Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Combinatorial Theory

Fall 2009

Nội dung

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

1. Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân

- Đây là hai nguyên lý cơ bản của tổ hợp, được vận dụng rộng rãi vào việc giải quyết các bài toán đếm
- Còn gọi là Qui tắc cộng và Qui tắc nhân (Sum Rule và Product Rule)

1.1. Nguyên lý cộng
(The sum rule)

- *Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì*

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

- Nguyên lý cộng đợc mở rộng cho nhiều tập con rời nhau:

  Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là một phân hoạch của tập hợp X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k).$$

- Một trờng hợp riêng hay dùng của nguyên lý cộng:

  Nếu A là một tính chất cho trên tập X thì

$$N(A) = N(X) - N(A^c).$$

$$N(A) = N(X) - N(\overline{A})$$

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Một đoàn vận động viên gồm 2 môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu ở nước ngoài. Nam có 10 người. Số vận động viên thi bắn súng (kể cả nam và nữ) là 14. Số nữ vận động viên thi bơi bằng số nam vận động viên thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người?
- **Giải:** Chia đoàn thành 2 lớp: nam và nữ. Lớp nữ lại được chia 2: thi bắn súng và thi bơi. Thay số nữ thi bơi bằng số nam thi bắn súng (2 số này bằng nhau theo đầu bài), ta được số nữ bằng tổng số đấu thủ thi bắn súng. Từ đó, theo nguyên lý cộng, toàn đoàn có 10 + 14 = 24 người.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 2.** Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề "xây dựng hệ thông tin quản lý", 10 đề tài về chủ đề "thiết kế phần mềm dạy học" và 10 đề tài về chủ đề "Hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?
- **Giải:** Sinh viên có thể lựa chọn đề tài theo chủ đề thứ nhất bởi 80 cách, theo chủ đề thứ hai bởi 10 cách, theo chủ đề thứ ba bởi 10 cách. Vậy tất cả có 100 cách lựa chọn.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 3.** Hỏi rằng giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn ch ơng trình PASCAL sau đợc thực hiện?

```
n1:=10; n2:=20; n3:=30;
k:=0;
for i1:= 1 to n1 do k:=k+1;
for i2:= 1 to n2 do k:=k+1;
for i3:= 1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Giải:** Đầu tiên giá trị của k đợc gán bằng 0. Có 3 vòng lặp for độc lập. Sau mỗi lần lặp của mỗi một trong 3 vòng for, giá trị của k tăng lên 1. Vòng for thứ nhất lặp 10 lần, vòng for thứ hai lặp 20 lần, vòng for thứ ba lặp 30 lần. Vậy, kết thúc 3 vòng lặp for giá trị của k sẽ là 10+20+30= 60.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 4:** Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân có đúng 3 ký tự là 9?
- **Giải:** Xâu có thể chứa:
  - Ký tự khác 9 ở vị trí thứ nhất
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ hai
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ ba
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ tư
- Ta có thể sử dụng qui tắc cộng
  - Đối với mỗi trường hợp, có 9 khả năng chọn ký tự khác với 9 (bất kể chữ số khác 9 nào trong 9 chữ số 0, 1, ...,8)
- Vậy, đáp số là 9+9+9+9 = 36

1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- *Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, ..., a_k)$ có n_i khả năng chọn ($i = 1, 2, ..., k$), thì số bộ sẽ đợc tạo ra là tích số của các khả năng này $n_1 n_2 \ldots n_k$.*
- Một hệ quả trực tiếp của nguyên lý nhân:

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)\, N(A_2) \ldots N(A_k),$$

với $A_1, A_2, ..., A_k$ là những tập hợp nào đó, nói riêng:

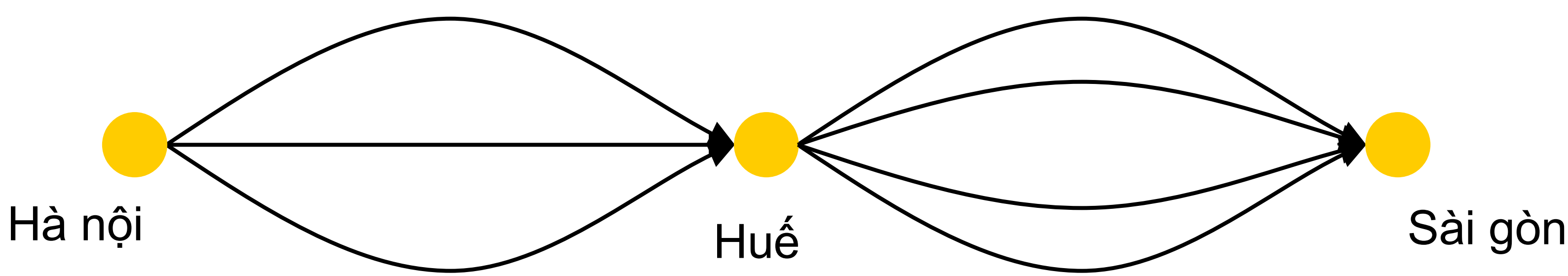
$$N(A^k) = [N(A)]^k .$$

1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- Trong nhiều bài toán đếm, chỉ sau khi xây dựng xong thành phần thứ nhất ta mới biết cách xây dựng thành phần thứ hai, sau khi xây dựng xong hai thành phần đầu ta mới biết cách xây dựng thành phần thứ ba,... Trong trờng hợp đó có thể sử dụng ***nguyên lý nhân tổng quát:***
- Giả sử ta xây dựng bộ có thứ tự k thành phần (a_1, a_2, ..., a_k) theo từng thành phần và
  - a_1 có thể chọn bởi n_1 cách;
  - Sau khi a_1 đã chọn, a_2 có thể chọn bởi n_2 cách;
  - ...
  - Sau khi a_1, a_2,...,a_{k-1} đã chọn, a_k có thể chọn bởi n_k cách;
- Thế thì số bộ đợc tạo ra là tích số $\boldsymbol{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- ***Ví dụ 1***. Từ Hà nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả. Từ Huế đến Sài gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả, tàu thuỷ. Hỏi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?
- ***Giải***: Mỗi cách đi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) đọc xem gồm 2 chặng: Hà nội - Huế và Huế - Sài gòn. Từ đó, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ Hà nội đến Sài gòn là $3 \times 4 = 12$ cách.



Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **Ví dụ 2.** Hỏi rằng giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn ch ơng trình PASCAL sau đợc thực hiện?

```
n1:=10; n2:=20; n3:=30;
k:=0;
for i1:=1 to n1 do
    for i2:=1 to n2 do
        for i3:=1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Giải:** Đầu tiên giá trị của k đợc gán bằng 0. Có 3 vòng lặp for lồng nhau. Sau mỗi lần lặp của vòng for, giá trị của k tăng lên 1. Vòng for thứ nhất lặp 10 lần, vòng for thứ hai lặp 20 lần, vòng for thứ ba lặp 30 lần. Vậy, theo nguyên lý nhân, kết thúc 3 vòng lặp for lồng nhau, giá trị của k sẽ là $10 \times 20 \times 30 = 6000$.

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **Ví dụ 3:** Hỏi có bao nhiêu lá cờ gồm 3 vạch mầu, mầu của mỗi vạch lấy từ ba mầu xanh, đỏ, trắng sao cho:

  a) Không có hai vạch liên tiếp nào cùng màu

  b) Không có hai vạch nào cùng màu
- **Giải.** Đánh số các vạch của lá cờ bởi 1, 2, 3 từ trên xuống.

Trường hợp a)

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp a) là 3.2.2=12

Nguyên lý nhân: Ví dụ 3 (tiếp)

Trường hợp b):

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 1 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1 và 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp b) là 3.2.1=6

Nguyên lý nhân: Ví dụ

Ví dụ 4. Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân

a) không chứa một chữ số nào hai lần?

- Chúng ta sẽ chọn chữ số vào lần lượt từng vị trí
  - Ký tự thứ nhất có 10 cách chọn
  - Ký tự thứ hai có 9 cách (không chọn lại chữ số đã chọn vào vị trí thứ nhất)
  - Ký tự thứ ba có 8 cách chọn
  - Ký tự thứ tư có 7 cách chọn
- Tổng cộng có 10*9*8*7 = 5040 xâu cần đếm.

b) kết thúc bởi chữ số chẵn?

- Ba ký tự đầu tiên mỗi ký tự có 10 cách chọn
- Ký tự cuối cùng có 5 cách chọn
- Tổng cộng có 10*10*10*5 = 5000 xâu cần đếm.

Các ví dụ phức tạp hơn

- Khi nào sử dụng qui tắc cộng?
- Khi nào sử dụng qui tắc nhân?

- Ta có thể sử dụng phối hợp cả qui tắc cộng và qui tắc nhân
- Bằng cách đó ta có thể giải được nhiều bài toán thú vị và phức tạp hơn

Chụp ảnh đám cưới

Xét bài toán: Có 10 người tham gia vào việc chụp ảnh kỷ niệm ở một đám cưới, trong đó có cô dâu và chú rể. Ta xét bức ảnh chỉ gồm 6 người trong họ.

a) Có bao nhiêu bức ảnh trong đó có mặt cô dâu?

Qui tắc nhân: Xếp chỗ cho cô dâu **VÀ** sau đó xếp chỗ cho những nhân vật còn lại trong bức ảnh.

Trước hết xếp chỗ cho cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở 1 trong 6 vị trí

Tiếp đến, xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh nhờ sử dụng qui tắc nhân: Có 9 người để chọn nhân vật thứ hai, 8 người để chọn nhân vật thứ ba, ... Tổng cộng có 9*8*7*6*5 = 15120 cách xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh.

Qui tắc nhân cho ta 6 * 15120 = 90 720 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

b) Có thể chụp bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt cả cô dâu lẫn chú rể?

- Qui tắc nhân: Xếp dâu/rể VÀ sau đó xếp những nhân vật còn lại trong bức ảnh
- Trước hết xếp dâu và rể
  - Cô dâu có thể xếp vào 1 trong 6 vị trí
  - Chú rể có thể xếp vào 1 trong 5 vị trí còn lại
  - Tổng cộng có 30 khả năng
- Tiếp theo, xếp chỗ cho 4 nhân vật còn lại trong bức ảnh theo qui tắc nhân
  - Có 8 người để chọn nhân vật thứ ba, 7 người để chọn nhân vật thứ tư, ...
  - Tổng cộng có 8*7*6*5 = 1680
- Theo qui tắc nhân có 30 * 1680 = 50 400 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

c) Có bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt chỉ một người trong cặp tân hôn?

- Qui tắc cộng: Chỉ xếp cô dâu
  - Qui tắc nhân: xếp cô dâu và sau đó xếp các nhân vật còn lại
  - Trước hết xếp cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở một trong 6 vị trí
  - Tiếp đến, xếp những nhân vật khác theo qui tắc nhân: Có 8 người để chọn nhân vật thứ hai, 7 để chọn nhân vật thứ ba, v.v. (Ta không được chọn chú rể!)
    - Tổng cộng = 8*7*6*5*4 = 6720
  - Qui tắc nhân cho 6 * 6720 = 40 320 khả năng
- hoặc chỉ xếp chú rể
  - Số lượng khả năng cũng giống như cô dâu: 40 320
- Qui tắc cộng cho 40 320 + 40 320 = 80 640 khả năng

Chụp ảnh đám cưới

- Một cách khác để thu được lời giải câu c)

c) Có bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt chỉ một người trong cặp tân hôn?

- Tổng số bức ảnh trong đó có cô dâu (có hoặc không có chú rể): 90 720
  - Theo kết quả phần (a)
- Tổng số bức ảnh có mặt cả dâu lẫn rể: 50 400
  - Theo kết quả phần (b)
- Số bức ảnh chỉ có mặt cô dâu: 90 720 – 50 400 = 40 320
- Đó cũng là số bức ảnh chỉ có mặt chú rể
- Tổng cộng = 40 320 + 40 320 = 80 640

Số lượng Mật khẩu

Mỗi cá nhân sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu gồm từ 6 đến 8 ký tự, mỗi ký tự là chữ cái in hoa hoặc chữ số. Mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

- Theo qui tắc cộng, nếu P là số lượng mật khẩu và P_6, P_7, P_8 là số lượng mật khẩu độ dài 6, 7, và 8, tương ứng, thì

$$P = P_6+P_7+P_8$$

Số lượng Mật khẩu

P_6 = số lượng mật khẩu gồm 6 ký tự chứa ít nhất một chữ số

= (tổng số mật khẩu gồm 6 ký tự) trừ bớt (số mật khẩu gồm 6 ký tự không chứa chữ số)

$= (26+10)(26+10)(26+10)(26+10)(26+10) – (26)(26)(26)(26)(26)(26) = 36^6 – 26^6$

= **1 867 866 560**

Số lượng Mật khẩu

Tương tự như vậy, ta có

$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70\ 332\ 353\ 920$

$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\ 612\ 282\ 842\ 880$

$P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$

Chú ý: Nếu máy tính 2 GHz có thể thử 200 triệu mật khẩu trong một giây, thì trong thời gian bao nhiêu lâu có thể xác định được mật khẩu để thâm nhập hệ thống máy tính này?

(2 684 483 063 360/200 000 000)/(60*60) giờ

Gần 4 tiếng đồng hồ!

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

- Các cấu hình tổ hợp cơ bản là:
  - ***Chỉnh hợp lặp,***
  - ***Chỉnh hợp không lặp,***
  - ***Hoán vị,***
  - ***Tổ hợp***
- Phép đếm các cấu hình tổ hợp cơ bản được sử dụng để giải các bài toán đếm phức tạp hơn
- Giả sử X là tập n phần tử, mà không giảm tổng quát ta có thể coi X là tập gồm các số 1, 2, ..., n.

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi *chỉnh hợp lặp chập m từ n* phần tử của X là bộ có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử là A_n^m
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, \dots, a_m),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

- Dễ thấy tập tất cả các chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X chính là X^m. Vì vậy, theo nguyên lý nhân ta có
- **Định lý 1.** $A_n^m = n^m$.

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 1**. Tính số ánh xạ từ tập *m* phần tử $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ vào tập *n* phần tử *V*.
- **Giải**: Mỗi ánh xạ *f* cần đếm đợc xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m))$, trong đó $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, ..., m$. Từ đó nhận đợc số cần tìm là n^m.
- **Ví dụ 2**. Tính số dãy nhị phân độ dài *n*.
- **Giải**: Mỗi dãy nhị phân độ dài *n* là một bộ gồm *n* thành phần, trong đó mỗi thành phần chỉ nhận một trong hai giá trị (1 hoặc 0). Từ đó suy ra số các dãy nhị phân độ dài *n* là 2^n.
- Do mỗi tập con của tập *n* phần tử tơng ứng với một vectơ đặc tr ng là một xâu nhị phân độ dài *n*, nên ta có
- **Hệ quả:** Số lợng tập con của tập *n* phần tử là 2^n.

