

Chương 3

QUAN HỆ

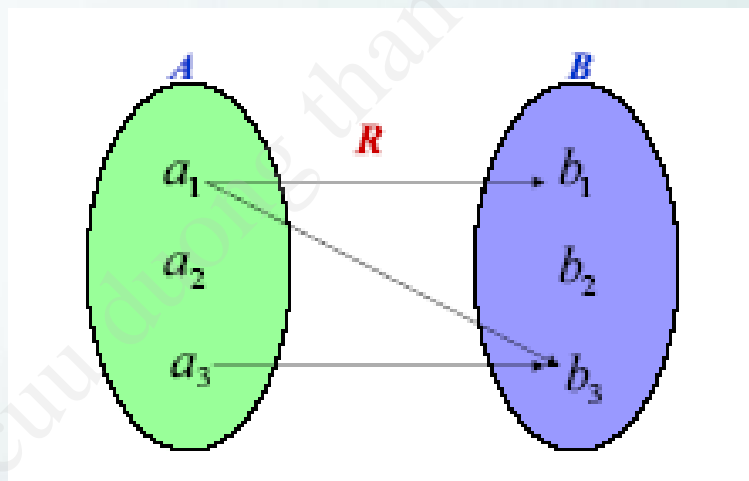
I. Quan hệ

1. Định nghĩa và tính chất
2. Biểu diễn quan hệ
3. Quan hệ tương đương. Đồng dư
4. Quan hệ thứ tự, biểu đồ Hass

1. Định nghĩa

Một **quan hệ hai ngôi** từ tập A đến tập B là tập con của tích Đề các $R \subseteq A \times B$. Chúng ta sẽ viết $a R b$ thay cho $(a, b) \in R$.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A

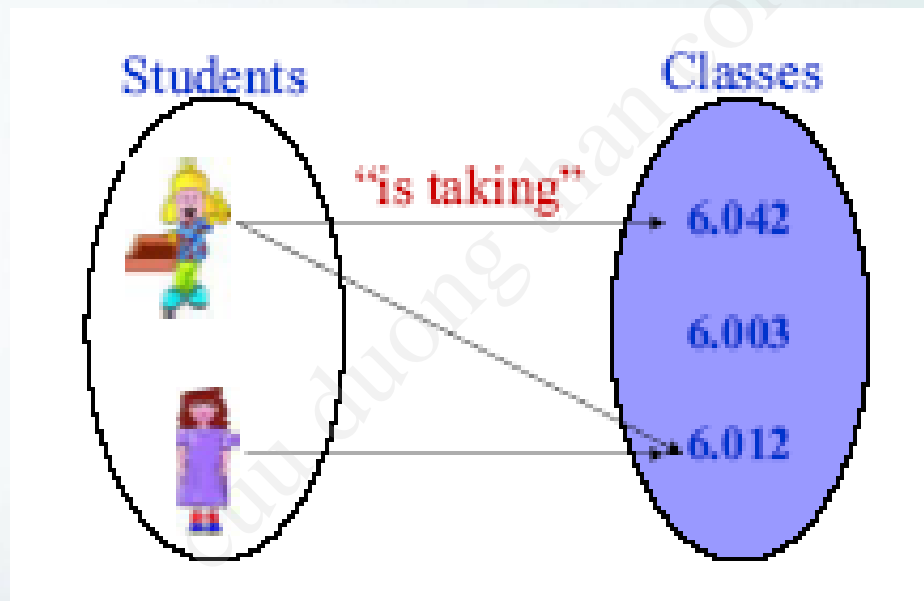


$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

1. Định nghĩa

Ví dụ. A = tập sinh viên; B = các lớp học.

