

TOÁN RỜI RẠC

Chương 4. Hàm bool

■ Bài giảng có tham khảo của đồng nghiệp

Nội dung

Đại Số Bool

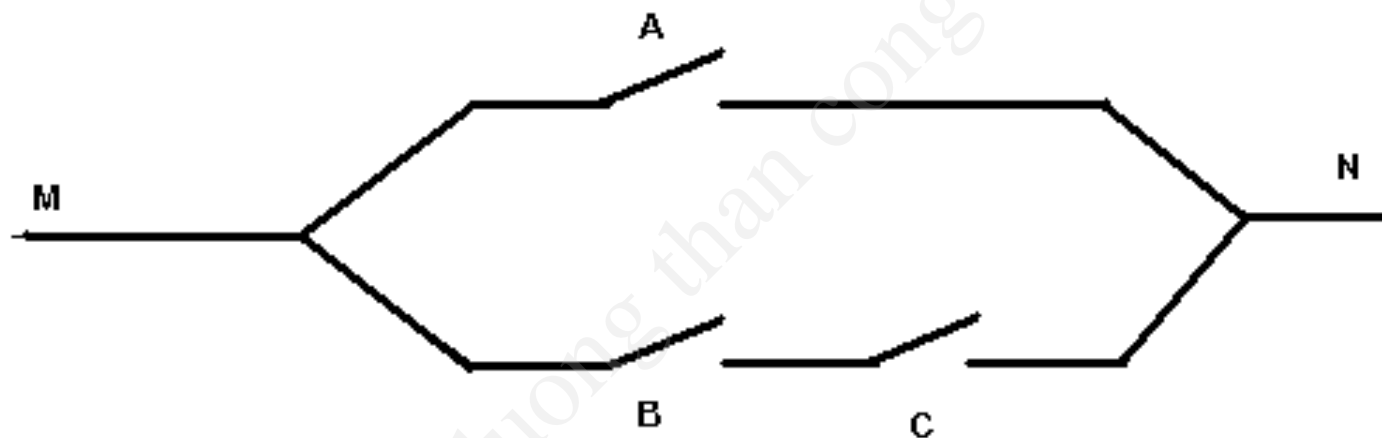
Hàm Bool

Biểu đồ karnaugh

Mạch logic

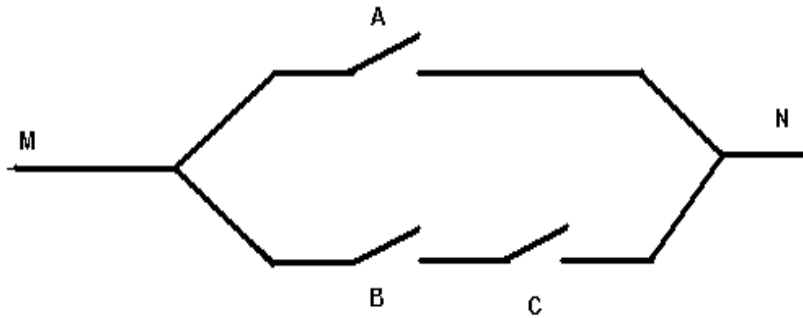
Mở đầu

Xét mạch điện như hình vẽ



Tùy theo cách trạng thái cầu dao A, B, C mà ta sẽ có dòng điện đi qua MN. Như vậy ta sẽ có bảng giá trị sau

Mở đầu



Câu hỏi: Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được.

Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi biến được xem như là một cầu dao

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

I. Đại Số Bool

Xét tập hợp $B = \{0, 1\}$. Trên B ta định nghĩa hai phép toán \wedge, \vee như sau:

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

Khi đó, B trở thành một đại số Bool

II. Hàm Bool

Hàm Bool n biến là ánh xạ

$f : B^n \rightarrow B$, trong đó $B = \{0, 1\}$.

Như vậy hàm Bool n biến là một hàm số có dạng :
 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, trong đó mỗi biến trong x_1, x_2, \dots, x_n chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong $B = \{0, 1\}$.

Ký hiệu F_n để chỉ tập các hàm Bool biến.

Ví dụ. Dạng mệnh đề $E = E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo n biến p_1, p_2, \dots, p_n là một hàm Bool n biến.

Bảng chân trị

Xét hàm Bool n biến $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vì mỗi biến x_i chỉ nhận hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Do đó, để mô tả f , ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là **bảng chân trị của f**

Ví dụ

Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z

Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: **1** (tán thành) hoặc **0** (bác bỏ).