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 3.** Cần phải phân bố 100 sinh viên vào 4 nhóm thực tập ACCESS, FOXPRO, EXCEL, LOTUS. Mỗi sinh viên phải tham gia vào đúng một nhóm và mỗi nhóm có thể nhận một số lượng không hạn chế sinh viên
- **Giải:** 4^{100} hay 100^4?
- Mỗi cách phân bố cần tìm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự gồm 100 thành phần $(b_1, ..., b_{100})$ trong đó $b_i \in \{A, F, E, L\}$ là nhóm thực tập của sinh viên thứ i. Từ đó suy ra số cách phân bố cần đếm là 4^{100}.

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử của *X* là bộ có thứ tự gồm *m* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử là P_n^m. Rõ ràng, để tồn tại chỉnh hợp không lặp, thì $m \leq n$.
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử của *X* có thể biểu diễn bởi

  $$(a_1, a_2, \ldots, a_m),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$
- Việc đếm số lượng chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử có thể thực hiện theo nguyên lý nhân. Ta có
- Định lý 2. $P_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Chỉnh hợp không lặp

- **Ví dụ 1**. Tính số đơn ánh từ tập m phần tử $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ vào tập n phần tử V.
- **Giải**: Mỗi đơn ánh f cần đếm đợc xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m))$, trong đó $f(u_i) \in V$, i=1, 2, ..., m, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$. Từ đó nhận đợc số cần tìm là $n(n-1)...(n-m+1)$.

- **Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào ngồi sau một cái bàn có 10 chỗ ngồi với điều kiện không được phép ngồi lòng.
- **Giải.** Đánh số các học sinh từ 1 đến 4, các chỗ ngồi từ 1 đến 10. Mỗi cách xếp học sinh cần đếm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự (g_1, g_2, g_3, g_4), trong đó $g_i \in \{1, 2, ..., 10\}$ là chỗ ngồi của học sinh i. Từ điều kiện đầu bài $g_i \neq g_j$, $i \neq j$; do đó mỗi cách xếp cần đếm là một chỉnh hợp không lặp chập 4 từ 10. Vậy số cách xếp cần đếm là $P_{10}^4 = 10.9.8.7 = 5040$.

Chỉnh hợp không lặp

- **Chú ý:** Để giải ví dụ 2 có thể lập luận trực tiếp theo nguyên lý nhân:
- Ta lần lượt xếp các học sinh vào chỗ ngồi.
  - Học sinh thứ nhất có 10 cách xếp
  - Tiếp đến học sinh thứ hai có thể xếp vào 1 trong 9 chỗ còn lại, ...
- Theo nguyên lý nhân có 10.9.8.7 cách xếp

Hoán vị

- **Định nghĩa.** Ta gọi hoán vị từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm n thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng hoán vị từ n phần tử là P_n.
- Theo định nghĩa, một hoán vị từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in X, i = 1, 2, ..., n, a_i \neq a_j, i \neq j.$$

- Rõ ràng $P_n = P_n^n$. Vì vậy, ta có
- Định lý 3. $P_n = P_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$

Hoán vị

- **Ví dụ 1**. 6 ngời đứng xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí bao nhiêu kiểu?
- **Giải**: Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 ngời. Từ đó nhận đợc số kiểu ảnh có thể bố trí là 6! = 720.
- **Ví dụ 2.** Cần bố trí việc thực hiện *n* chơng trình trên một máy vi tính. Hỏi có bao nhiêu cách?
- **Giải**: Đánh số các chơng trình bởi 1, 2,..., *n*. Mỗi cách bố trí việc thực hiện các chơng trình trên máy có thể biểu diễn bởi một hoán vị của 1, 2, ..., *n*. Từ đó suy ra số cách bố trí cần tìm là *n*!

Hoán vị

- **Ví dụ 3.** Có bao nhiêu song ánh từ tập n phần tử X vào chính nó? (Mỗi song ánh như vậy được gọi là một phép thế).
- **Giải.** Mỗi song ánh f cần đếm đợc xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$, trong đó $f(u_i) \in V$, i=1, 2, ..., n, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$. Từ đó nhận đợc số cần tìm là $n!$
- **Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách bố trí n thợ thực hiện n việc sao cho mỗi thợ thực hiện một việc và mỗi việc do đúng một thợ thực hiện
- **Giải:** $n!$

Tổ hợp

- **Định nghĩa.** Ta gọi tổ hợp chập m từ n phần tử của X là bộ không có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng tổ hợp chập m từ n phần tử là C_n^m (đôi khi ta sẽ sử dụng ký hiệu $C(n,m)$)
- Theo định nghĩa, một tổ hợp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi **bộ không có thứ tự**

$$\{a_1, a_2, ..., a_m\},\ a_i \in X,\ i = 1, 2, ..., m,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$

- Với giả thiết $X=\{1, 2,...,n\}$, một tổ hợp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi **bộ có thứ tự**

$$(a_1, a_2, ..., a_m),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, ..., m,\ 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_m \leq n.$$

Tổ hợp

- Việc đếm các tổ hợp có khó khăn hơn so với việc đếm các cấu hình đã trình bày, tuy nhiên cách đếm dới đây cho biết cách vận dụng các nguyên lý cùng với các kết quả đếm đã biết trong việc đếm một cấu hình mới.
- Xét tập hợp tất cả các chỉnh hợp không lặp chập *m* của *n* phần tử. Chia chúng thành những lớp sao cho hai chỉnh hợp thuộc cùng một lớp chỉ khác nhau về thứ tự. Rõ ràng các lớp này là một phân hoạch trên tập đang xét và mỗi lớp nh thế là tơng ứng với một tổ hợp chập *m* của *n*. Số chỉnh hợp trong mỗi lớp là bằng nhau và bằng *m*! (số hoán vị). Số các lớp là bằng số tổ hợp chập *m* của *n*. Theo nguyên lý cộng, tích của m! với số này là bằng số các chỉnh hợp không lặp chập m của *n*, nghĩa là bằng *n*(*n*-1)...(*n*-*m*+1). Từ đó nhận đợc số tổ hợp chập *m* của *n* là

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} \quad hay \quad \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Tổ hợp

- Định lý 4.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ (còn ký hiệu là } C(n,m) \text{ hay } \binom{n}{m})$$

- $C(n,m)$ được gọi là hệ số tổ hợp.
- Khi nhận xét rằng, giá trị của phép chia trong công thức của định lý 4 là một số nguyên, ta nhận đợc một kết quả lý thú trong số học: *Tích của k số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng chia hết cho k*!.

Tổ hợp

- **Ví dụ 1**. Có *n* đội bóng thi đấu vòng tròn. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?
- **Giải**: Cứ 2 đội thì có một trận. Từ đó suy ra số trận đấu sẽ bằng số cách chọn 2 đội từ *n* đội, nghĩa là bằng

$$C(n,2) = n(n-1)/2.$$

- **Ví dụ 2**. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đờng chéo của một đa giác lồi n ($n \geq 4$) đỉnh nằm ở trong đa giác, nếu biết rằng không có ba đờng chéo nào đồng quy tại điểm ở trong đa giác?
- **Giải**: Cứ 4 đỉnh của đa giác thì có một giao điểm của hai đờng chéo nằm trong đa giác. Từ đó suy ra số giao điểm cần đếm là

$$C(n,4) = n(n-1)(n-2)(n-3)/24.$$

Bài toán chia kẹo

Giả sử k và n là các số nguyên không âm. Hỏi phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm?

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n;$$
$$t_1, t_2, \cdots, t_k \in Z_+$$

Nội dung thực tế:

Cần chia n cái kẹo cho k em bé B_1, B_2, …,B_k. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

Bài toán chia kẹo

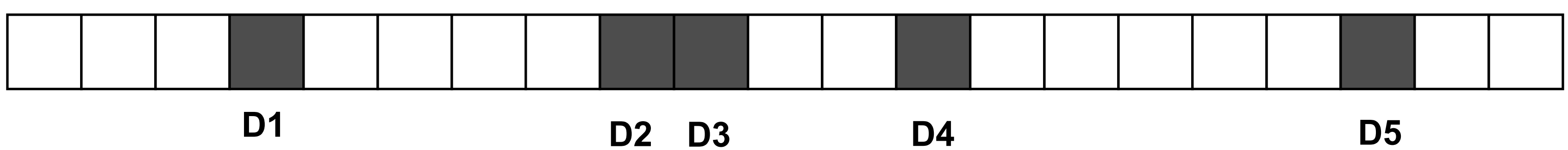
- Cần thả n quả bóng giống nhau vào k phòng: Room1, Room2, …, Roomk. Hỏi có bao nhiêu cách phân bổ khác nhau?
- Nếu gọi t_j là số lượng quả bóng thả vào Room$j$, $j = 1, 2, ..., n$; thì vấn đề đặt ra dẫn về bài toán: Hỏi phương trình sau đây

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n$$

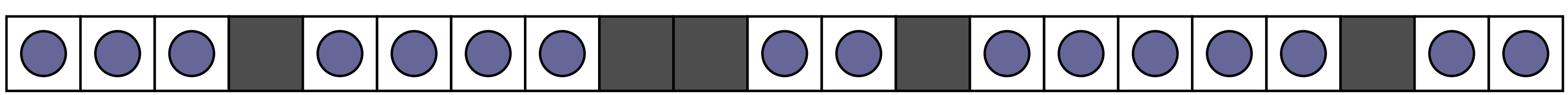
có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Giải bài toán chia kẹo

- Xét dãy $n+k$-1 hộp. Tô k-1 hộp nào đó bởi màu xám; các hộp xám này sẽ là vách ngăn: D1, D2, D(k-1).
- Ví dụ: với n=16, k=6

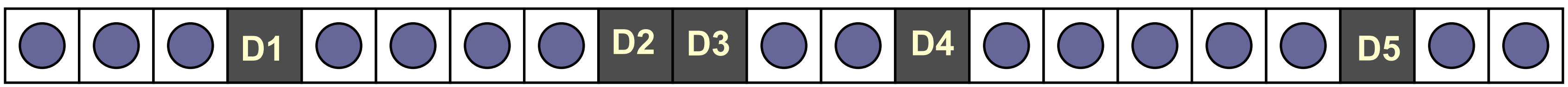


- Thả n quả bóng vào n hộp còn lại, mỗi hộp 1 quả.

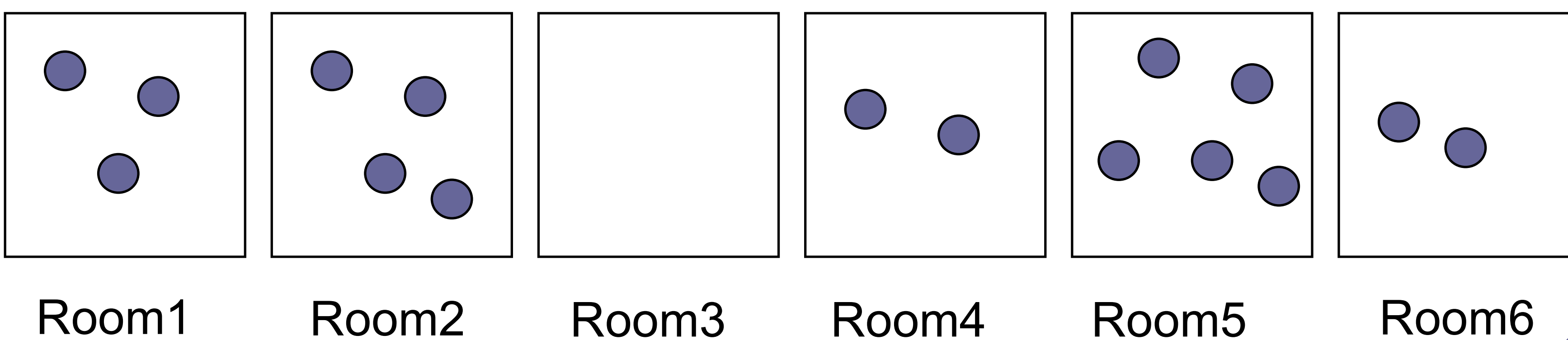


Giải bài toán chia kẹo

- Ví dụ, với n=16, k=6



- Thả các quả bóng trước vách ngăn D1 vào Room1, các quả bóng giữa vách ngăn D1 và D2 vào Room2, vân vân, và cuối cùng các quả bóng sau D(k-1) vào Room(k).



Giải bài toán chia kẹo

- Như vậy, rõ ràng tồn tại tương ứng 1-1 giữa một cách phân bổ các quả bóng và một cách chọn k-1 hộp trong số n+k-1 hộp làm vách ngăn.
- Do có tất cả

$$C_{n+k-1}^{k-1}$$

cách chọn k-1 hộp từ n+k-1 hộp, nên đó cũng chính là số cách phân bổ n quả bóng vào k phòng, cũng chính là số cách chia n cái kẹo cho k em bé và cũng chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n$$

Giải bài toán chia kẹo

- **Bài toán chia kẹo 2.** Có bao nhiêu cách chia n cái kẹo cho k em bé mà trong đó mỗi em được ít nhất một cái? Hay tương đương: Hỏi phương trình sau đây :

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_k = n.$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- Trước hết chia cho mỗi em 1 cái kẹo, n-k cái kẹo còn lại sẽ được chia cho k em bé. Bài toán dẫn về: Hỏi có bao nhiêu cách chia n-k cái kẹo cho k em bé. Sử dụng kết quả bài trước, ta có đáp số cần tìm là**:**

$$C_{n-1}^{k-1}$$

Hệ số tổ hợp

- Dới đây là một vài tính chất của các hệ số tổ hợp:

a) Đối xứng

$$C(n,m) = C(n,n\text{-}m)$$

b) Điều kiện đầu

$$C(n,0) = 1;\ \ C(n,n) = 1,\ n \geq 0$$

c) Công thức đệ qui

$$C(n,m) = C(n\text{-}1,m) + C(n\text{-}1,\ m\text{-}1),\ \ n > m > 0$$

- Điều kiện đầu suy trực tiếp từ định nghĩa của hệ số tổ hợp. Các tính chất còn lại có thể chứng minh nhờ sử dụng công thức trong định lý 4.

