

Tối thiểu hoá hàm bool

Công thức đa thức tối thiểu

Đơn giản hơn

Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool :

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_k \text{ (F)}$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_l \text{ (G)}$$

Ta nói rằng công thức F *đơn giản hơn* công thức G nếu tồn tại đơn ánh $h: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

Công thức đa thức tối thiểu

Đơn giản như nhau

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G đơn giản như nhau

** Công thức đa thức tối thiểu:

Công thức F của hàm Bool f được gọi là *tối thiểu* nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Xét f là một hàm Bool theo n biến x_1, x_2, \dots, x_n với $n = 3$ hoặc 4 .

Trường hợp $n = 3$:

f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z . Khi đó bảng chân trị của f gồm 8 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 8 ô, tương ứng với 8 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}
z	101	111	011	001
\bar{z}	100	110	010	000
	\bar{y}	y	y	\bar{y}

Với qui ước:

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi \bar{x} thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z .

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f , ký hiệu là $kar(f)$.

	x	x	\bar{x}	\bar{x}
z	101	111	011	001
\bar{z}	100	110	010	000
	\bar{y}	y	y	\bar{y}

Trường hợp $n = 4$:

f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t . Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z	1010	1110	0110	0010	\bar{t}
z	1011	1111	0111	0011	t
\bar{z}	1001	1101	0101	0001	t
\bar{z}	1000	1100	0100	0000	\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Với qui ước:

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi \overline{x} thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z, t .

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ karnaugh của f , ký hiệu là $kar(f)$.

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là **kề nhau** (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô **liền nhau** hoặc chúng là **ô đầu, ô cuối** của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

Định lý

Cho f, g là các hàm Bool theo n biến x_1, x_2, \dots, x_n .
Khi đó:

a) $\text{kar}(fg) = \text{kar}(f) \cap \text{kar}(g)$.

b) $\text{kar}(f \vee g) = \text{kar}(f) \cup \text{kar}(g)$.

c) $\text{kar}(f)$ gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối tiểu

Tế bào

Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{n-k} ô

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ karnaugh của một đơn thức duy nhất m , cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m .

Ví dụ 1. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $x\bar{y}z\bar{t}$ là

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Ví dụ 2. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}z\bar{t}$ là

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Ví dụ 3.

Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}\bar{t}$ là

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Ví dụ 4.

Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t .

Biểu đồ karnaugh của đơn thức \bar{t} là

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Ví dụ 5. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t .

Tế bào sau:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

là biểu đồ karnaugh của đơn thức $y\bar{t}$.

Tế bào lớn.

Cho hàm Bool f . Ta nói T là một tế bào lớn của $\text{kar}(f)$ nếu T thoả hai tính chất sau:

- a) T là một tế bào và $T \subseteq \text{kar}(f)$.
- b) Không tồn tại tế bào T' nào thoả $T' \neq T$ và $T \subseteq T' \subseteq \text{kar}(f)$.

Ví dụ. Xét hàm Bool f theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ karnaugh như sau:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

Kar(f) có 6 tế bào lớn như sau:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

XZ

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

$\bar{y}z$

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	
	$x\bar{t}$				

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	
	xy				

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	
y \bar{z} t					

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	
y \bar{t}					

Thuật toán.

Bước 1: Vẽ biểu đồ karnaugh của f .

Bước 2: Xác định tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$.

Bước 3: Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của $kar(f)$ mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được $\text{kar}(f)$ thì ta có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $\text{kar}(f)$.

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được $\text{kar}(f)$ thì:

Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của $\text{kar}(f)$.

Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $\text{kar}(f)$.

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f .

Từ các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$ tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f

Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.

Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối thiểu của f .

Ví dụ 1

- ❖ Tìm tất cả các công thức đa thức tối thiểu của hàm Bool:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t}) \\ &= xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t} \end{aligned}$$

$$f(x, y, z, t) = \textcolor{red}{xyz}t \vee x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee yz \vee xy\overline{z} \vee xy\overline{t}$$

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee \textcolor{red}{x}\overline{y} \vee x\overline{z} \vee yz \vee xy\overline{z} \vee xy\overline{t}$$

Yellow			
Yellow	Blue		
Yellow			
Yellow			

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x y \overline{z} \vee x \overline{y} \vee x \overline{z} \vee y z \vee x y \overline{z} \vee x y \overline{t}$$

Blue			
Blue	Blue		
Yellow	Yellow		
Yellow	Yellow		

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x y \overline{z} \vee x \overline{y} \vee y z \vee \textcolor{red}{x y \overline{z}} \vee x y \overline{t}$$