$R = \{(a, b) \mid \text{sinh viên } a \text{ học lớp } b\}$



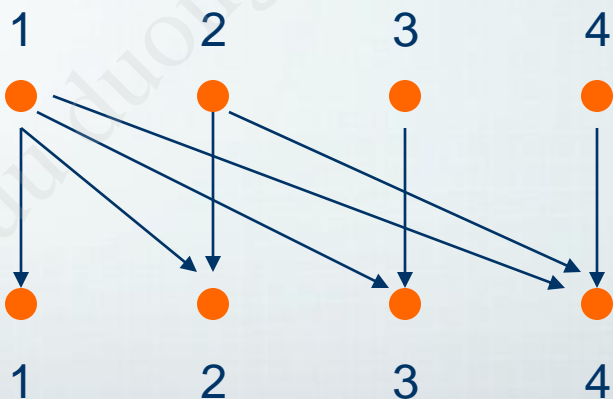
1. Định nghĩa

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là **phản xạ** nếu:

$$\forall a \in A, a R a$$

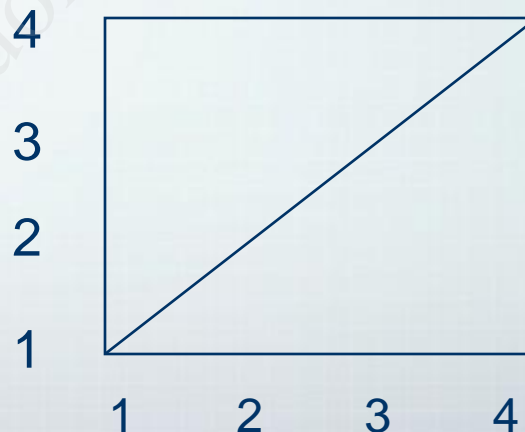
Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

- ❖ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
không phản xạ vì $(3,3) \notin R_1$
- ❖ $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ phản
xạ vì $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R_2$

- Quan hệ \leq trên \mathbb{Z} phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$
- Quan hệ $>$ trên \mathbb{Z} không phản xạ vì $1 > 1$
- Quan hệ “ $|$ ” (“ước số”) trên \mathbb{Z}^+ là phản xạ vì mọi số nguyên a là ước của chính nó.

Chú ý. Quan hệ R trên tập A là phản xạ nếu nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a); a \in A\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là **đối xứng** nếu:

$$\forall a \in A \forall b \in A (a R b) \rightarrow (b R a)$$

Quan hệ R được gọi là **phản xứng** nếu

$$\forall a \in A \forall b \in A (a R b) \wedge (b R a) \rightarrow (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ \leq trên \mathbf{Z} không đối xứng.

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$$

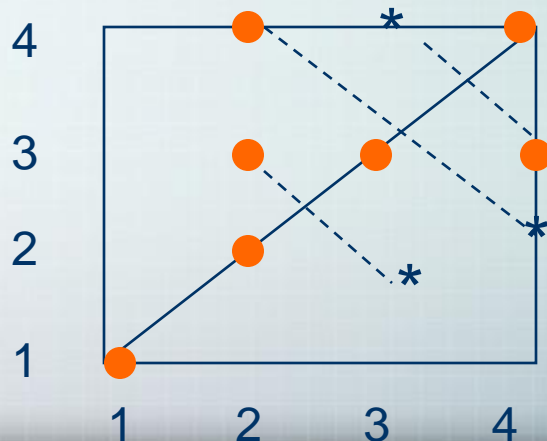
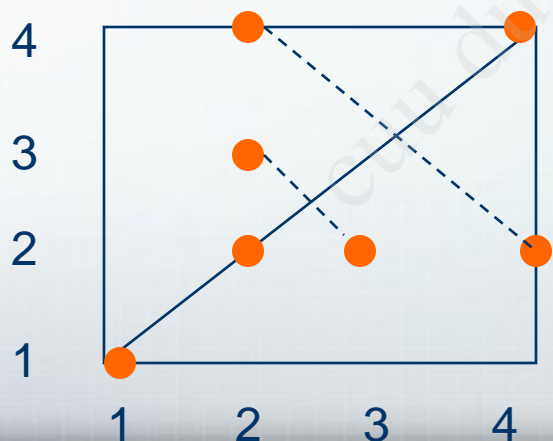
2. Các tính chất của Quan hệ

- Quan hệ “ $|$ ” (“ước số”) trên \mathbf{Z}^+ không đối xứng
Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a | b) \wedge (b | a) \rightarrow (a = b)$$

Chú ý. Quan hệ R trên A là đối xứng nếu nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của $A \times A$.

Quan hệ R là phản xứng nếu chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của $A \times A$.