Tổ hợp

- Từ b) và c), ta có thể tính tất cả các hệ số tổ hợp chỉ bằng phép cộng. Các hệ số này được tính và viết lần lượt theo từng dòng (mỗi dòng ứng với một giá trị n=0, 1, ...), trên mỗi dòng chúng được tính và viết lần lượt theo từng cột (mỗi cột ứng với một giá trị m = 0, 1, ..., n) theo bảng tam giác dưới đây:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & C_n^0 & & C_n^1 & & \cdots & & C_n^{n-1} & & C_n^n & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

- Bảng này đợc gọi là *tam giác Pascal*.

Tổ hợp

- Tam giác Pascal, n=8

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Tổ hợp

- Các hệ số tổ hợp có liên quan chặt chẽ với việc khai triển luỹ thừa của một nhị thức. Thật vậy, trong tích

  $(x+y)^n = (x+y)\,(x+y)\ldots(x+y)$

  hệ số của $x^m y^{n-m}$ sẽ là số cách chọn m nhân tử $(x + y)$ mà từ đó ta lấy ra x và đồng thời trong n-m nhân tử còn lại ta lấy ra y, nghĩa là

$$(x+y)^n = C_n^0 y^n + \ldots + C_n^m x^m y^{n-m} + \ldots + C_n^n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$$

Công thức trên đợc gọi là *khai triển nhị thức Newton* và các hệ số tổ hợp còn đợc gọi là các *hệ số nhị thức*.

Tổ hợp

- Trong công thức Niuton đặt y=1 ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (*)$$

- Rất nhiều đẳng thức về hệ số tổ hợp đợc suy từ (*). Chẳng hạn, trong (*) chọn x =1 ta đợc:

$$C(n,0) + C(n,1) + \dots + C(n,n) = 2^n,$$

tức là nhận đợc kết quả đã biết: số các tập con của một n-tập bằng 2^n, còn nếu chọn x = -1 ta đợc:

$$C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \dots + (-1)^n C(n,n) = 0,$$

tức là số các tập con chẵn (có số phần tử là số chẵn) bằng các số tập con lẻ và bằng 2^{n-1}.

- Nhiều tính chất của hệ số tổ hợp có thể thu đợc từ (*) bằng cách lấy đạo hàm hoặc tích phân theo x hai vế của đẳng thức này một số hữu hạn lần, sau đó gán cho x những giá trị cụ thể.

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

3. Nguyên lý bù trừ
(The inclusion-exclusion principle)

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ áp dụng

3.1. Phát biểu nguyên lý

- Nguyên lý bù trừ trong trường hợp hai tập:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$

  - Giả sử A có 5 phần tử, B có 3 phần tử và có 1 phần tử thuộc vào cả A lẫn B
  - Khi đó số phần tử của hợp hai tập là 5+3-1 = 7, chứ không phải là 8
- **CM:**

Nguyên lý bù trừ

- Mở rộng cho trường hợp 3 tập: Giả sử A, B, C là ba tập bất kỳ. Khi đó:

$|A \cup B \cup C|$

$= |(A \cup B) \cup C)|$

$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|$

Vậy

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|$ (2)

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp!

Nguyên lý bù trừ

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|$ **(2)**

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp:

- Trong tổng của ba số hạng đầu tiên các phần tử chung của A và B được tính hai lần, vì vậy phải trừ bớt đi một lần. Tương tự như vậy đối với các phần tử chung của A và C và các phần tử chung của B và C.
- Thế nhưng, trừ như vậy là hơi quá, bởi vì những phần tử chung của cả ba tập A, B và C chưa được tính đến trong tổng của 6 số hạng đầu tiên. Vì vậy phải cộng bù lại.

Nguyên lý bù trừ

- **Định lý.** *Giả sử* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *là các tập hữu hạn. Khi đó*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{m-1} N_m$$

trong đó

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(N_k là tổng số phần tử của tất cả các tập là giao của k tập lấy từ m tập đã cho, nói riêng

$$N_1 = N(A_1) + \ldots + N(A_m),$$

$$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \,).$$

Nguyên lý bù trừ

- **Chứng minh.**
- Chú ý rằng, số các giao của k tập lấy từ m tập bằng $C(m,k)$, $k = 1,2,...,m$.
- Để chứng minh công thức của nguyên lý bù trừ, ta sẽ tính xem mỗi phần tử của tập $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ đợc đếm bao nhiêu lần trong vế phải:
- Xét một phần tử tuỳ ý $a \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$. Giả sử a là phần tử của k tập trong số m tập đã cho. Khi đó a đợc đếm ở vế phải của công thức

$$C(k,1) - C(k,2) + ... + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

lần. Do

$$C(k,1) - C(k,2) + ... + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

$$= 1 - [C(k,0) - (C(k,1) - C(k,2) + ... + (-1)^{k-1}C(k,k))] = 1 - (1-1)^k$$

$$= 1$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng

Nguyên lý bù trừ

- Bây giờ ta đồng nhất tập A_k với tính chất A_k cho trên một tập X nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của X không thoả mãn bất cứ một tính chất A_k nào cả.
- Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm. Do $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ là tập tất cả các phần tử của X thoả mãn ít nhất một trong số m tính chất đã cho, nên ta có:

$$\overline{N} = N(X) - N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$$
$$= N(X) - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^m N_m$$

  trong đó N_k là tổng các phần tử của X thoả mãn k tính chất lấy từ m tính chất đã cho.
- Công thức thu đợc cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_k trong trờng hợp các số này dễ tính toán hơn.

3. Nguyên lý bù trừ
(The inclusion-exclusion principle)

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ áp dụng

Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 1.** Hỏi trong tập $X = \{1, 2, ..., 10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 7?
- **Giải.** Gọi

$$A_i = \{\, x \in X : x \text{ chia hết cho } i \,\}\ ,\ i = 3, 4, 7.$$

- Khi đó $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập các số trong X chia hết cho ít nhất một trong 3 số 3, 4, 7, suy ra số lợng các số cần đếm sẽ là

$$N(X) - N(A_3 \cup A_4 \cup A_7) = 10000 — (N_1 - N_2 + N_3).$$

- Ta có

$$N_1 = N(A_3) + N(A_4) + N(A_7)$$

$$= [10000/3] + [10000/4] + [10000/7]$$

$$= 3333 + 2500 + 1428 = 7261,$$

Nguyên lý bù trừ

$N_2 = N(A_3 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_7) + N(A_4 \cap A_7)$

$= [10000/(3\times4)] + [10000/(3\times7)] +$
$[10000/(4\times7)]$

$= 833 + 476 + 357 = 1666,$

$N_3 = N(A_3 \cap A_4 \cap A_7) = [10000/(3\times4\times7)\ ] = 119,$

ở đây ký hiệu [r] để chỉ số nguyên lớn nhất không vợt quá r.

- Từ đó số lợng các số cần đếm là

  10000 - 7261 + 1666 - 119 = 4286.

Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 2.** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11?
- **Giải**. Dễ thấy là số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 là $2^8 = 256$ và số xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11 là $2^8 = 256$. Ngoài ra, số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 và kết thúc bởi 11 là $2^6 = 64$. Theo nguyên lý bù trừ suy ra số xâu nhị phân hoặc bắt đầu bởi 00 hoặc kết thúc bởi 11 là

$$256 + 256 - 64 = 448.$$

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- **Bài toán bỏ th**. Có n lá th và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá th vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá th nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?
- **Giải**: Đánh số các lá th từ 1 đến n, các phong bì tơng ứng với chúng cũng đợc đánh số từ 1 đến n. Mỗi cách bỏ th vào phong bì có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự

$$(p_1, p_2, ..., p_n),$$

trong đó p_i là phong bì bỏ lá thứ thứ i. Từ đó suy ra tồn tại tơng ứng 1-1 giữa một cách bỏ th vào phong bì với một hoán vị của n số. Vậy có tất cả n! cách bỏ th.

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ th sao cho không có lá th nào đúng địa chỉ.
- Gọi X là tập hợp tất cả các cách bỏ th và A_k là tính chất lá th thứ k bỏ đúng địa chỉ. Khi đó, theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{N} = N(X) - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n$$

trong đó $\overline{N}$ là số cần tìm, $N(X) = n!$, còn N_k là số tất cả các cách bỏ th sao cho có k lá th đúng địa chỉ.

Nguyên lý bù trừ: Bài toán bỏ thư

- Chú ý là

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

- nghĩa là, N_k là tổng theo mọi cách lấy k lá th từ n lá, với mỗi cách lấy k lá th, có $(n-k)!$ cách bỏ trong đó k lá này đúng địa chỉ, ta nhận đợc:

$$N_k = C(n, k).(n-k)! = n! / k!$$

- Do đó

$$\overline{N} = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

- Vậy xác suất cần tìm là:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Nguyên lý bù trừ

- Một điều lý thú là xác suất này dần đến e^{-1} (nghĩa là còn lớn hơn 1/3) khi n khá lớn. Số trong bài toán trên đợc gọi là *số mất thứ tự* và đợc ký hiệu là D_n. Dới đây là một vài giá trị của D_n, cho ta thấy D_n tăng nhanh thế nào so với n:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_n	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	4890741

Số lượng toàn ánh

Giả sử $A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ và $B=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Trong các phần trước ta đã chứng minh:

- Số lượng ánh xạ từ A vào B là n^m
- Số lượng đơn ánh từ A vào B là $n(n-1)...(n-m+1)$ $(n \geq m)$.
- Số lượng song ánh từ A vào B là $n!$ $(n=m)$.

Bây giờ giả sử $m \geq n$, ta cần đếm số lượng toàn ánh từ A vào B.

Nhắc lại: Ánh xạ f từ A vào B là toàn ánh nếu với mỗi phần tử b thuộc B đều tìm được a thuộc A sao cho $f(a)=b$. (Do mỗi phần tử của A qua ánh xạ f được đặt tương ứng với đúng một phần tử của B, nên muốn có toàn ánh từ A vào B thì rõ ràng ta phải có $m \geq n$.)

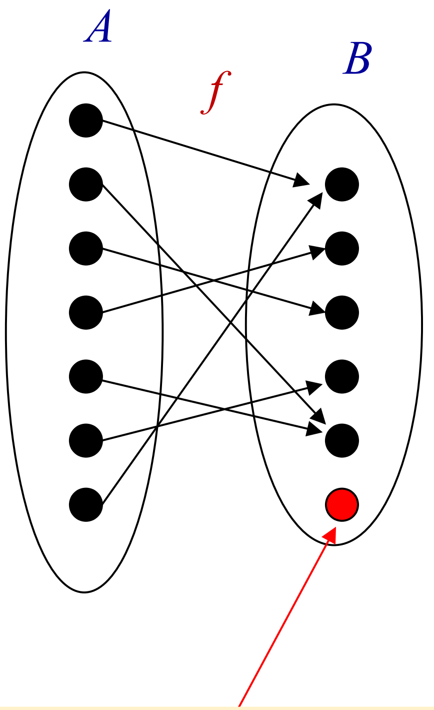
Số lượng toàn ánh

Ta muốn tất cả b_i đều thuộc miền giá trị của f. Gọi P_i là tính chất "b_i không nằm trong miền giá trị của f".

Khi đó ta cần đếm số ánh xạ không có bất cứ tính chất nào trong số các tính chất $P_1, \ldots, P_n$.

Ký hiệu:

P_i = tập các ánh xạ từ A vào B có tính chất P_i , $i = 1, 2, \ldots, n$.



Không tồn tại điểm không có mũi tên đi vào

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Số lượng toàn ánh

- Theo nguyên lý bù trừ số lượng toàn ánh cần đếm là:

  $N - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n$.

- Ta có:
  - N - số ánh xạ từ m-tập A vào n-tập B: n^m
  - Do $N(P_i)$ - số ánh xạ không có b_i trong miền giá trị, nên $N(P_i) = (n\text{-}1)^m$, do đó $N_1 = C(n,1)\ (n\text{-}1)^m$
  - Do $N(P_i \cap P_j)$ - số ánh xạ không có b_i và b_j trong miền giá trị, nên $N(P_i \cap P_j) = (n\text{-}2)^m$, do đó $N_2 = C(n,2)\ (n\text{-}2)^m$.
  - Tổng quát ta có: $N(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k}) = (n - k)^m$

    dó đó $N_k = C(n,k)\ (n - k)^m$.

- Từ đó ta có số lượng toàn ánh là:

  $n^m - C(n,1)(n\text{-}1)^m + C(n,2)(n\text{-}2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n\text{-}1)1^m$.

Số lượng toàn ánh

- Ta viết gọn công thức

$n^m – C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m – ...+ (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m.$

dưới dạng sau đây:

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m$$

$$= C_n^0(n-0)^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m + (-1)^n C_n^n 0^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

4. Công thức đệ qui

- Công thức đệ qui là công thức cho phép tính giá trị của các đại lượng theo từng bước, dựa vào các giá trị tính ở các bước trước và một số giá trị đầu.
- Là một kỹ thuật quan trọng cho phép giải nhiều bài toán đếm

4. Công thức đệ qui

- 4.1. Xây dựng công thức đệ qui
- 4.2. Giải công thức đệ qui

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 1.** Xây dựng công thức đệ qui cho $C(n,k)$ - số lượng tập con k phần tử của tập n phần tử X.
- **Giải:**
- Theo định nghĩa

$$C(n,0) = 1 \text{ và } C(n,n) = 1 \qquad (1)$$

- Giả sử $n > k > 0$, ta xây dựng công thức đệ qui để tính $C(n,k)$. Cố định một phần tử $x \in X$. Phân tập các tập con k phần tử của X ra thành 2 tập:
  - A – tập các tập con k phần tử có chứa x
  - B – tập các tập con k phần tử không chứa x

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các tập con k phần tử của X. Do đó, theo nguyên lý cộng:

$$C(n,k) = |A| + |B|.$$

- Ta có:
  - Do mỗi tập con trong A có chứa x, nên k-1 phần tử còn lại của nó là một tập con k-1 phần tử của tập $X \setminus \{x\}$, suy ra

$$|A| = C(n-1,k-1)$$

  - Tương tự như vậy,

$$|B| = C(n-1, k)$$

- Vậy,

$$C(n,k) = C(n-1, k-1) + C(n-1,k), \quad n > k > 0 \qquad (2)$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Công thức đệ qui (2) cùng với điều kiện đầu (1) cho phép tính giá trị của $C(n,k)$ với mọi giá trị của n và k.
- Công thức đệ qui (2) cho phép viết hàm đệ qui sau đây để tính giá trị của $C(n,k)$:

```
function C(n,k: integer): longint;
begin
     if (k=0) or (k=n) then C:=1
     else C:= C(n-1,k-1) + C(n-1,k);
end;
```

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Hàm vừa xây dựng không cho một cách tính hiệu quả. Thực vậy, nếu gọi $C^*(n,k)$ là số phép toán "gán giá trị" phải thực hiện bởi lệnh gọi hàm $C(n,k)$, dễ thấy

$$C^*(n,0) = 1;\ C^*(n,n) = 1$$

$$C^*(n,k) = C^*(n-1, k-1) + C^*(n-1,k)+1,\quad n > k > 0$$

tức là $C^*(n,k)$ thoả mãn công thức đệ qui tương tự như hệ số tổ hợp $C(n, k)$, do đó:

$$C^*(n,k) \sim n!/[k!(n-k)!]$$

và giá trị này là rất lớn khi n lớn và $k = n/2$.