Kết quả f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Hàm Bool

Khi đó f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z có bảng chân trị như sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

Các phép toán trên F_n được định nghĩa như sau:

Phép cộng Bool \vee :

Với $f, g \in F_n$ ta định nghĩa tổng Bool của f và g :

$$f \vee g = f + g - fg$$

Suy ra

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n,$$

$$(f \vee g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$$

Dễ thấy

$$f \vee g \in F_n \text{ và } (f \vee g)(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép nhân Bool \wedge :

Với $f, g \in F_n$ ta định nghĩa **tích Bool** của f và g

$$f \wedge g = fg$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n, \\ (f \wedge g)(x) = f(x)g(x)$$

Dễ thấy:

$$f \wedge g \in F_n \text{ và } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Ta thường viết **fg** thay cho $f \wedge g$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép lấy **hàm bù**:

Với $f \in F_n$ ta định nghĩa hàm bù của f như sau:

$$\overline{f} = 1 - f$$

Dạng nổi rời chính tắc của Hàm Bool

Xét tập hợp các hàm Bool của n biến F_n theo n biến x_1, x_2, \dots, x_n

- ❖ Mỗi hàm bool x_i hay $\overline{x_i}$ được gọi là **từ đơn**.
- ❖ **Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- ❖ **Từ tối thiểu** là tích khác không của đúng n từ đơn.
- ❖ **Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các đơn thức.
- ❖ **Dạng nổi rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các từ tối thiểu.

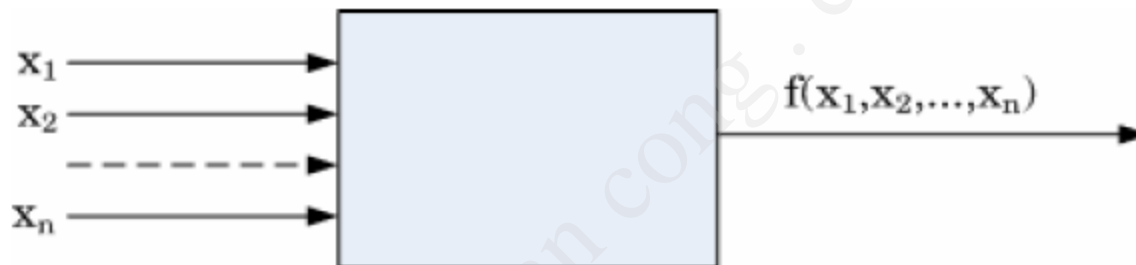
$x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, t, \bar{t}$ là các từ đơn.

$x\bar{y}z\bar{t}$; $\bar{x}\bar{y}t$ là các đơn thức.

$x\bar{y}z\bar{t}$ là từ tối thiểu

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{y}z$$

III. Mạng logic (Mạng các cổng)



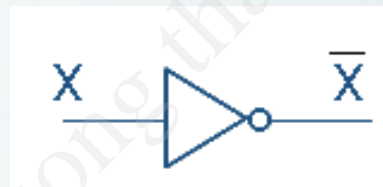
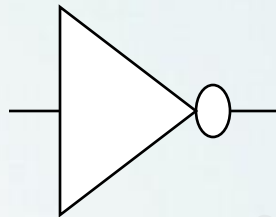
Input: x_1, x_2, \dots, x_n là các biến Bool

Output $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm Bool.

Ta nói mạng logic trên tổng hợp hay biểu diễn hàm Bool f

Cổng NOT

Kí hiệu cổng



Bảng chân trị

X	not X
0	1
1	0

Input Output

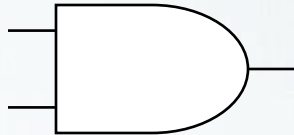
Nếu đưa mức HIGH vào ngõ vào của cổng, ngõ ra sẽ là mức LOW và ngược lại.

$$F(x) = \overline{x}$$

Cổng AND

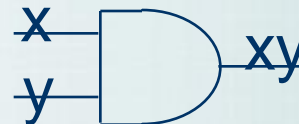
Cổng AND có ít nhất 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1 khi tất cả các ngõ vào là 1, ngược lại là 0



x and y

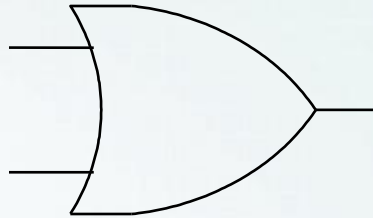
$x \bullet y, x \wedge y, x \& y, xy$



Bảng chân trị

X	Y	X and Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cổng OR



Cổng OR có ít nhất là 2 ngõ vào

Ngõ ra là 1, nếu có một ngõ vào là 1, ngược lại là 0

x or y

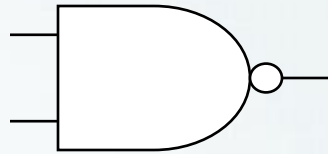
$x + y, x \vee y, x|y$



Bảng chân trị:

X	Y	X or Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cổng NAND



Là cổng bù của AND

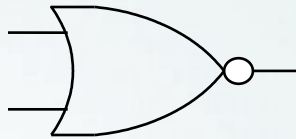
Có ngõ ra là ngược lại với cổng AND

$$X \text{ nand } Y = \text{not } (X \text{ and } Y) = \overline{xy}$$



X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cổng NOR



Là cổng bù của OR

Có ngõ ra ngược với cổng OR

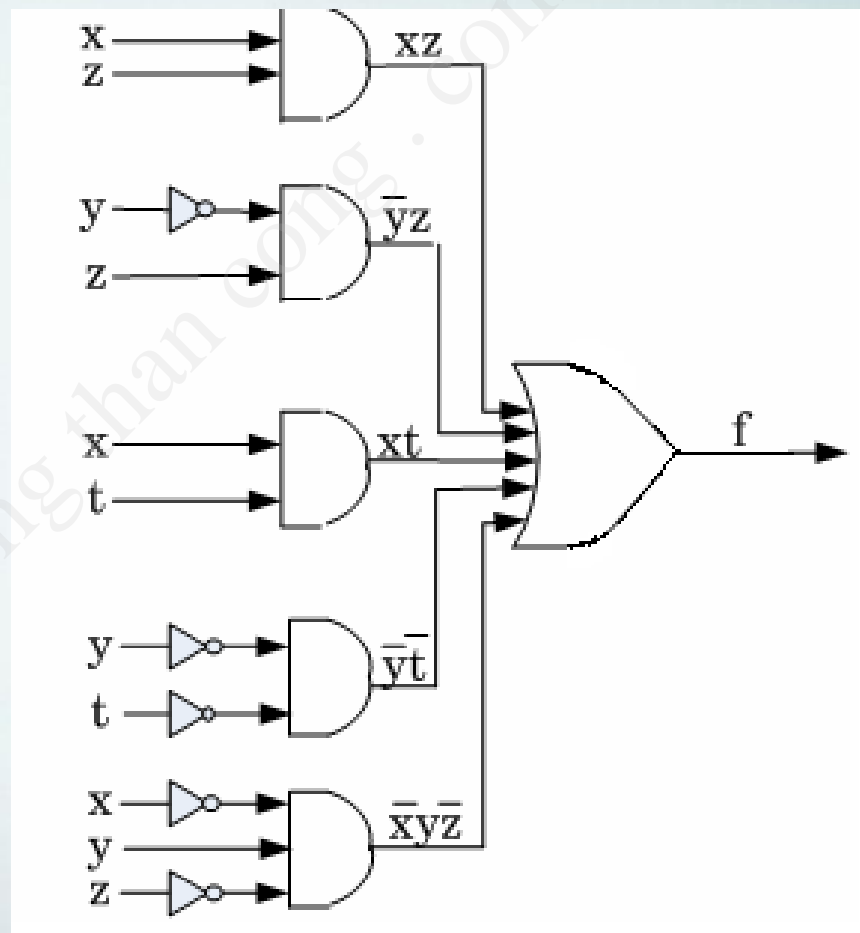
$$X \text{ nor } Y = \text{not } (X \text{ or } Y) = \overline{x \vee y}$$