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A có tính **bắc cầu** (truyền) nếu

$$\forall a, b, c \in A, (a R b) \wedge (b R c) \rightarrow (a R c)$$

Ví dụ.

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (2,3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Quan hệ \leq và “|” trên \mathbb{Z} có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c)$$

$$(a | b) \wedge (b | c) \rightarrow (a | c)$$

Tóm lại

- ❖ R phản xạ : aRa
- ❖ R đối xứng: $aRb \rightarrow bRa$
- ❖ R phản xứng: aRb và $bRa \rightarrow a=b$
- ❖ R bắc cầu: aRb và $bRc \rightarrow aRc$

3. Quan hệ tương đương

Giới thiệu

Quan hệ tương đương

Lớp tương đương

Định nghĩa

Ví dụ.

Cho $S = \{\text{sinh viên của lớp}\}$, gọi
 $R = \{(a,b): a \text{ có cùng họ với } b\}$

Hỏi

R phản xạ?

Yes

R đối xứng?

Yes

R bắc cầu?

Yes

Mọi sinh viên
có cùng họ
thuộc cùng một
nhóm.

3. Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là *tương đương* nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu :

Ví dụ. Quan hệ R trên các chuỗi ký tự xác định bởi aRb nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên \mathbf{R} sao cho aRb nếu $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương

3. Quan hệ tương đương

Cho a và b là hai số nguyên. a được gọi là **ước của b** hay **b chia hết cho a** nếu tồn tại số nguyên k sao cho $b = ka$

Ví dụ. Cho m là số nguyên dương và R quan hệ trên \mathbb{Z} sao cho aRb nếu $a - b$ chia hết cho m , khi đó R là quan hệ tương đương.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho a, b, c sao cho $a - b$ và $b - c$ chia hết cho m , khi đó $a - c = a - b + b - c$ cũng chia hết cho m . Suy ra R có tính chất bắc cầu.
- Quan hệ này được gọi là **đồng dư modulo m** và chúng ta viết

$$a \equiv b \pmod{m}$$

thay vì aRb

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. *Lớp tương đương chứa a* được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A / b R a\}$$

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots \}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} [1]_8 &= \{ a \mid a \text{ chia 8 dư } 1 \} \\ &= \{ \dots, -15, -7, 1, 9, 17, \dots \} \end{aligned}$$

Lớp tương đương

Chú ý. Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Tổng quát, chúng ta có

Định lý. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A và $a, b \in A$, Khi đó

(i) $a R b$ nếu $[a]_R = [b]_R$

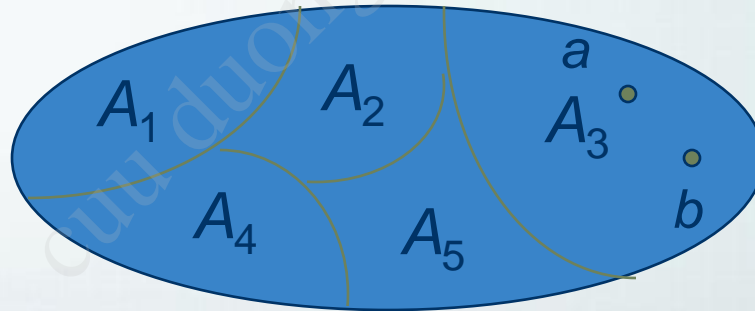
(ii) $[a]_R \neq [b]_R$ nếu $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Chú ý. Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân hoạch trên A , nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Lớp tương đương

19

Chú ý. Cho $\{A_1, A_2, \dots\}$ là phân hoạch A thành các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.



Ví dụ. Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của \mathbf{Z} thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \dots$$

$$[1]_m = [m+1]_m = [2m+1]_m = \dots$$

.....

$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \dots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là **số nguyên modulo m**

.Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi \mathbf{Z}_m

$$\mathbf{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

4. Quan hệ thứ tự. Biểu đồ Hasse

Giới thiệu

Biểu đồ Hasse

Phần tử tối tiểu, tối đại

Chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất

Định nghĩa

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên tập số thực:

$$a R b \text{ nếu } a \leq b$$

Hỏi:

■ R phản xạ không?