- Dễ dàng xây dựng một hàm lặp để tính giá trị của $C(n,k)$ một cách hiệu quả hơn.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 2**. Trên mặt phẳng, kẻ n đờng thẳng sao cho không có 2 đờng nào song song và 3 đờng nào đồng quy. Hỏi mặt phẳng đợc chia thành mấy phần ?
- **Giải**: Gọi số phần mặt phẳng đợc chia bởi n đờng thẳng là S_n. Rõ ràng

$$S_1 = 2, \qquad (3)$$

- Xét $n > 1$, ta tìm công thức đệ qui cho S_n.

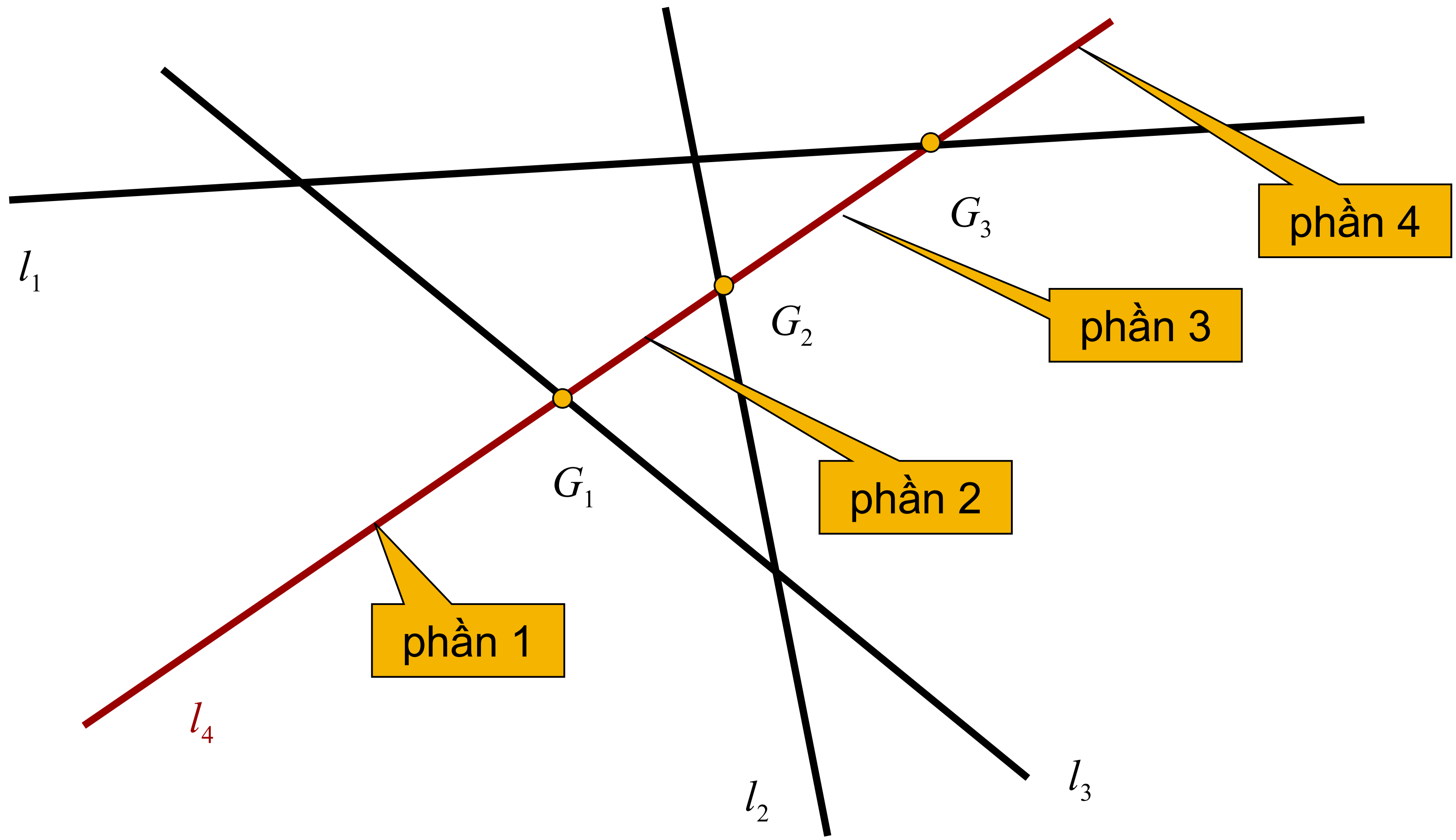
4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Giả sử đã kẻ n-1 đờng thẳng, khi đó mặt phẳng đợc chia ra làm S_{n-1} phần. Bây giờ kẻ thêm đờng thẳng thứ n. Đờng thẳng này cắt n-1 đờng thẳng đã vẽ tại n-1 giao điểm. Các giao điểm này chia đờng thẳng thứ n ra làm n phần, mỗi phần nh vậy sẽ chia một phần nào đó sinh bởi n-1 đờng thẳng vẽ trớc đó ra làm hai phần. Từ đó suy ra, sau khi vẽ đờng thẳng thứ n số phần tăng thêm là n. Từ đó nhận đợc công thức đệ qui

$$S_n = S_{n-1} + n,\ \ n \geq 2$$

(4)

4.1 Xây dựng công thức đệ qui



4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Để tìm công thức trực tiếp, ta cộng các hệ thức $S_k = S_{k-1} + k$ với $k = 2, \ldots, n$.

$$\cancel{S_1} = 2$$

$$\cancel{S_2} = \cancel{S_1} + 2$$

$$\cancel{S_3} = \cancel{S_2} + 3$$

$$\ldots$$

$$\cancel{S_{n-1}} = \cancel{S_{n-2}} + (n-1)$$

$$S_n = \cancel{S_{n-1}} + n$$

$$S_n = 2 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = n(n+1)/2 + 1 = (n^2+n+2)/2$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 3.** Xây dựng công thức đệ qui cho f_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ hai phần tử 0, 1 (cũng chính là xâu nhị phân độ dài n) không chứa hai số 0 liền nhau.
- **Giải.** Ta có

$$f_1 = 2; f_2 = 3$$

Giả sử $n > 2$. Phân tập các chỉnh hợp cần đếm ra thành 2 tập:

  - A – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa 1 ở vị trí đầu tiên;
  - B – tập các chỉnh hợp cần đếm chứa 0 ở vị trí đầu tiên;

- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các chỉnh hợp cần đếm.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Do đó, theo nguyên lý cộng:

$$f_n = |A| + |B|.$$

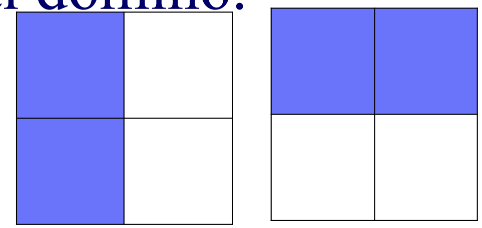
- Ta có:
  - Do mỗi chỉnh hợp trong A chứa 1 ở vị trí đầu tiên, nên n-1 phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài n-1, suy ra: $|A| = f_{n-1}$
  - Do mỗi chỉnh hợp trong B chứa 0 ở vị trí đầu tiên, nên vị trí thứ hai của nó phải là 1 còn n-2 phần tử còn lại sẽ tạo thành một chỉnh hợp cần đếm độ dài n-2, suy ra: $|B| = f_{n-2}$
- Vậy, ta thu được công thức đệ qui

$$f_1 = 2; f_2 = 3;$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n > 2 \qquad (5)$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 4.** Xây dựng công thức đệ qui cho Q_n là số lượng cách phủ lưới ô vuông kích thước $2\times n$ bằng các quân bài domino.



- **Giải.** Ta có

  $Q_1 = 1;\ Q_2 = 2$ (xem hình vẽ)

- Giả sử $n > 2$. Phân tập các cách phủ cần đếm ra thành 2 tập:
  - A – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi quân bài nằm đứng;
  - B – tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi quân bài nằm ngang.
- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các cách phủ cần đếm.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Do đó, theo nguyên lý cộng:

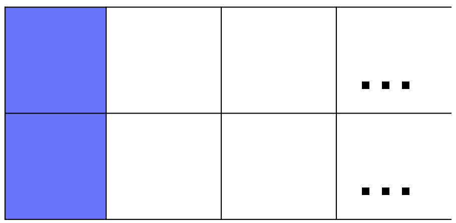
$$Q_n = |A| + |B|.$$

- Ta có:
  - $|A| = Q_{n\text{-}1}$
  - $|B| = Q_{n\text{-}2}$
- Vậy, ta thu được công thức đệ qui

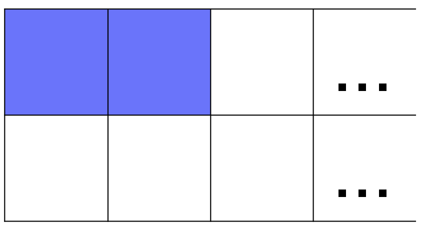
$$Q_1 = 1;\ Q_2 = 2;$$

$$Q_n = Q_{n\text{-}1} + Q_{n\text{-}2},\ \ n > 2 \qquad (6)$$

A



B



4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Ví dụ 5.** (Bài toán tháp Hà nội). Trò chơi tháp Hà nội đợc trình bày nh sau: "*Có 3 cọc a, b, c. Trên cọc a có một chồng gồm n cái đĩa đờng kính giảm dần từ dới lên trên. Cần phải chuyển chồng đĩa từ cọc a sang cọc c tuân thủ qui tắc: mỗi lần chỉ chuyển 1 đĩa và chỉ đợc xếp đĩa có đờng kính nhỏ hơn lên trên đĩa có đờng kính lớn hơn. Trong quá trình chuyển đợc phép dùng cọc b làm cọc trung gian*". Bài toán đặt ra là: Tìm công thức đệ qui cho h_n là số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để hoàn thành nhiệm vụ đặt ra trong trò chơi tháp Hà nội.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- **Giải: R**õ ràng:

$$h_1 = 1.$$

- Giả sử $n \geq 2$. Việc di chuyển đĩa gồm các bớc:

(i) Chuyển n-1 đĩa từ cọc a đến cọc b sử dụng cọc c làm trung gian. Bớc này đợc thực hiện nhờ giả thiết quy nạp.

(ii) Chuyển 1 đĩa (đĩa với đờng kính lớn nhất) từ cọc a đến cọc c.

(iii) Chuyển n-1 đĩa từ cọc b đến cọc c (sử dụng cọc a làm trung gian). Bớc này đợc thực hiện nhờ giả thiết quy nạp.

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Bớc (i) và (iii) đòi hỏi giải bài toán tháp Hà nội với n-1 đĩa, vì vậy số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện trong hai bớc này là $2h_{n-1}$. Do đó ta có công thức đệ qui sau:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1,\ n \geq 2.$$

- Sử dụng công thức đệ qui và điều kiện đầu vừa tìm đợc đối với h_n ta có thể dễ dàng chứng minh bằng qui nạp là

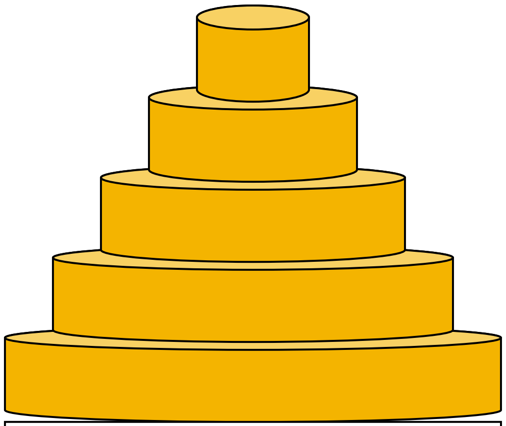
$$h_n = 2^n - 1,\ n \geq 1.$$

4.1 Xây dựng công thức đệ qui

- Ta có thể tìm được công thức trực tiếp cho h_n bằng phương pháp thế:

$$
\begin{aligned}
h_n &= 2\,h_{n-1} + 1 \\
&= 2\,(2\,h_{n-2} + 1) + 1 \qquad = 2^2\,h_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2\,h_{n-3} + 1) + 2 + 1 \qquad = 2^3\,h_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\ldots \\
&= 2^{n-1}\,h_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \qquad \text{(do } h_1 = 1\text{)} \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Tower of Hanoi: n=5



Cọc a	Cọc c	Cọc b

4. Công thức đệ qui

- 4.1. Xây dựng công thức đệ qui
- 4.2. Giải công thức đệ qui

§4.2. Giải công thức đệ qui

- Ta hiểu việc giải công thức đệ qui là việc tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số thoả mãn công thức đệ qui đã cho.
- Chưa có phương pháp giải mọi công thức đệ qui.
- Sẽ xét phương pháp giải công thức đệ qui tuyến tính thuần nhất hệ số hằng (sẽ viết tắt là CTĐQ TTTNHSH)

§4.2. Giải công thức đệ qui

- **Định nghiã.** *Công thức đệ qui tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc k* là công thức đệ qui sau

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

trong đó c_i là các hằng số, và $c_k \neq 0$.

- Dãy số thoả mãn công thức đã cho là xác định duy nhất nếu đòi hỏi nó thoả mãn k điều kiện đầu

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1},$$

trong đó $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ là các hằng số.