X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

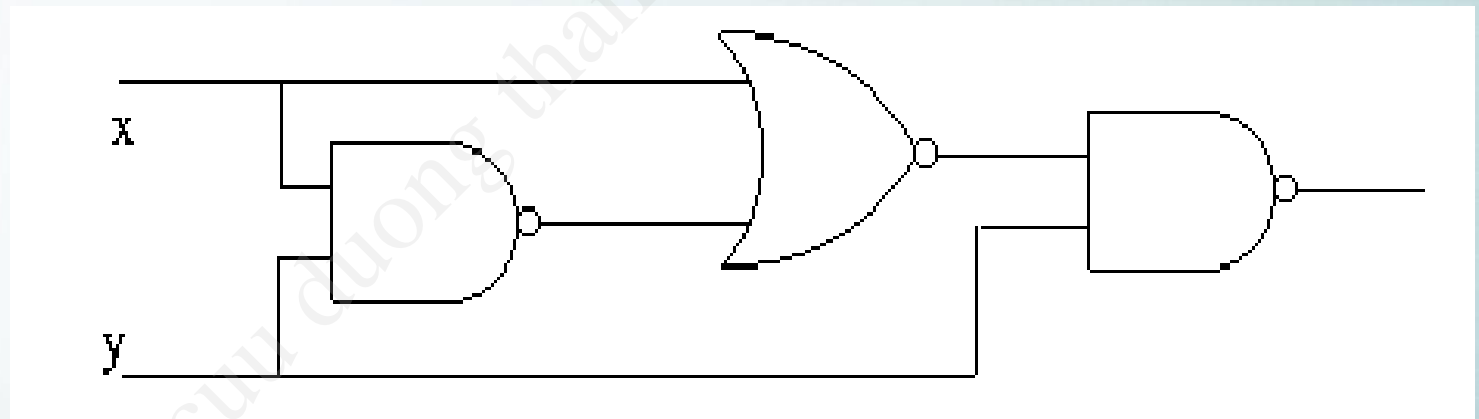
Ví dụ

$$f = xz \vee \overline{y}z \vee xt \vee \overline{y}\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z}$$