Có

■ R đối xứng không?

Không

■ R phản xứng không?

Có

■ R bắc cầu không?

Có

Định nghĩa

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A là **quan hệ thứ tự** (thứ tự) nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi \prec
Cặp (A, \prec) được gọi là **tập sắp thứ tự** hay **poset**

Phản xạ: $a \prec a$

Phản xứng: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \rightarrow (a = b)$

Bắc cầu: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \rightarrow (a \prec c)$

Định nghĩa

Ví dụ. Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là $(\mathbb{Z}^+, |)$ là poset

Phản xạ?

Có, $x | x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu?

Có?

$a | b$ nghĩa là $b = ka$, $b | c$ nghĩa là $c = jb$.

Khi đó $c = j(ka) = jka: a | c$

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.

Khi đó $a = jka$

Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

Ví dụ. (\mathbf{Z}, \mid) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

$3 \mid -3$, và $-3 \mid 3$,
nhưng $3 \neq -3$.

$(P(S), \subseteq)$, ở đây $P(S)$ là tập hợp các con của S , là một poset?

Có, là poset.

Phản xạ?

Có, $A \subseteq A, \forall A \in P(S)$

Bắc cầu?

Có

$A \subseteq B, B \subseteq C$. Suy ra $A \subseteq C$?

Phản xứng?

Có

$A \subseteq B, B \subseteq A$. Suy ra $A = B$?

Định nghĩa

27

Định nghĩa. Các phần tử a và b của poset (S, \prec) gọi là *so sánh được* nếu $a \prec b$ hay $b \prec a$.

Trái lại thì ta nói a và b *không so sánh được*.

Cho (S, \prec) , nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là *tập sắp thứ tự toàn phần*.

Ta cũng nói rằng \prec là *thứ tự toàn phần* hay *thứ tự tuyến tính* trên S .

Ví dụ

Ví dụ. Quan hệ “ \leq ” trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Ví dụ. Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.

Biểu đồ Hasse

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ *Hasse*

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

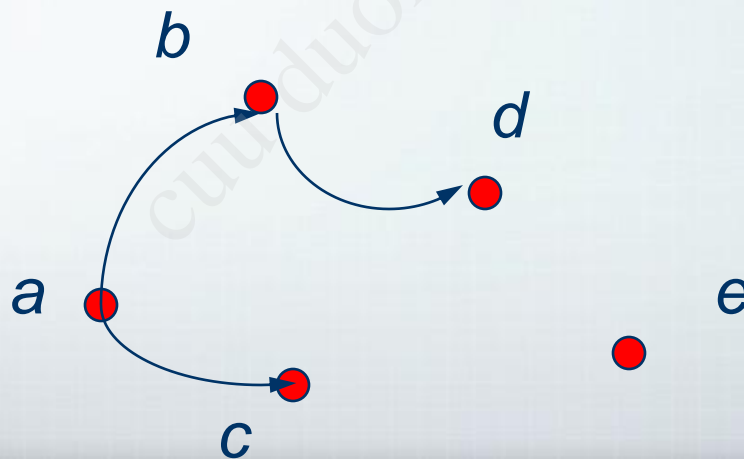
Định nghĩa. Phần tử b trong poset (S, \prec) được gọi là *phần tử trội* của phần tử a trong S nếu $a \prec b$

Chúng ta cũng nói rằng a là **được trội bởi** b . Phần tử b được gọi là **trội trực tiếp của** a nếu b là trội của a , và không tồn tại trội c sao cho

$$a \prec c \prec b, \quad a \neq c \neq b$$

Biểu đồ Hasse

- Ta định nghĩa *Biểu đồ Hasse* của poset (S, \prec) là đồ thị:
 - ✓ Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.
 - ✓ Nếu b là trội trực tiếp của a thì vẽ một cung đi từ a đến b .