- **Ví dụ:**

  1) $a_n = 4a_{n\text{-}1} + 2na_{n\text{-}3}$

  2) $h_n = 2h_{n\text{-}1} + 1$

  3) $b_n = 5b_{n\text{-}2} + 2(b_{n\text{-}3})^2$

  4) $q_n = 3\ q_{n\text{-}6} + q_{n\text{-}8}$

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Dãy số $\{a_n = r^n\}$ thoả mãn CTĐQ đã cho nếu r thoả mãn phương trình:

  $r^n = c_1 r^{n-1} + \ldots + c_k r^{n-k}$, hay (chuyển vế

  $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ và × với r^{k-n})
- Phương trình cuối cùng được gọi là *phương trình đặc trưng, còn nghiệm của nó* sẽ được gọi là *nghiệm đặc trưng* của CTĐQ TTTNHSH.
- Ta có thể sử dụng nghiệm đặc trưng để thu được công thức cho dãy số.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- **Định lý 1.** *Cho* c_1, c_2 *là các hằng số thực. Giả sử phương trình* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* r_1 *và* r_2*. Khi đó dãy số* $\{a_n\}$ *là nghiệm của công thức đệ qui*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1(r_1)^n + \alpha_2(r_2)^n \qquad (5)$$

$n = 0, 1, \ldots,$ *trong đó* α_1 , α_2 *là các hằng số.*

Giải CTĐQ TTTNHSH

- **Chứng minh.** Trớc hết ta chứng minh rằng nếu r_1 và r_2 là hai nghiệm phân biệt của phơng trình đặc trng, và α_1 , α_2 là các hằng số, thì dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức (5) là nghiệm của công thức đệ qui đã cho.
- Thực vậy, do r_1 và r_2 là nghiệm đặc trng nên

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2 \ ,$$

$$r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$$

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Từ đó suy ra

$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

$= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2})$

$= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2)$

$= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2$

$= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$= a_n$.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng nghiệm $\{a_n\}$ của công thức đệ qui $a_n = c_1\, a_{n\text{-}1} + c_2\, a_{n\text{-}2}$ luôn có dạng (5) với α_1, α_2 nào đó.
- Thực vậy, giả sử $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức đã cho với điều kiện đầu

$$a_0 = C_0\,,\ a_1 = C_1, \qquad (6)$$

- Ta chỉ ra rằng có thể tìm đợc các số α_1 , α_2 để cho (5) là nghiệm của hệ thức với điều kiện đầu này.

Giải CTĐQ TTTNHSH

- Ta có

  $a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$,

  $a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$.

- Hệ phơng trình tuyến tính phụ thuộc hai ẩn α_1, α_2 này có định thức là $r_2 — r_1 \neq 0$ (do $r_1 \neq r_2$) có nghiệm duy nhất

  $$\alpha_1 = (C_1 - C_0 r_2)/(r_1 - r_2), \quad \alpha_2 = (C_0 r_1 - C_1)/(r_1 - r_2).$$

- Với những giá trị của α_1 , α_2 vừa tìm đợc, dãy $\{a_n\}$ xác định theo (5) là nghiệm của hệ thức đã cho với điều kiện đầu (6). Do hệ thức đã cho cùng với điều kiện đầu (6) xác định duy nhất một dãy số, nên nghiệm của hệ thức đợc cho bởi công thức (5).

- Định lý đợc chứng minh.

Ví dụ

- Dãy Fibonaci trong toán học đợc định nghĩa bằng hệ thức truy hồi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2,$$

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Tìm công thức hiện cho F_n.

Leonardo Fibonacci
1170-1250

- **Giải:** Giải phơng trình đặc trng:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ta thu đợc hai nghiệm đặc trng

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ

- Do đó công thức hiện có dạng:

$$F_n = \alpha_1.(r_1)^n + \alpha_2.(r_2)^n$$

$F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$F_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 1$

trong đó α_1, α_2 là các hằng số cần xác định từ các giá trị ban đầu F_0, F_1. Giải hệ PTTT này, ta có:

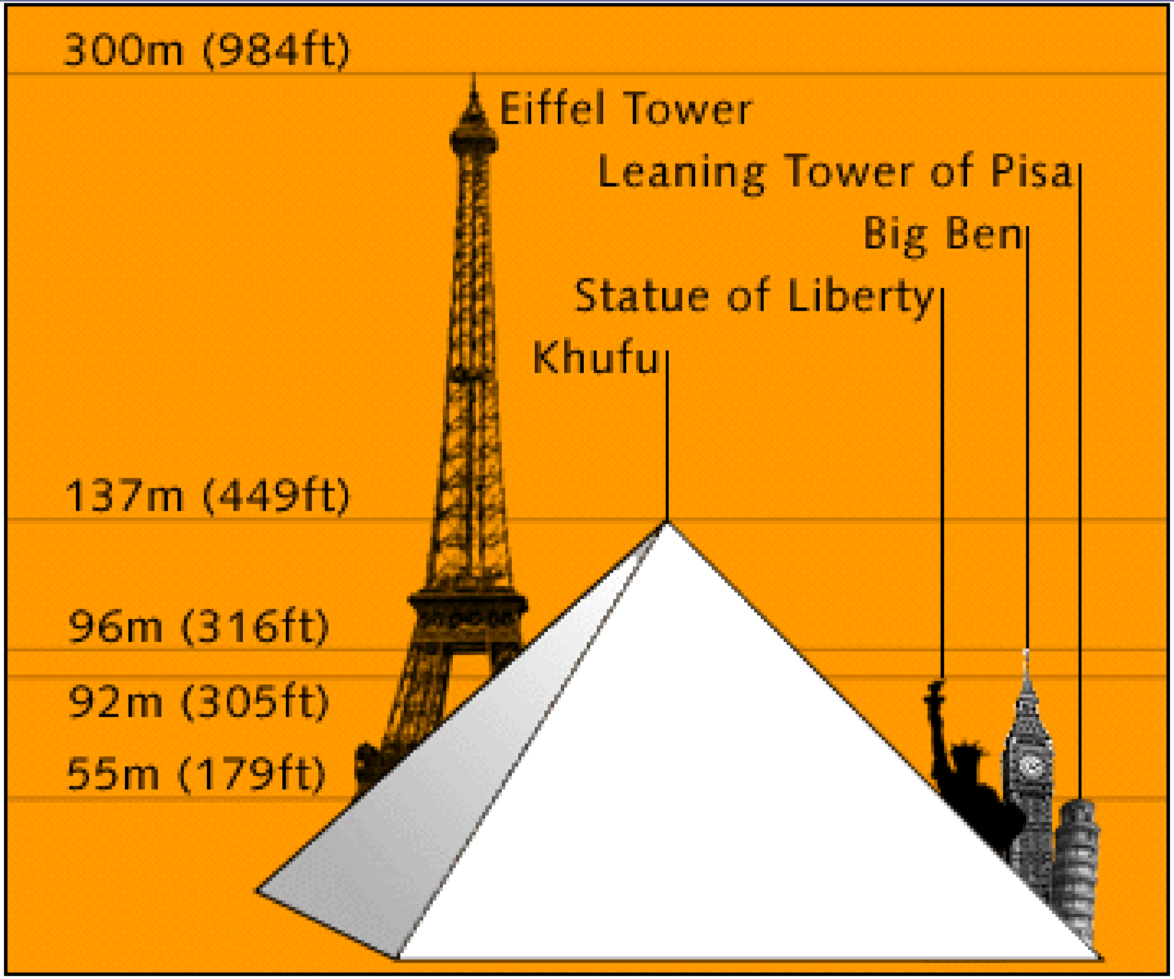
$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

và từ đó thu đợc

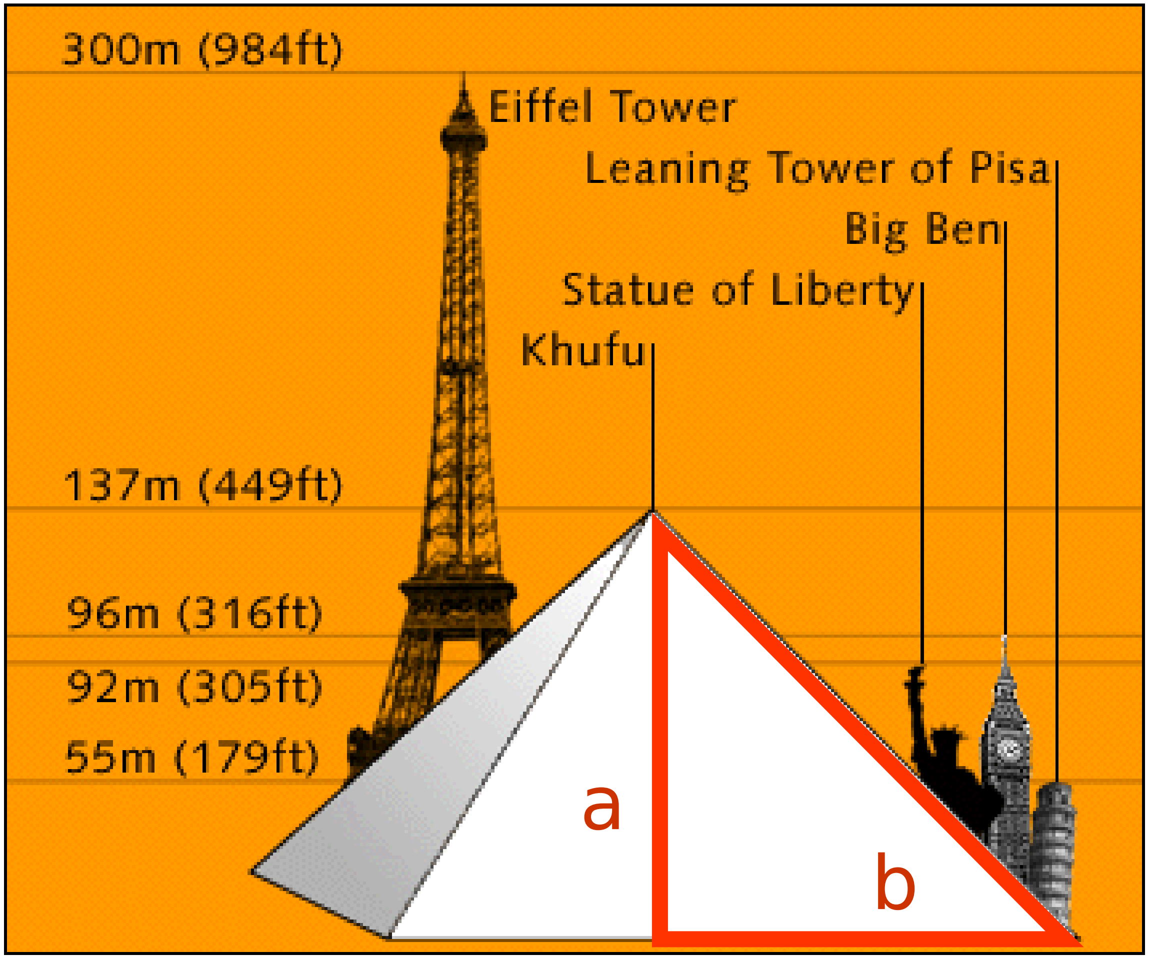
Công thức Muavre

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 0.$$

Great Pyramid at Gizeh

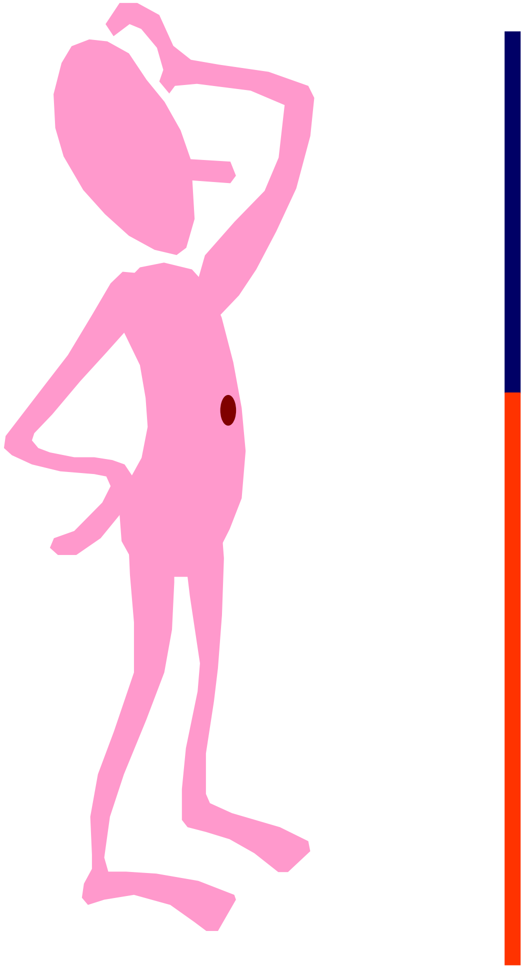


$$\frac{a}{b} = 1.618$$



300m (984ft)
Eiffel Tower
Leaning Tower of Pisa
Big Ben
Statue of Liberty
Khufu
137m (449ft)
96m (316ft)
92m (305ft)
55m (179ft)
a
b

Tỷ lệ giữa chiều cao và lưng



Định nghĩa tỷ lệ vàng ϕ (Euclid)

- Tỷ lệ thu được khi chia đoạn thẳng ra 2 phần không bằng nhau sao cho tỷ lệ giữa đoạn thẳng đã cho và đoạn con lớn hơn là bằng tỷ lệ giữa đoạn lớn hơn và đoạn nhỏ hơn.

$$\phi = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\phi^2 = \frac{AC}{BC}$$

$$\phi^2 - \phi = \frac{AC}{BC} - \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\boxed{\phi^2 - \phi - 1 = 0}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

1
□

Trường hợp nghiệm kép

- **Định lý 2.** *Cho c_1, c_2 là các hằng số thực, $c_2 \neq 0$. Giả sử phương trình $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có nghiệm kép r_0. Khi đó dãy số $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức đệ qui*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

$n = 0, 1, \ldots,$ *trong đó α_1 , α_2 là các hằng số.*

Ví dụ

- Tìm nghiệm cho công thức đệ qui

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$$

  với điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$.