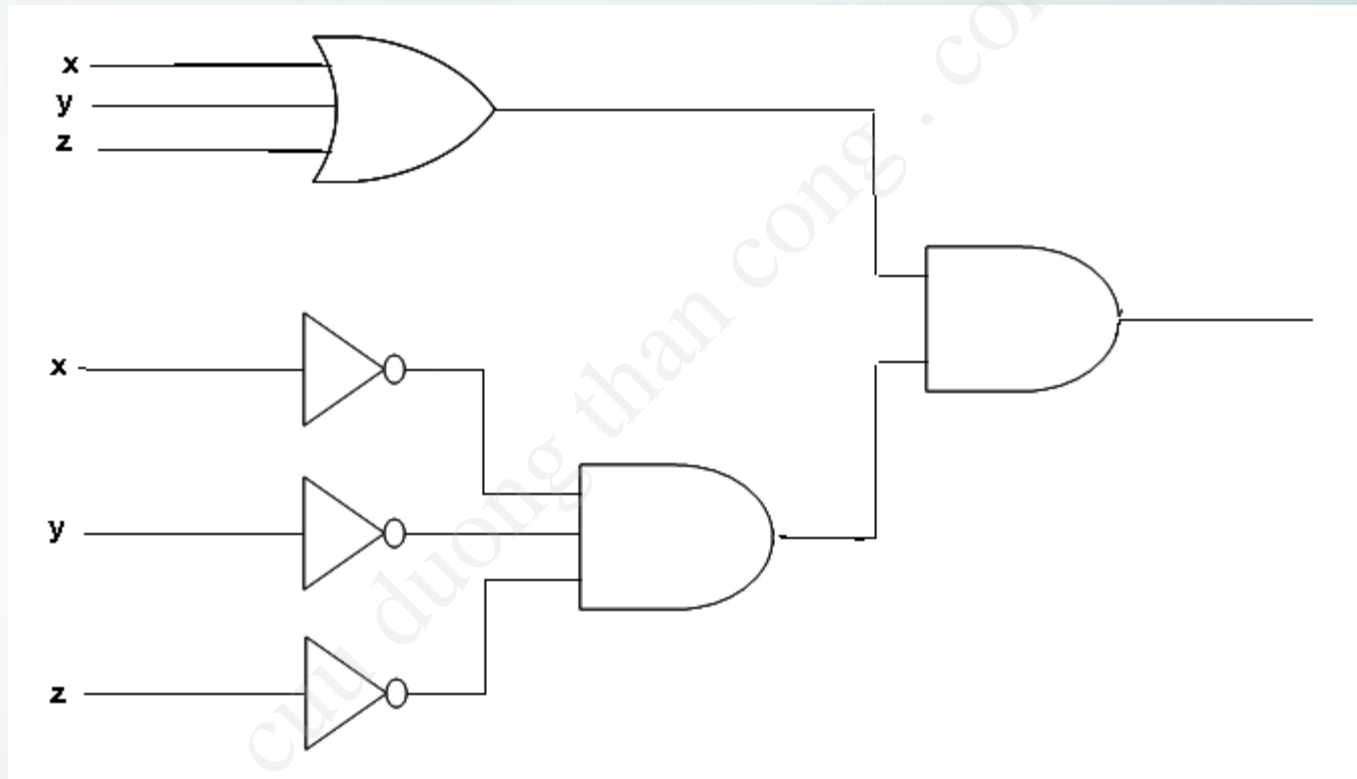


Ví dụ

$$\overline{\overline{x \vee xy} y}$$



Cho sơ đồ



Viết biểu thức f

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

. Thiết kế một mạch điều khiển bởi 2 cầu dao

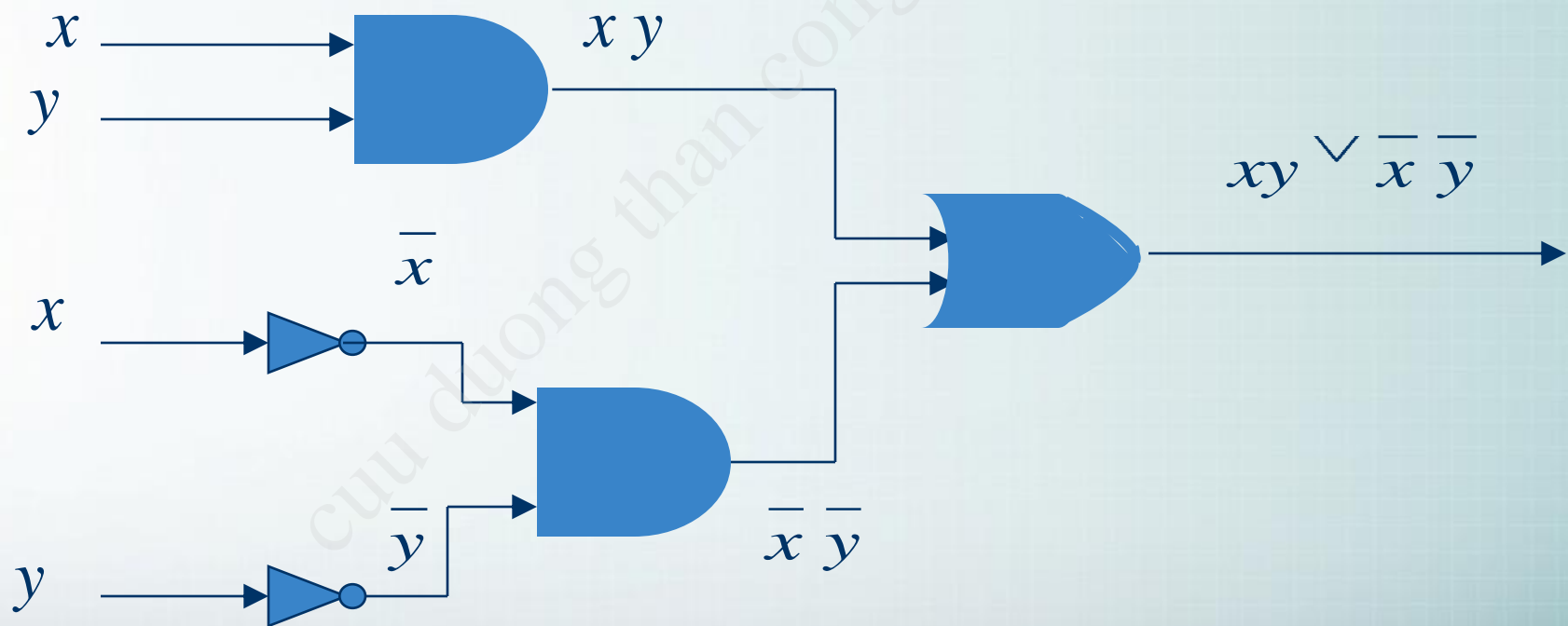
Mỗi cầu dao xem như là biến x, y : 1 là bật 0 là tắt

Cho $F(x, y) = 1$ khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử $F(x, y) = 1$ khi cả hai cái đều bật hoặc cùng tắt

Ta có bảng chân trị sau

x	y	$F(x, y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



Thiết kế một mạch điều khiển bởi 3 cầu dao

Mỗi cầu dao xem như là biến x, y : 1 là bật 0 là tắt

Cho $F(x, y) = 1$ khi đèn sáng và 0 khi đèn tắt

Giả sử $F(x, y, z) = 1$ khi 1 hoặc 3 cái đều bật

Ta có bảng chân trị sau

x	y	z	$F(x, y)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