$$a \prec b \prec d, \quad a \prec c$$

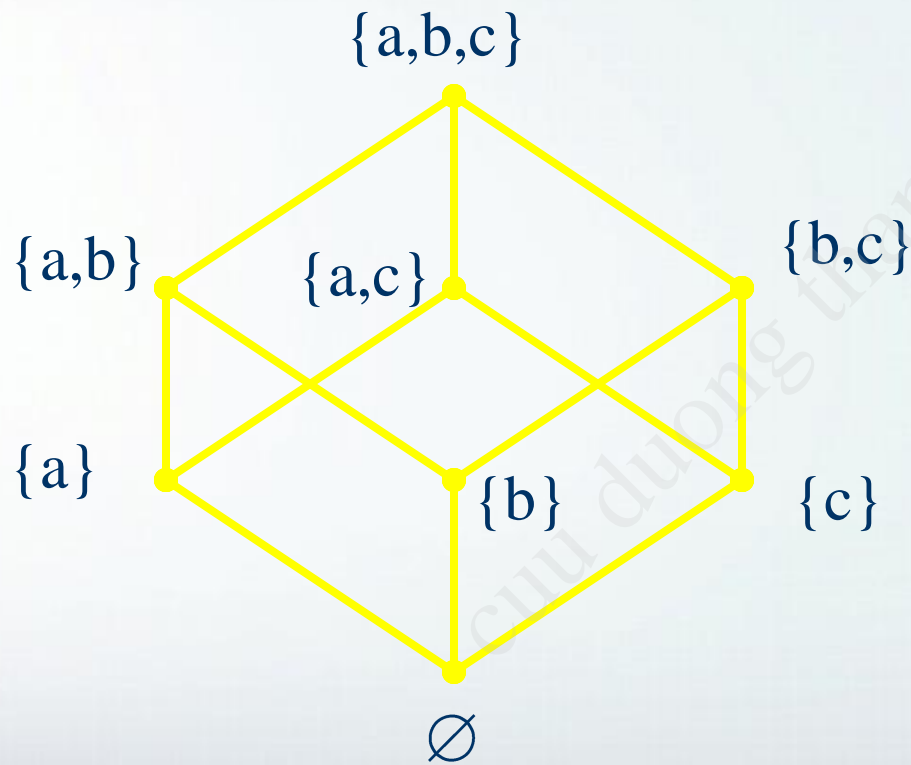
Biểu đồ Hasse

Ví dụ. Biểu đồ Hasse của poset $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ có thể vẽ như sau