- **Giải:** PTĐT $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$. Do đó nghiệm của hệ thức có dạng:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n\, 3^n.$$

- Để tìm α_1, α_2 , sử dụng điều kiện đầu ta có

$$a_0 = 1 = \alpha_1 ,$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 . 3 + \alpha_2 . 3.$$

- Giải hệ này ta tìm đọc $\alpha_1 = 1$ *và* $\alpha_2 = 1$. Từ đó nghiệm của hệ thức đã cho là:

$$\mathbf{a_n = 3^n + n\, 3^n}\ .$$

Trường hợp tổng quát

- **Định lý 3.** *Cho* c_1, c_2, ..., c_n *là các số thực. Giả sử phơng trình đặc trng*

  $$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

  có k nghiệm phân biệt r_1, r_2, ..., r_k . *Khi đó dãy số* $\{a_n\}$ *là nghiệm của công thức*

  $$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

  khi và chỉ khi

  $$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

  với $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *trong đó* α_1, α_2, ..., α_k *là các hằng số.*

Ví dụ

- Tìm nghiệm của công thức đệ qui

$$a_n = 6\, a_{n-1} - 11\, a_{n-2} + 6\, a_{n-3}$$

với điều kiện đầu

$$a_0 = 2,\ \ a_1 = 5,\ \ a_2 = 15.$$

- **Giải:** Phơng trình đặc trng

$$r^3 - 6\, r^2 + 11\, r - 6 = 0$$

có 3 nghiệm $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Vì vậy, nghiệm có dạng

$$a_n = \alpha_1\, 1^n + \alpha_2\, 2^n + \alpha_3\, 3^n.$$

Ví dụ

- Sử dụng các điều kiện đầu ta có hệ phơng trình sau đây để xác định các hằng số α_1, α_2, α_3:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2.2 + \alpha_3.3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2.4 + \alpha_3.9.$$

- Giải hệ phơng trình trên ta thu đợc

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1 \textit{ và } \alpha_3 = 2.$$

- Vậy nghiệm của công thức đã cho là

$$a_n = 1 - 2^n + 2.\ 3^n\ .$$

Trường hợp tổng quát

- Xét CTĐQ TTTNHSH bậc *k*: $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$
- PTĐT của nó là:

$$r^k - \sum_{i=1}^{k} c_i r^{k-i} = 0$$

- **Định lý 4:** Nếu PTĐT có t nghiệm $r_1,\ldots,r_t$ với bội tương ứng là $m_1,\ldots,m_t$ ($m_1+\ldots+m_t=k$). Khi đó:

$$a_n = \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j \right) r_i^n$$

với $n \geq 0$, và α_{ij} là các hằng số.

Ví dụ

Giải công thức đệ qui:

$$c_n = -4c_{n-1} + 3c_{n-2} + 18c_{n-3}\,, \quad n \geq 3,$$

$$c_0 = 1;\ c_1 = 2;\ c_2 = 13.$$

Phơng trình đặc trng:

$$r^3 + 4r^2 - 3r - 18 = (r-2)(r+3)^2 = 0$$

Vậy nghiệm tổng quát của công thức:

$$c_n = a_{10}2^n + (a_{20} + a_{21}n)(-3)^n$$

trong đó a_{10}, a_{20}, a_{21} là các hằng số

Ví dụ

Các hằng số được xác định từ các điều kiện đầu:

$$0 = c_0 = a_{10} 2^0 + (a_{20} + a_{21} \cdot 0)(-3)^0 = a_{10} + a_{20}$$

$$2 = c_1 = a_{10} 2^1 + (a_{20} + a_{21} \cdot 1)(-3)^1 = 2a_{10} - 3a_{20} - 3a_{21}$$

$$13 = c_2 = a_{10} 2^2 + (a_{20} + a_{21} \cdot 2)(-3)^2 = 4a_{10} + 9a_{20} + 18a_{21}$$

Rút gọn ta thu được hệ

$$0 = a_{10} + a_{20}$$

$$2 = 2a_{10} - 3a_{20} - 3a_{21}$$

$$13 = 4a_{10} + 9a_{20} + 18a_{21}$$

Giải hệ ta nhận được: $a_{10} = 1, a_{20} = -1, a_{21} = 1$

Cuối cùng nghiệm của công thức là:

$$c_n = 2^n + (-1 + n)(-3)^n$$

Công thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

- Công thức đệ qui tuyến tính *không thuần nhất* hệ số hằng (Linear *nonhomogeneous* Recurrence Relation with constant coefficients) có chứa số hạng không thuần nhất $F(n)$ phụ thuộc vào n (và không phụ thuộc vào bất cứ a_i nào) :

$$\underbrace{a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}}_{\text{CTĐQ TTTNHSH tương ứng với công thức không thuần nhất}} + F(n)$$

Phần không thuần nhất

Giải công thức không thuần nhất (CTKTN)

- Kết quả sau đây là cơ sở để giải công thức không thuần nhất:
  - Nếu $a_n = p(n)$ là một nghiệm riêng của CTKTN:

$$a_n = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} \right) + F(n)$$

  - Khi đó mọi nghiệm của CTKTN đều có dạng:

$$a_n = p(n) + h(n),$$

trong đó $a_n = h(n)$ là nghiệm tổng quát của CTĐQ TTTNHSH tương ứng

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

Giải công thức không thuần nhất

- Từ đó ta có cách giải CTKTN sau đây:

(a) Tìm nghiệm tổng quát $h(n)$ của công thức thuần nhất tương ứng.

(b) Tìm nghiệm riêng $p(n)$ của CTKTN.

(c) Nghiệm của công thức không thuần nhất có dạng:

$$a_n = h(n) + p(n).$$

(d) Xác định các hằng số từ hệ phương trình thu được bởi đòi hỏi a_n thoả mãn các điều kiện đầu

Giải công thức không thuần nhất

- Tìm nghiệm riêng bằng cách nào?
- Để tìm nghiệm riêng có thể căn cứ vào dạng của phần không thuần nhất $F(n)$:
  - Nếu $F(n) = P(n) \times s^n$, trong đó $P(n)$ là đa thức của n còn s là hằng số và không là nghiệm đặc trưng, thì hãy tìm nghiệm riêng có dạng giống như $F(n)$.
  - Nếu $F(n) = P(n) \times s^n$, trong đó $P(n)$ là đa thức của n còn s là nghiệm đặc trưng với bội là m, thì hãy tìm nghiệm riêng dưới dạng $\boldsymbol{n^m \times Q(n) \times s^n}$

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n,\ n \geq 2,$

  $a_0 = 0;\ a_1 = 1$

- PT đặc trưng $r^2 - 5r + 6 = 0$ có nghiệm

  $r_1 = 3,\ r_2 = 2.$

- Do đó nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 3^n + c_2 2^n$.
- Do $F(n) = 7^n$ và 7 không là nghiệm đặc trưng nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

  $p(n) = C.7^n$.

Ví dụ

- Nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = C.7^n.$$

- Thay vào công thức ta có

$$C7^n = 5C7^{n-1} – 6C7^{n-2} + 7^n$$

- Từ đó tìm được

$$C = 49/20.$$

- Vậy

$$p(n) = (49/20)7^n.$$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát có dạng:

  $a_n = p(n) + h(n) = (49/20)7^n + c_1 3^n + c_2 2^n$.

- Các hằng số c_1, c_2 xác định từ hệ phương trình:

  $a_0 = c_1 + c_2 + 49/20 = 0$

  $a_1 = 3c_1 + 2c_2 + (49/20).7 = 1$

- ...

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

  $a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1;$

  $a_1 = 1.$

- PTĐT $r - 2 = 0$ có nghiệm $r=2$. Nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 2^n$.
- Do $F(n) = 1$, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

  $p(n) = C$.

- Thay vào công thức đã cho ta được: $C = 2C+1$. Từ đó tìm được $C = -1$. Vậy nghiệm riêng là

  $p(n) = -1.$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = c_1 2^n - 1.$$

- Hệ số c_1 xác định từ điều kiện đầu:

$$a_1 = c_1 2 - 1 = 1$$

- Do đó $c_1 = 1$.
- Vậy nghiệm của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = 2^n - 1,\ n \geq 1.$$

Ví dụ

- **Giải công thức đệ qui**

$$a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1;\ \ a_1 = 2.$$

- PTĐT $r - 1 = 0$ có nghiệm $r=1$. Nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 1^n$.
- Do $F(n) = n \times 1^n$, và 1 là nghiệm đặc trưng bội 1, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = (C_2 + C_3 n).n.$$

- Thay vào công thức đã cho ta được:

$$(C_2 + C_3 n).n = [C_2 + C_3(n-1)].(n-1) + n.$$

- Từ đó tìm được $C_2 = ½$ và $C_3 = ½$. Vậy nghiệm riêng là

$$p(n) = (n+1)n/2.$$

Ví dụ

- Nghiệm tổng quát của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = c_1 + (n+1)n/2\,.$$

- Hệ số c_1 xác định từ điều kiện đầu:

$$a_1 = c_1 + 1 = 2$$

- Do đó $c_1 = 1$.
- Vậy nghiệm của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = 1 + (n+1)n/2,\ n \geq 1.$$

Nhận xét

- Phương pháp giải công thức đệ qui TTTNHSH trình bày ở trên cho phép qui dẫn việc tìm nghệm của nó về việc tìm tất cả các nghiệm của đa thức bậc k.
- Việc tìm tất cả các nghiệm của một đa thức bậc tuỳ ý là vấn đề không đơn giản:
  - Ta có công thức để tìm nghiệm của đa thức bậc $k \leq 4$.
  - Nhưng không có công thức để tìm tất cả các nghiệm của đa thức bậc $k \geq 5$ (Định lý Aben).

Chương 1. BÀI TOÁN ĐẾM

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ qui
5. Hàm sinh

5. Hàm sinh (Generating Function)

- Giả sử $\{h_n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$ là một dãy số. Ta viết dãy này như là dãy vô hạn phần tử, tuy nhiên ta coi rằng nó bao gồm cả trường hợp dãy hữu hạn. Nếu $h_0, h_1, ..., h_m$ là dãy hữu hạn, thì ta sẽ biến nó thành dãy vô hạn bằng cách đặt $h_i = 0,\ i > m$.
- ***Định nghĩa.*** *Hàm sinh* $g(x)$ *của dãy số* $\{h_n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$ *là chuỗi vô hạn*

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i \ .$$

- Như vậy hàm $g(x)$ sinh ra dãy số đã cho như là dãy các hệ số của nó.
- Nếu dãy là hữu hạn thì sẽ tìm được m sao cho $h_i = 0,\ i > m$. Trong trường hợp này $g(x)$ là một đa thức bậc m.

Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Một trong những nguồn gốc dẫn đến định nghĩa hàm sinh chính là định lý về khai triển nhị thức: Hàm $g(x) = (1 + x)^m$ sinh ra dãy các hệ số tổ hợp

$$\{h_k = C(m, k), k=0, 1,..., m\}.$$

Bởi vì

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C(m,k)x^k$$

- **Ví dụ 2.** Hàm

$$g(x) = 1/(1-x)$$

sinh ra dãy

1, 1, 1, ...

- Dễ dàng chứng minh điều đó bằng cách thực hiện phép chia:

$$1/(1- x) = 1 + x + x^2 + ...$$

Ví dụ 3

- **Ví dụ 3.** Với $k > 0$, hàm

  $$g(x) = 1/(1-x)^k$$

  sinh ra dãy

  $$\{C(n+k-1, n): n = 0, 1, 2, ...\}.$$

- Như vậy hệ số thứ n sẽ là số khả năng chọn n vật từ k loại đồ vật.
- **Chứng minh.** Thực vậy, ta có

  $$1/(1-x)^k = [1/(1-x)]^k = (1 + x + x^2 + ...)^k.$$

- Nếu ta khai triển biểu thức này bằng cách thực hiện nhân phá ngoặc, thì số lần xuất hiện số hạng x^n sẽ bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình

  $$t_1 + t_2 + ... + t_k = n,$$

  mà như đã biết là bằng $C(n+k-1, n)$.

Ví dụ 3

- Ví dụ này có thể gợi ý cho ta cách giải nhiều bài toán đếm. Chẳng hạn xét hàm sinh

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\,(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4).$$

- Giả sử x^a, x^b, x^c tương ứng là các số hạng lấy từ các thừa số thứ nhất, hai, ba của vế phải, điều đó có nghĩa là $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$. Khi khai triển vế phải, các thừa số này sẽ cho ta số hạng x^n, với $n = a + b + c$.
- Như vậy hệ số của x^n trong $g(x)$ sẽ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$n = a + b + c \text{ thoả mãn } 0 \le a \le 3,\ 0 \le b \le 2,\ 0 \le c \le 4.$$

- Suy ra hệ số này cũng cho ta số cách chọn n bông hoa từ 3 bông cúc, 2 bông layơn và 4 bông hồng.

Ví dụ 3

- Tất nhiên việc sử dụng hàm sinh để giải bài toán đếm sẽ đòi hỏi nhiều tính toán khi thực hiện phép nhân các đa thức, và không thích hợp cho việc tính tay. Tuy nhiên, việc đó lại có thể thực hiện nhanh chóng trên máy tính, và vì thế hàm sinh sẽ là một công cụ hữu hiệu để giải nhiều bài toán đếm trên máy tính.
- Ta dẫn ra một số khai triển đại số rất hay sử dụng trong việc sử dụng hàm sinh:
  - $x^k/(1-x) = x^k(1 + x + x^2 + \ldots) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \ldots$
  - $(1-x^{k+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k.$
  - $1/(1-x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$
  - $x/(1-x^2) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots$

Ví dụ 4

- **Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách chọn ra n quả từ 4 loại quả: táo, chuối, cam và đào (mỗi loại đều có số lượng ít ra là n) mà trong đó có một số chẵn quả táo, số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam và ít ra 2 quả đào?
- **Giải.** Hàm sinh để giải bài toán này là

$$g(x) = (1+ x^2+x^4+x^6+\dots)\ (x+x^3+x^5+x^7+\dots)\ (1+x+x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4+\dots).$$

- Trong công thức trên có 4 thừa số để đếm số quả táo (các số mũ chẵn), chuối (số mũ lẻ), cam (chỉ có đến số mũ 4) và đào (số mũ bắt đầu từ 2). Từ đó

$$g(x) = [1/(1-x^2)]\ \ [x/(1-x^2)]\ \ [(1-x^5)/(1-x)]\ \ [x^2/(1-x)]$$

$$= [x^3(1-x^5)]/[(1-x^2)^2(1-x)^2].$$

- **Câu trả lời là:** Số cách cần đếm là hệ số thứ n trong khai triển $g(x)$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa. Tuy là chúng ta không có câu trả lời bằng số, nhưng sử dụng hàm xây dựng được ta có thể lập trình trên máy tính để đưa ra bảng đáp số cho các giá trị của n mong muốn.

