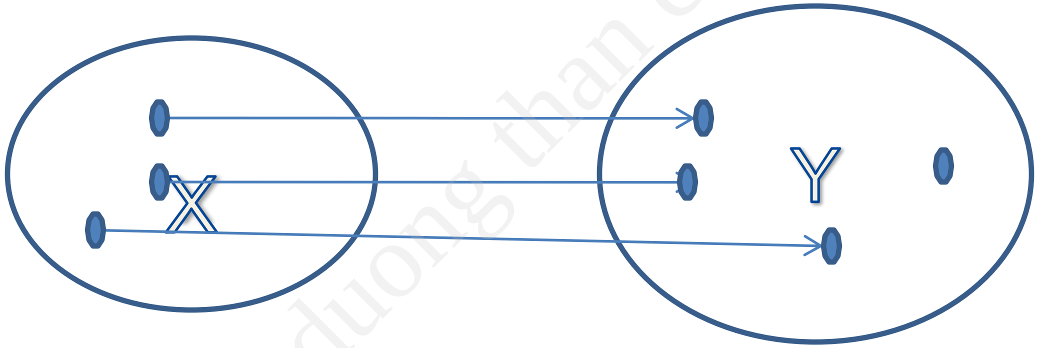
Ta có

$f([1,3])=[2,10]$
$f([-2,-1])=[2,5]$
$f([-1,3])=[1,10]$
$f((1,5)) = (2,26)$

$f^{-1}(1)=\{0\}$
$f^{-1}(2)=\{-1,1\}$
$f^{-1}(-5)= \varnothing$
$f^{-1}([2,5])= [-2,-1] \cup[1,2]$

Phân loại ánh xạ

a. ***Đơn ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:



Ví dụ. Cho f: **N** →**R** được xác định $f(x)=x^2+1$ (là đơn ánh)

g: **R** →**R** được xác định $g(x)=x^2+1$ (không đơn ánh)

Cách CM ánh xạ f là đơn ánh

$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Như vậy $f : X \to Y$ là một đơn ánh

$\Leftrightarrow$ ($\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).

$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ có nhiều nhất một phần tử).

$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nhiều nhất một nghiệm $x \in X$.

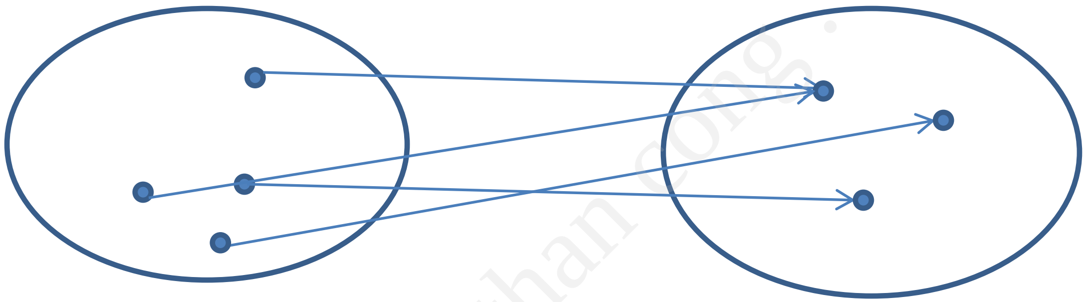
$f : X \to Y$ không là một đơn ánh

$\Leftrightarrow$ ($\exists x, x' \in X, x \neq x'$ và $f(x) = f(x')$).

$\Leftrightarrow$ ($\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có ít nhất hai nghiệm $x \in X$

Toàn ánh

b. ***Toàn ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***toàn ánh*** f(X)=Y, nghĩa là:



Ví dụ. Cho f: R →R được xác định $f(x)=x^3+1$ (là toàn ánh)

g: R →R được xác định $g(x)=x^{2}+1$ (không là toàn ánh)

Cách CM ánh xạ f là toàn ánh

Toàn ánh $\Leftrightarrow$ f(X)=Y. Như vậy

$f : X \to Y$ là một toàn ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset)$;

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nghiệm $x \in X$.

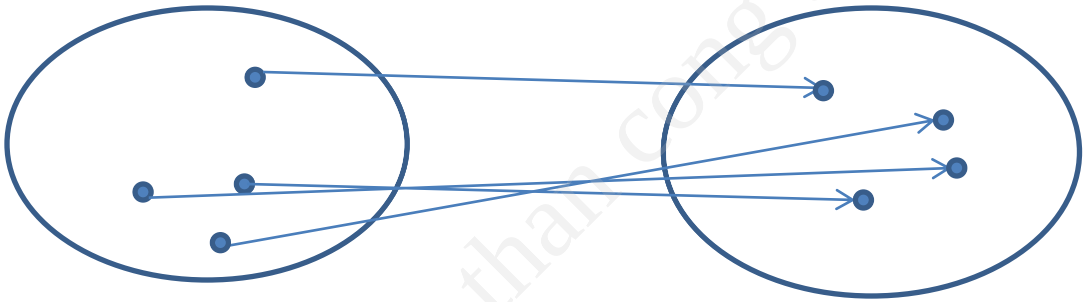
$f : X \to Y$ không là một toàn ánh

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x))$;

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset)$;

Song ánh

c. ***Song ánh*** Ta nói $f : X \rightarrow Y$ là một ***song ánh*** nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.