Chú ý . Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

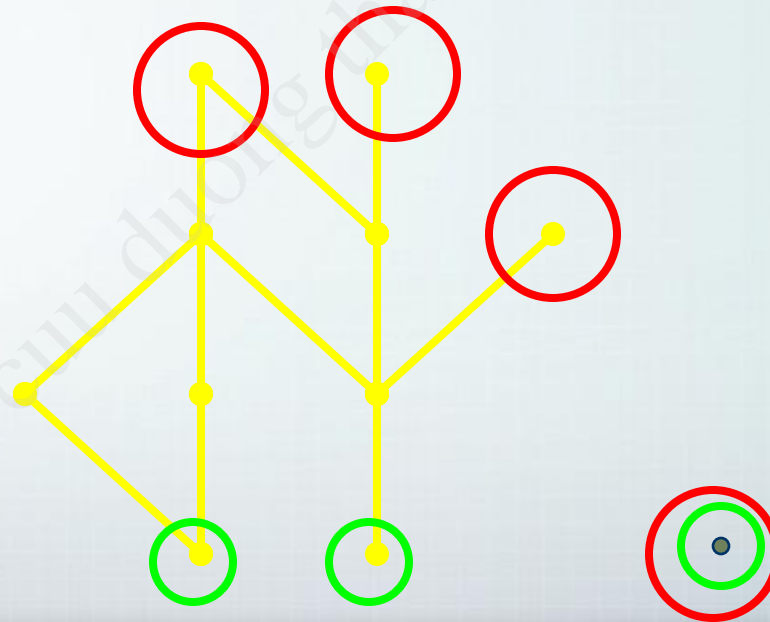
Ví dụ. Biểu đồ Hasse của $P(\{a,b,c\})$



Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

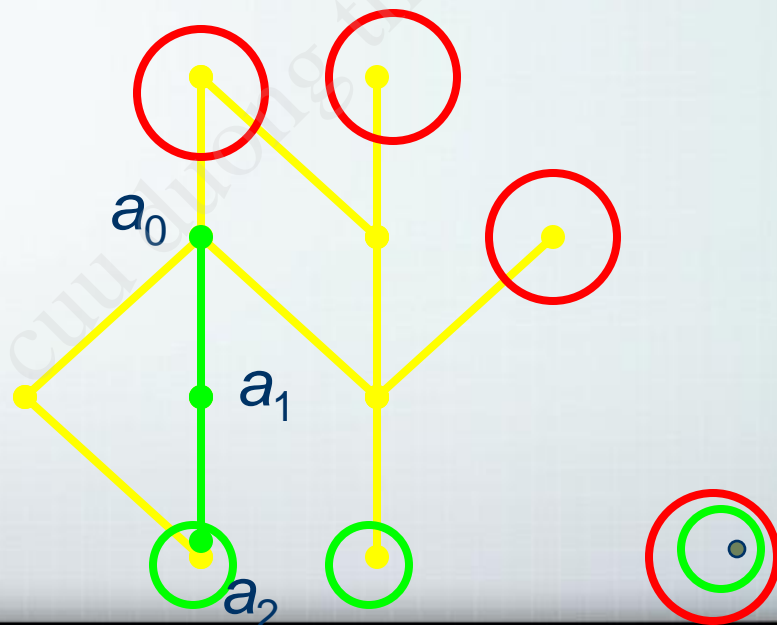
Xét poset có biểu đồ Hasse như dưới đây:

- ✓ Mỗi đỉnh màu đỏ là **tối đại**.
- ✓ Mỗi đỉnh màu xanh là **tối tiểu**.
- ✓ Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- ✓ Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.



Chú ý. Trong một poset S hữu hạn, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

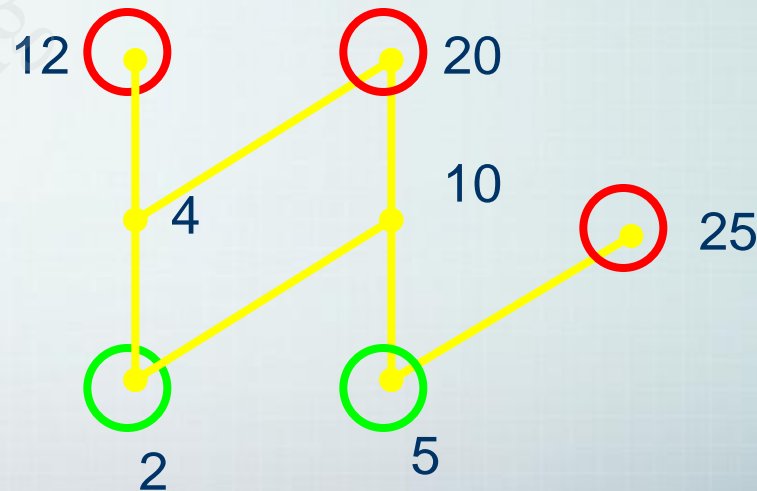
- ✓ Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điêm bất kỳ $a_0 \in S$.
Nếu a_0 không tối tiểu, khi đó tồn tại $a_1 \prec a_0$,
tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu .
- ✓ Phần tử tối đại tìm được bằng phương pháp tương tự.



Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$?

Giải. Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu

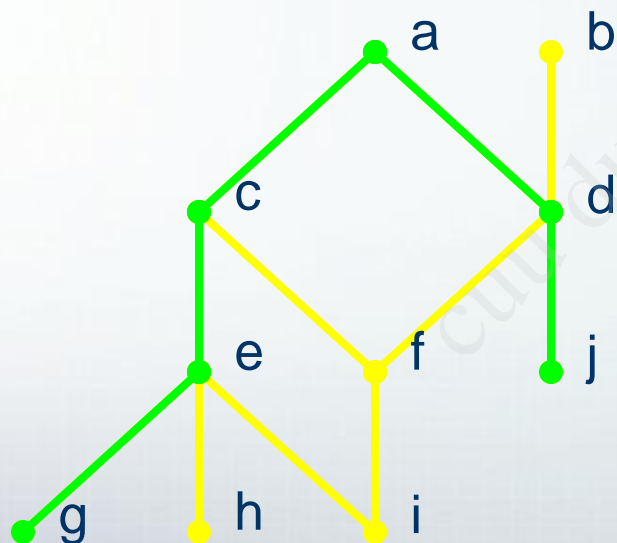
Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



Chặn trên, chặn dưới

Định nghĩa. Cho (S, \prec) là poset và $A \subseteq S$. Phần tử *chặn trên* của A là phần tử $x \in S$ (có thể thuộc A hoặc không) sao cho $\forall a \in A, a \prec x$.