Ví dụ 5

- **Ví dụ 5.** Tìm hàm sinh cho h_n là số cách chọn ra n quả từ 4 loại quả: táo, chuối, cam và đào (mỗi loại đều có số lượng ít ra là n) mà trong đó có một số chẵn quả táo, số lượng chuối chia hết cho 5, không quá 4 quả cam và không quá 1 quả đào?
- **Giải.** Hàm sinh có dạng

$$g(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

$$= [1/(1-x^2)]\ [1/(1-x^5)]\ [(1-x^5)/(1-x)]\ (1+x)$$

$$= [1/((1-x)(1+x)]\ [1/(1-x)]\ (1+x) = 1/(1-x)^2$$

- Từ đó ta có thể tìm công thức hiện cho lời giải, bởi vì, theo ví dụ 3, ta có

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2-1}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

- Vậy $h_n = n + 1$.

Hàm sinh và công thức đệ qui

- Hàm sinh có thể sử dụng để tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số $\{h_n , n=0,1,2,...\}$ xác định bởi công thức đệ qui. Nội dung của phương pháp có thể trình bày như sau:

  i) Xây dựng hàm sinh $g(x)$ của dãy số này theo công thức

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

  ii) Tìm công thức giải tích cho hàm sinh $g(x)$. (Sử dụng các tính chất của dãy số suy từ công thức đệ qui xác định nó).

  iii) Theo công thức tìm được, tìm khai triển hàm $g(x)$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa (chuỗi Maclaurin).

  iv) So sánh hệ số ở các số hạng với cùng số mũ của x ta tìm được công thức cho h_n.

Phép toán với hàm sinh

- Trước hết ta đưa ra một số phép toán đối với hàm sinh. Giả sử

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,\; g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

là hai hàm sinh còn α là số thực, khi đó

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i, \quad \alpha f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha a_i x^i$$

- Tích Côsi của hai hàm sinh $g(x)$ *và* $f(x)$:

$$f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

trong đó

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Chuỗi Maclaurin

- Từ giải tích ta biết rằng nếu chuỗi

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

hội tụ ở lân cận điểm 0 thì tổng $g(x)$ luôn là hàm giải tích trong lân cận này và

$$h_k = g^{(k)}(0)/k!\ ,\ k = 0, 1, \ldots$$

- Khi đó chuỗi

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$$

chính là khai triển Maclaurin của hàm $g(x)$. Như vậy có một tương ứng 1-1 giữa một hàm giải tích và một chuỗi hội tụ trong lân cận 0.

Công thức hay dùng

- Trong việc áp dụng hàm sinh ta thường sử dụng công thức sau:

$$\frac{1}{(1-rx)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} r^k x^k$$

mà trường hợp riêng của nó là

$$1/(1 - rx) = 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \ldots.$$

Dãy số Fibonaci

- **Dãy số Fibonaci.** Dãy số Fibonaci là dãy số được xác định bởi công thức đệ qui

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2,$$

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1.$$

- Ta sẽ tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số nhờ phương pháp hàm sinh.
- Xét hàm sinh $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Ta có

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n$$

$$= f_0 + f_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}$$

$$= x + xF(x) + x^2 F(x).$$

Dãy số Fibonaci

- Từ đó suy ra

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

- Ta có $(1 - x - x^2) = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, với

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

- Viết lại $F(x)$ dưới dạng

$$F(x) = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x},$$

Dãy số Fibonaci

- Từ đó tìm được

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- Do đó

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right]$$

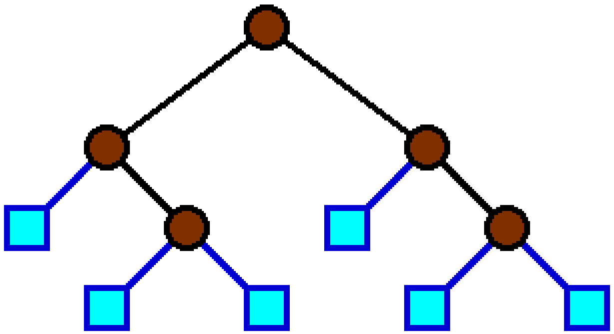
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)x^n.$$

- Suy ra

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \geq 0.$$

6. Một số dãy số đặc biệt

- Dãy số Stirling
- Dãy số Bell
- Dãy số Catalan



Nhắc lại: Số lượng ánh xạ

Cho các tập hữu hạn $A = \{a_1,\ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1,\ldots, b_n\}$.

Hỏi có bao nhiêu ánh xạ $f: A \to B$?

Như ta đã chứng minh:

- Tổng số ánh xạ có thể: $|B|^{|A|} = n^m$.
- Số lượng đơn ánh:

$$P(n,m) = n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1) = n!/(n-m)!.$$

- Số lượng song ánh là $P(n,n) = n!$ nếu $|A| = |B| = n$.
- Số lượng toàn ánh: với $m \geq n$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{n-k} (n-k)^m$$

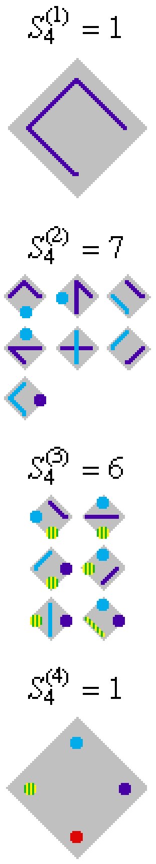
Số Stirling loại 2

- Số lượng toàn ánh từ tập $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ vào tập $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ liên quan đến một con số tổ hợp nổi tiếng đó là số Stirling loại 2 (Stirling Numbers of the 2nd Kind).
- **Định nghĩa.** ***Số Stirling loại 2***, ký hiệu bởi $S_2(m,n)$, là số cách phân hoạch tập m phần tử thành n tập con ($m \geq n$).
- **Ví dụ:** Ta đếm số cách phân hoạch tập $\{1,2,3,4\}$ ra thành 2 tập con. Ta có thể kể ra tất cả các cách phân hoạch như vậy: $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $\{\{1,2,4\},\{3\}\}$, $\{\{1,3,4\},\{2\}\}$, $\{\{2,3,4\},\{1\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$,$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.
- Vậy $S_2(4,2)=7$.

- Trong nhiều tài liệu, số Stirling còn được ký hiệu bởi

$$S_m^{(n)} \quad \text{hoặc} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$$

James Stirling
1692 – 1770
Scotland



Số Stirling loại 2

- Ta sẽ xây dựng công thức đệ qui để đếm số $S_2(m,n)$.
- Ta có:
  - $S_2(0,0)=1$.
  - Nếu $m > 0$, thì

    $S_2(m,0) = 0$,

    $S_2(m,1)=1$,

    và $S_2(m,m)=1$.

Định lý. Với $m, n > 1$,

$$S_2(m,n) = S_2(m-1,n-1) + n \cdot S_2(m-1,n).$$

Chứng minh.

Ta cần đếm số cách phân hoạch tập m phần tử $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ra thành n tập con.

Công thức đệ qui

- Tập các cách phân hoạch như vậy có thể phân hoạch thành 2 tập:

  A = Tập các cách phân hoạch X ra thành n tập con trong đó có một tập con là $\{x_m\}$;

  B = Tập các cách phân hoạch X ra thành n tập con trong đó không có tập con nào là $\{x_m\}$ (tức là x_m không đứng riêng một mình!).

- Ta có:

  $|A| = S_2(m-1,n-1)$.

  $|B| = n \cdot S_2(m-1,n)$, bởi vì có $S_2(m-1,n)$ cách phân hoạch $X \setminus \{x_m\}$ ra thành n tập con và có n cách xếp x_m vào một trong số các tập con này.

- Từ đó

$$S_2(m,n) = |A| + |B| = S_2(m-1,n-1) + n \cdot S_2(m-1,n).$$

Định lý được chứng minh.

Công thức tính số Stirling

- Từ công thức đệ qui có thể chứng minh bằng qui nạp toán học công thức sau đây:

$$S_2(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^m$$

- Nói chung để tính $S_2(m,n)$ người ta thường dùng công thức đệ qui, chứ không sử dụng công thức này. Điều này được giải thích tương tự như để tính hệ số tổ hợp người ta thường dùng tam giác Pascal.

Liên hệ giữa số lượng toàn ánh và số Stirling

- Ta xét mối liên hệ giữa số Stirling loại 2 với số lượng toàn ánh từ tập m phần tử A vào tập n phần tử B (ký hiệu là $S'(m,n)$).
- Giả sử cho f là toàn ánh từ A vào B. Đặt

$$A_i = \{a \in A \mid f(a) = b_i\},\ i = 1, 2, ..., n,$$

Rõ ràng các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ tạo thành một phân hoạch của tập A.

- Ngược lại, cho một phân hoạch của tập A ra thành n tập con $A_1, A_2, ..., A_n$ và $\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)$ là hoán vị của $1, 2, ..., n,$ thì ta có thể xây dựng được toàn ánh f từ A vào B theo qui tắc

$$f(a) = b_{\pi(i)},\ a \in A_{\pi(i)},\ i = 1,2, ..., n,$$

- Như vậy mỗi phân hoạch cho ta $n!$ toàn ánh. Vì thế, số lượng toàn ánh từ tập m phần tử vào tập n phần tử là bằng $n!$ nhân với số cách phân hoạch tập m phần tử ra thành n tập con, nghĩa là bằng $n!S_2(m,n)$

Liên hệ giữa số lượng toàn ánh và số Stirling

- Như vậy ta có đẳng thức cho mối liên hệ giữa số toàn ánh từ tập m phần tử vào tập n phần tử $S'(m,n)$ và số Stirling loại 2 sau đây:

$$S'(m,n) = n!\, S_2(m,n)\ .$$

- Do đó từ công thức đã chứng minh ở mục trước

$$S'(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Suy ra

$$S_2(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Bảng giá trị của số Stirling loại 2

	S2(n,k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1										
	1	0	1									
	2	0	1	1								
	3	0	1	3	1							
	4	0	1	7	6	1						
n	5	0	1	15	25	10	1					
	6	0	1	31	90	65	15	1				
	7	0	1	63	301	350	140	21	1			
	8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
	9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
	10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Số Bell

- **Định nghĩa.** Số Bell (Bell numbers) là số cách phân hoạch tập n phần tử ra thành các tập con khác rỗng.
- Các phần tử đầu tiên của dãy số này là

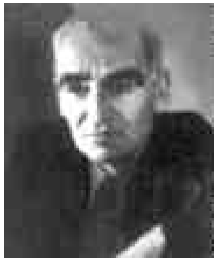
  1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, ...
- **Ví dụ:** Tập {1, 2, 3} có các cách phân hoạch sau đây:

  {{1}, {2}, {3}} , {{1, 2}, {3}}, {{1, 3}, {2}} ,

  {{1}, {2, 3}}, {{1, 2, 3}}.
- Số Bell thứ n được tính bởi công thức

$$\sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)$$

trong đó $S_2(n,k)$ là số Stirling loại 2.



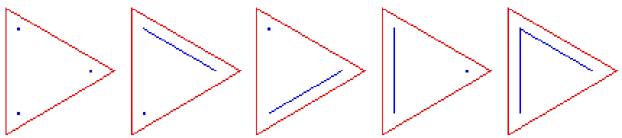
Eric Temple Bell

Born: 1883, Scotland

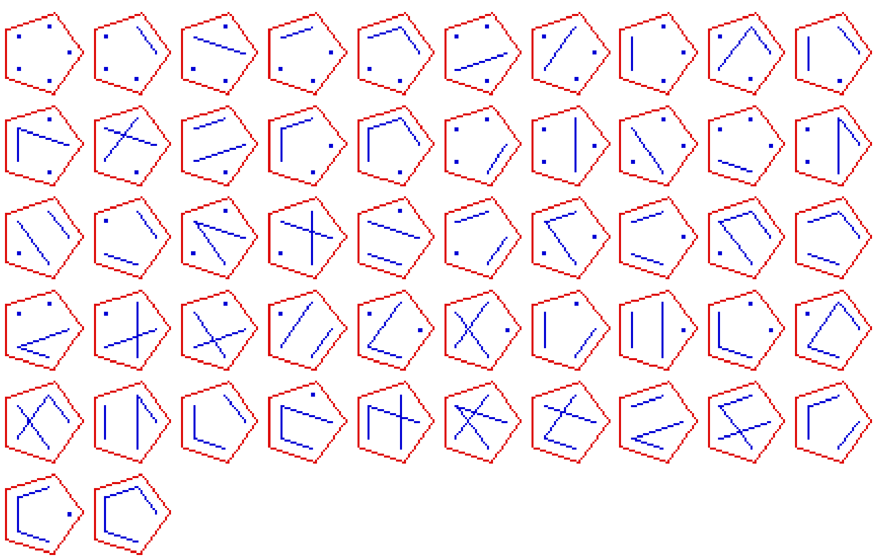
Died: 1960, USA

Số Bell

- Tập {1, 2, 3} có 5 cách phân hoạch:



- Tập {1, 2, 3, 4, 5} có 52 cách phân hoạch:



Số Catalan

- **Định nghĩa.** Số Catalan thứ *n*, ký hiệu là C_n , là số cách đặt dấu ngoặc để tổ chức thực hiện việc tính tích của *n*+1 thừa số:

$$P_{0..n} = x_0\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n.$$

- **Ví dụ:**
- Có 2 cách để tính $P_{0..2}$: $x_0*x_1*x_2 = (x_0*(x_1*x_2)) = ((x_0*x_1)*x_2)$
- Có 5 cách để tính $P_{0..3}$: 1*2*3*4 =

(1*(2*(3*4))) = (1*((2*3)*4)) = ((1*2)*(3*4)) = ((1*(2*3))* 4) = (((1*2)*3)*4)

- Có 14 cách để tính $P_{0..4}$: 1*2*3*4*5 =

(1 (2 (3 (4 5)))) = (1 (2 ((3 4) 5))) = (1 ((2 3) (4 5))) = (1 ((2 (3 4)) 5)) = (1 (((2 3) 4) 5)) = ((1 2) (3 (4 5))) = ((1 2) ((3 4) 5)) = ((1 (2 3)) (4 5)) = ((1 (2 (3 4))) 5) = ((1 ((2 3) 4)) 5) = (((1 2) 3) (4 5)) = (((1 2) (3 4)) 5) = (((1 (2 3)) 4) 5) = ((((1 2) 3) 4) 5)

Số Catalan

- Ta xây dựng công thức đệ qui để tính C_n.
- Rõ ràng

$$C_0 = 1 \text{ và } C_1 = 1.$$

- Giả sử $n > 1$. Sau khi đặt dấu ngoặc phân tách đầu tiên, tích $x_0 x_1 x_2 \ldots x_n$ được chia làm hai tích con.
- *Ví dụ:* $P_{0..4} = P_{0..2} P_{3..4} = (x_0 x_1 x_2)(x_3 x_4)$
- Giả sử dấu ngoặc phân tách đầu tiên được đặt sau thừa số x_k:

$$P_{0..n} = P_{0..k} P_{k+1..n} = (x_0 x_1 x_2 \ldots x_k)(x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_n)$$

- Khi đó ta có C_k cách tính $P_{0..k}$, C_{n-k-1} cách tính $P_{k+1..n}$, và do đó việc tính $P_{0..n}$ có thể thực hiện bởi $C_k C_{n-k-1}$ cách .