Blue	Light Green	Light Green	White
Blue	Light Green	Light Green	White
Light Blue	Yellow	White	White
Light Blue	Yellow	White	White

$$f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee \textcolor{red}{xy\bar{t}}$$

Blue	Orange	Light Green	White
Blue	Light Green	Light Green	White
Light Blue	Light Green	White	White
Light Blue	Orange	White	White

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

Bước 1: Vẽ kar(f):

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

Bước 2: Kar(f) có các tế bào lớn như sau:

Blue	Blue	Blue	White
Blue	Blue	Blue	White
Blue	Blue	White	White
Blue	Blue	White	White

Red	Red	Blue	White
Red	Red	Blue	White
Red	Red	White	White
Red	Red	White	White

x

Light Blue	Red	Red	White
Light Blue	Red	Red	White
Light Blue	Light Blue	White	White
Light Blue	Light Blue	White	White

yz

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn:

- Ô 1 nằm trong một tế bào lớn duy nhất x. Ta chọn x.
- Ô 3 nằm trong một tế bào lớn duy nhất yz. Ta chọn yz.

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

1	2		
4	5		
7	8		
9	10		

x

	2	3	
	5	6	

yz

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

x

Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $\text{kar}(f)$:

$x \vee yz$.

1	2	3	
4	5	6	
7	8		
9	10		

yz

$$f(x, y, z, t) = xyz t \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee yz \vee xy \bar{z} \vee xy \bar{t}$$

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f.

Ứng với phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn tìm được ở bước 4 ta tìm được duy nhất một công thức đa thức tối thiểu của f:

$$x \vee yz$$

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}z\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

B1: Vẽ Kar(f)

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}z\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{z}\overline{t}$

$\overline{x}\overline{t}$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

xzt

$\overline{x}\overline{y}z$

$\overline{y}zt$

B2: Xác định tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}z\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

xzt

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{x}\overline{y}z$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{y}zt$

B3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

❖ Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn

- Ô 6 nằm trong một tế bào lớn duy nhất $\overline{z}\overline{t}$. Ta chọn $\overline{z}\overline{t}$
- Ô 1 nằm trong một tế bào lớn duy nhất $\overline{x}\overline{t}$. Ta chọn $\overline{x}\overline{t}$
- Ô 4 nằm trong một tế bào lớn duy nhất xzt . Ta chọn xzt

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}z\overline{t} \vee y\overline{z}t \vee x y z t \vee \overline{x} z \overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

xzt

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{z}\overline{t}$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{x}t$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}t \vee xzt$$

B4: Xác định các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ
Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xz\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$$\overline{x}\overline{y}z$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$$\overline{y}zt$$

B4: Xác định các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ
Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xz\overline{t} \vee \overline{x}yz$$

$$\overline{x}\overline{y}z$$

B4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

Còn lại ô 5 chưa bị phủ
Ô 5 nằm trong 2 tế bào lớn: 2 cách chọn

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xzt \vee \overline{y}zt$$

		1	2
3	4		5
6	7	8	9

$\overline{y}zt$

B4: Xác định các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn

$$f = \overline{y}zt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee y\overline{z}\overline{t} \vee xyz\overline{t} \vee \overline{x}z\overline{t}$$

❖ Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xz\overline{t} \vee \overline{xyz}$$

$$\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{t} \vee xz\overline{t} \vee \overline{y}zt$$

❖ **Hãy xác định các công thức đa thức tối thiểu của hàm Bool:**

$$f = xz(\bar{y} \vee \bar{t}) \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t} \vee z(yt \vee \bar{x}\bar{y})$$

❖ Biểu đồ Karnaugh:

❖ Các tế bào lớn:

$$xz, \bar{y}z, zt, \bar{x}\bar{z}\bar{t}, \bar{x}\bar{y}\bar{t}$$

❖ Các tế bào lớn bắt buộc phải chọn là

$$xz, zt, \bar{x}\bar{z}\bar{t}$$

❖ Còn lại ô (1,4) có thể nằm trong 2 tế bào lớn

$$\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{t}$$

❖ Do đó có 2 công thức đa thức tương ứng với phủ tối thiểu:

$$f = xz \vee zt \vee \overline{x} \overline{z} \overline{t} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{t}$$

$$f = xz \vee zt \vee \overline{x} \overline{z} \overline{t} \vee \overline{y} z$$

❖ Trong đó chỉ có công thức thứ hai là tối thiểu