Phần tử *chặn dưới* của A là phần tử $x \in S$ sao cho $\forall a \in A, x \prec a$



Ví dụ. Phần tử chặn trên của $\{g, j\}$ là a .

Tại sao không phải là b ?

Chặn trên, chặn dưới

37

Định nghĩa. Cho (S, \prec) là poset và $A \subseteq S$. **Chặn trên nhỏ nhất** của A là phần tử chặn trên x của A sao cho mọi chặn trên y của A , ta đều có $y \succ x$

Chặn dưới lớn nhất của A là phần tử chặn dưới x của A sao cho mọi chặn dưới y của A , ta có $y \prec x$

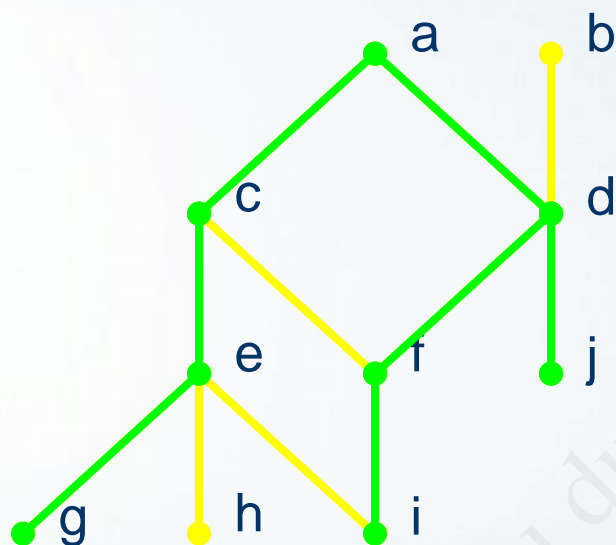
Chặn trên nhỏ nhất của : $\sup A$

Chặn dưới lớn nhất: $\inf A$

Chặn trên, chặn dưới

Ví dụ Chặn trên nhỏ nhất của $\{i, j\}$ là d

Ví dụ. Chặn dưới chung lớn nhất của $\{a, b\}$ là gì?

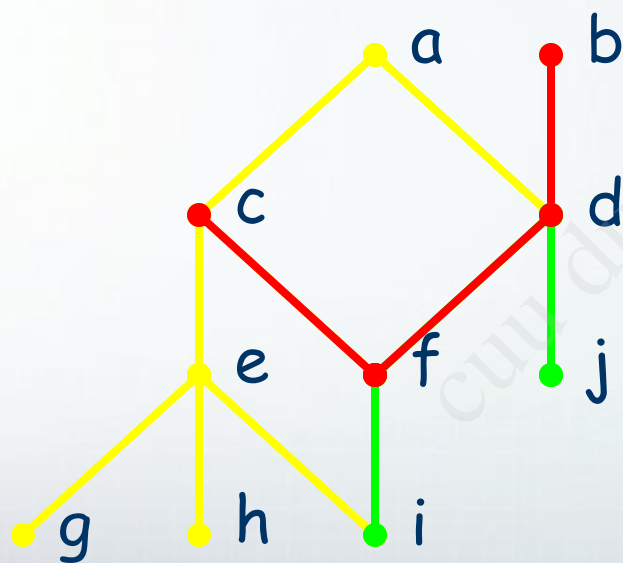


Chặn trên, chặn dưới

39

Chặn trên nhỏ nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \vee b$

Chặn dưới lớn nhất (nếu có) của $A = \{a, b\}$ được ký hiệu bởi $a \wedge b$



Ví dụ. $i \vee j = d$

Ví dụ. $b \wedge c = f$