Số Catalan

- Do dấu ngoặc phân tách đầu tiên có thể đặt vào sau bất cứ thừa số nào trong các thừa số $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, suy ra tổng số cách tính $P_{0..n}$ là:

$$C_n = C_0\, C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0\ .$$

- Như vậy ta thu được công thức đệ qui:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n > 1,$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1$$

- Sử dụng công thức này có thể chứng minh công thức sau:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \; n \geq 0.$$

Số Catalan

- Một số phần tử đầu tiên của dãy số Catalan:
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, …

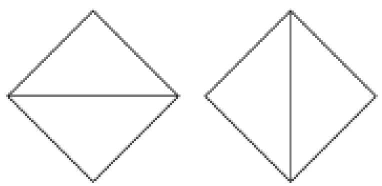
- Số Catalan là lời giải của rất nhiều bài toán tổ hợp.
- Ta sẽ kể ra dưới đây một số bài toán như vậy.

E. C. Catalan
1814 -1894
Belgium

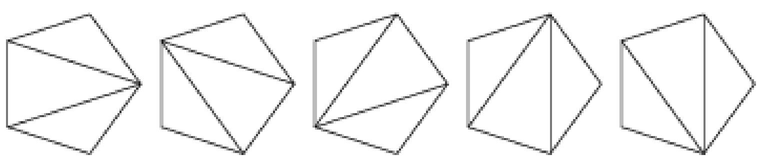
Tam giác phân đa giác

- C_n là số cách chia đa giác n+2 đỉnh ra thành các tam giác nhờ vẽ các đường chéo không cắt nhau ở trong đa giác:

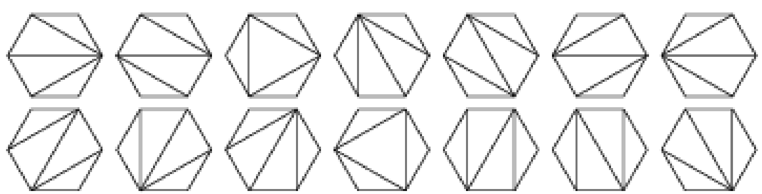
$C_2 = 2$

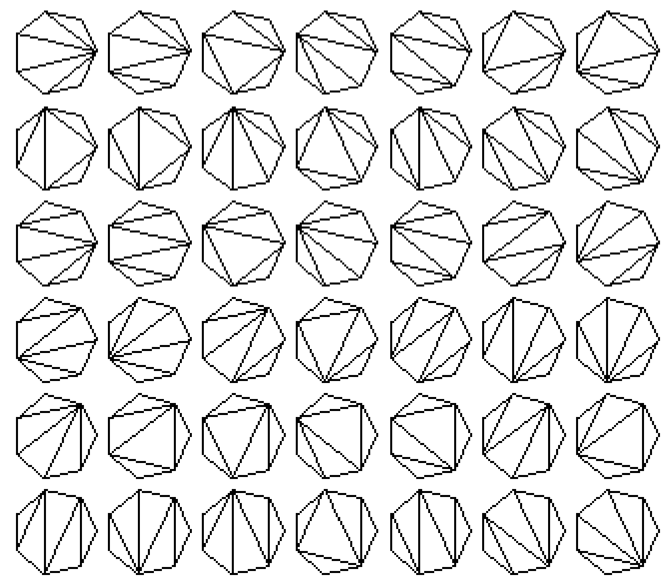


$C_3 = 5$



$C_4 = 14$

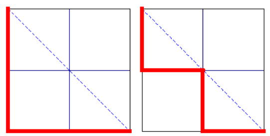




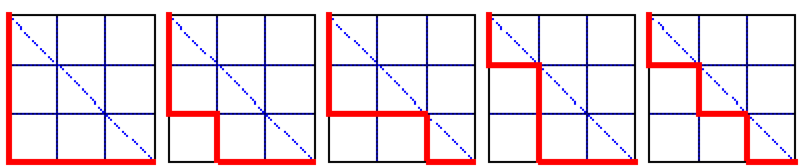
$C_5 = 42$

Đường đi trên lưới ô vuông

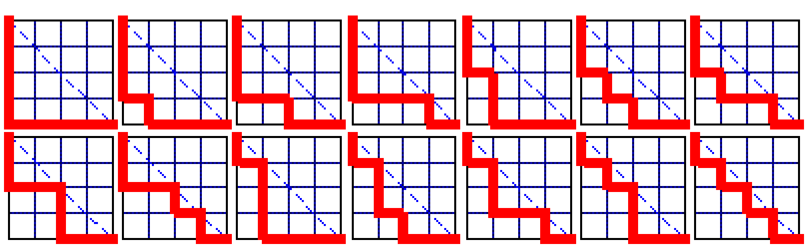
- ***C_n* là số lượng đường đi đơn điệu** (tức là đường đi xuất phát từ vị trí góc dưới-phải kết thúc ở góc trên-trái và chỉ đi sang trái hoặc lên trên) độ dài $2n$ trên lưới ô vuông kích thước $n \times n$ không vượt lên trên đường chéo.



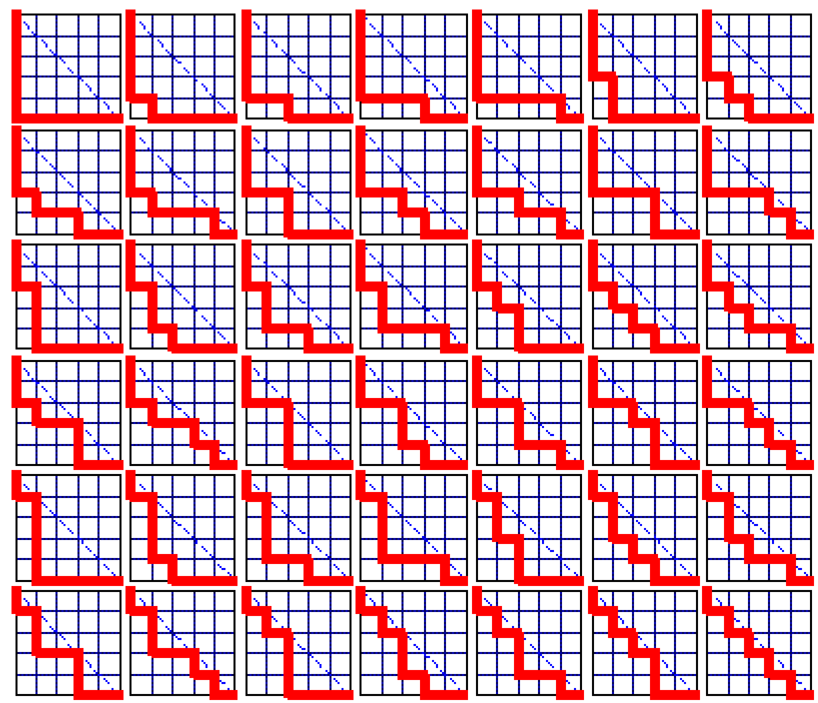
$C_2 = 2$



$C_3 = 5$



$C_4 = 14$



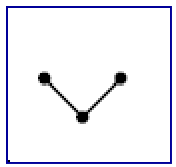
$C_5 = 42$

Cây nhị phân đầy đủ

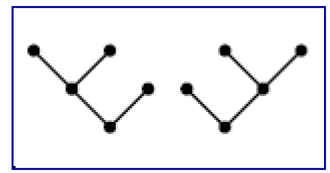
C_n là số lượng cây nhị phân đầy đủ không đẳng cấu có n đỉnh trong.

Cây nhị phân có gốc được gọi là đầy đủ nếu mỗi đỉnh của nó hoặc là không có con hoặc có đúng hai con. Đỉnh trong (internal vertice) là đỉnh có con.

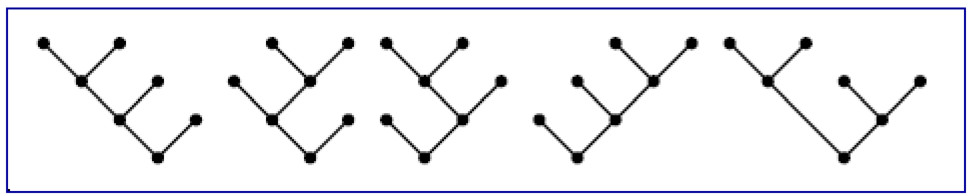
$n = 1$



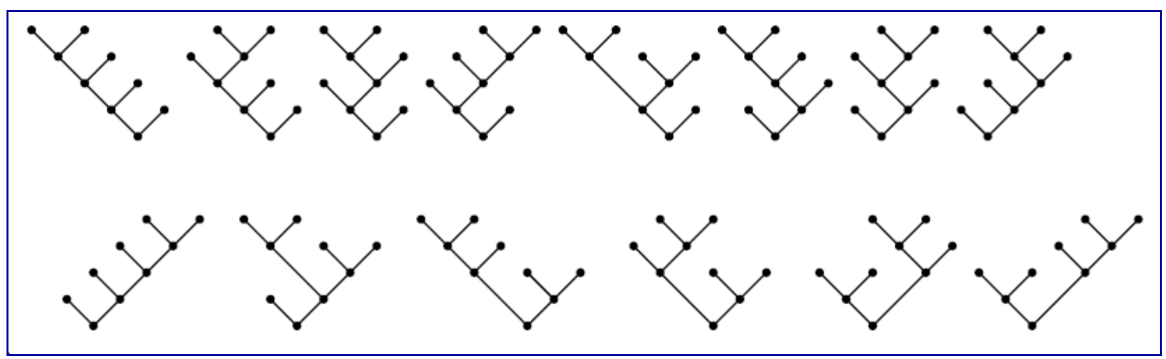
$n = 2$



$n = 3$

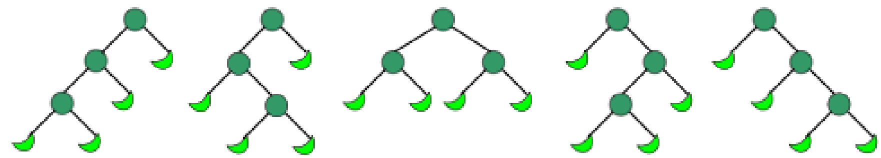


$n = 4$



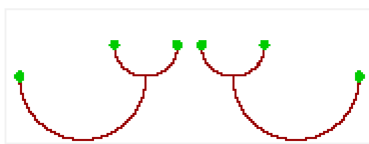
Cây nhị phân đầy đủ với n lá

- ***C_n* là số cây nhị phân đầy đủ với *n* + 1 lá.**
- Có $C_3 = 5$ cây nhị phân đầy đủ với 4 lá:

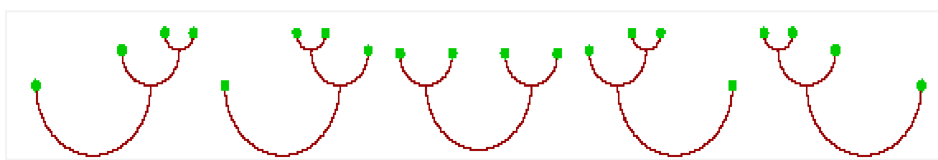


n

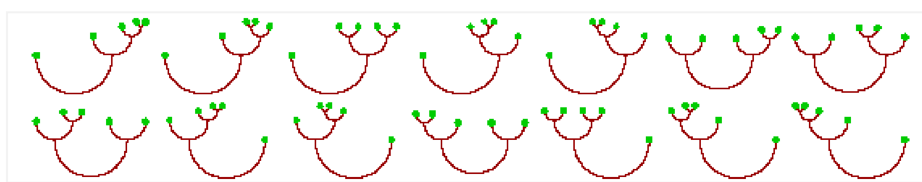
2



3



4



Ask questions!

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n,\ n \geq 2,$$

LiNoReCoCo Example

- Find all solutions to $a_n = 3a_{n-1}+2n$. Which solution has $a_1 = 3$?
  - Notice this is a 1-LiNoReCoCo. Its associated 1-LiHoReCoCo is $a_n = 3a_{n-1}$, whose solutions are all of the form $a_n = \alpha 3^n$. Thus the solutions to the original problem are all of the form $a_n = p(n) + \alpha 3^n$. So, all we need to do is find one $p(n)$ that works.

Trial Solutions

- If the extra terms $F(n)$ are a degree-t polynomial in n, you should try a general degree-t polynomial as the particular solution $p(n)$.
- This case: $F(n)$ is linear so try $a_n = cn + d$.

  $cn+d = 3(c(n-1)+d) + 2n$ (for all n)
  $(2c+2)n + (2d-3c) = 0$ (collect terms)
  So $c = -1$ and $d = -3/2$.

  So $a_n = -n - 3/2$ is a solution.
- **Check:** $a_{n\geq 1} = \{-5/2, -7/2, -9/2, \ldots\}$

Finding a Desired Solution

- From the previous, we know that all general solutions to our example are of the form:

  $a_n = -n - 3/2 + \alpha 3^n$.

  Solve this for α for the given case, $a_1 = 3$:

  $3 = -1 - 3/2 + \alpha 3^1$

  $\alpha = 11/6$

- The answer is $a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$.

Double Check Your Answer!

- Check the base case, $a_1=3$:

$$a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$$

$$a_1 = -1 - 3/2 + (11/6)3^1$$
$$= -2/2 - 3/2 + 11/2 = -5/2 + 11/2 = 6/2 = 3$$

- Check the recurrence, $a_n = 3a_{n-1}+2n$:

$$-n - 3/2 + (11/6)3^n = 3[-(n-1) - 3/2 + (11/6)3^{n-1}]+2n$$
$$= 3[-n - 1/2 + (11/6)3^{n-1}] + 2n$$
$$= -3n - 3/2 + (11/6)3^n + 2n = -n - 3/2 + (11/6)3^n \blacksquare$$

Ask questions!

Ask questions!