Ví dụ. Cho f: $R \rightarrow R$ được xác định $f(x)=x^3 +1$ (là song ánh)

g: $R \rightarrow R$ được xác định $g(x)=x^2 +1$ (không là song ánh)

Tính chất của song ánh

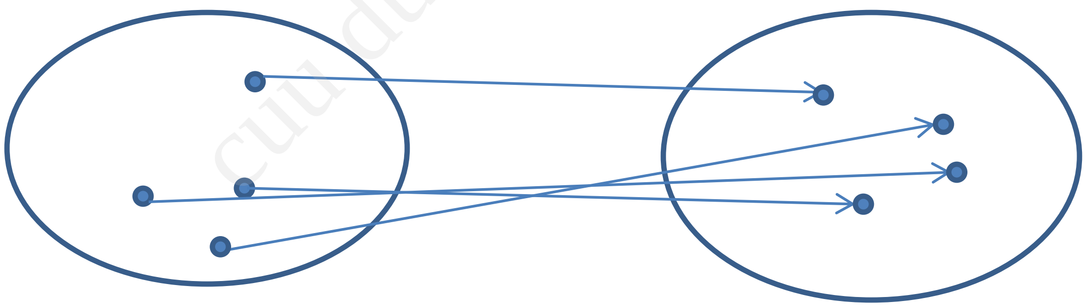
Tính chất.

$f : X \to Y$ là một song ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x))$;

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử);

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm $x \in X$.



Ánh xạ ngược

Ánh xạ ngược.

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ***ánh xạ ngược*** của f và ký hiệu f^{-1}. Như vậy:

$f^{-1} : Y \to X$

$y \mapsto f^{-1}(y) = x$ với $f(x) = y$.

Ví dụ. Cho f là ánh xạ từ R vào R $f(x) = 2x+1$.

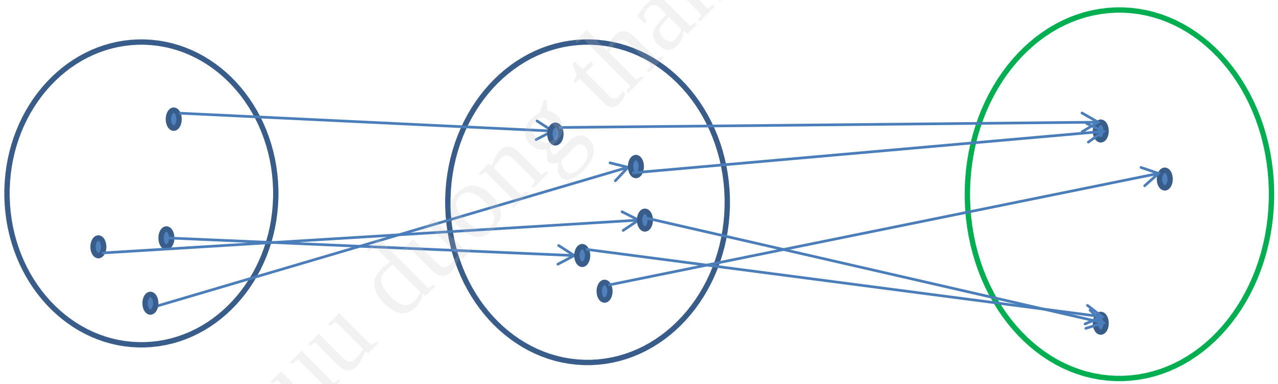
Khi đó $f^{-1}(y)=(y-1)/2$

Ánh xạ hợp

3. Ánh xạ hợp. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y' \to Z$ trong đó $Y \subset Y'$. *Ánh xạ hợp* h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi: $h : X \to Z$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$

Ta viết: $h = g \circ f : X \to Y \to Z$



Ví dụ ánh xạ hợp

Ví dụ. Tìm $g_{o}f$, $f_{o}g$

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \quad x > 0 \\ x+1 & if \quad x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = 2x + 1$$

Bài tập

- Tại lớp: 16ab, 17a, 18a, 21a, 23ab,24, 29a
- Về nhà: còn lại đến bài 30.