Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Combinatorial Theory

Fall 2009

Nội dung

Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

1. Giới thiệu bài toán

- Trong chơng trớc, ta đã tập trung chú ý vào việc đếm số các cấu hình tổ hợp. Trong những bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thoả mãn tính chất đặt ra.
- Tuy nhiên, trong rất nhiều bài toán tổ hợp, việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình thoả mãn các tính chất cho trớc là hết sức khó khăn.
  - Chẳng hạn, khi một kỳ thủ cần phải tính toán các nớc đi của mình để giải đáp xem liệu có khả năng thắng hay không,
  - Một ngời giải mật mã cần tìm kiếm chìa khoá giải cho một bức mật mã mà anh ta không biết liệu đây có đúng là bức điện thật đợc mã hoá của đối phơng hay không, hay chỉ là bức mật mã giả của đối phơng tung ra nhằm đảm bảo an toàn cho bức điện thật ...
- Trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho trớc - ***bài toán tồn tại tổ hợp.***
- Nhiều bài toán tồn tại tổ hợp đã từng thách thức trí tuệ nhân loại và đã là động lực thúc đẩy sự phát triển của tổ hợp nói riêng và toán học nói chung.

Bài toán về 36 sĩ quan

- Bài toán này đợc Euler đề nghị, nội dung của nó nh sau:

  "Có một lần ngời ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung uý, thợng uý, đại uý, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở s đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng nh mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc sĩ quan."

Bài toán về 36 sĩ quan

- Sử dụng:
  - A, B, C, D, E, F để chỉ các phiên hiệu trung đoàn,
  - a, b, c, d, e, f để chỉ các cấp bậc sĩ quan.
- Bài toán này có thể tổng quát hoá nếu thay con số 6 bởi n.
- Trong trờng hợp $n = 4$, một lời giải của bài toán 16 sỹ quan là

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

- Một lời giải trong trờng hợp $n = 5$ là

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
Cd	De	Ea	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

Bài toán về 36 sĩ quan

- Do lời giải của bài toán có thể biểu diễn bởi 2 hình vuông với các chữ cái la tinh hoa và thờng chồng cạnh nhau nên bài toán tổng quát đặt ra còn đợc biết dới tên gọi bài toán về *hình vuông la tinh trực giao*.
- Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nhng ông đã không thành công. Từ đó ông đã đề ra một giả thuyết tổng quát là: Không tồn tại hình vuông la tinh trực giao cấp $n = 4k + 2$.
- Tarri, năm 1901 chứng minh giả thuyết đúng với $n = 6$, bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp.
- Năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda chỉ ra đợc một lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra phơng pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho mọi $n = 4k+2$, với $k > 1$.

Bài toán về 36 sĩ quan

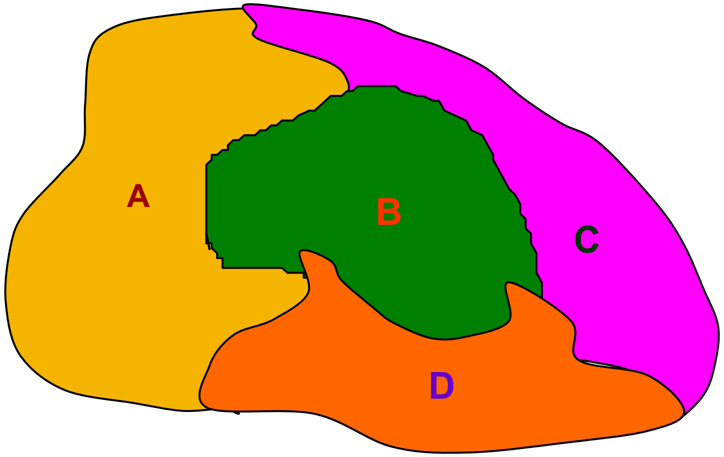
- Tổng chừng bài toán đặt ra chỉ có ý nghĩa thuần tuý của một bài toán đố hóc búa thử trí tuệ con ngời. Thế nhng gần đây ngời ta đã phát hiện những ứng dụng quan trọng của vấn đề trên vào:
  - Quy hoạch thực nghiệm (Experimental Design),
  - Sắp xếp các lịch thi đấu trong các giải cờ quốc tế,
  - Hình học xạ ảnh (Projective Geometry),
  - ...

Bài toán 4 màu

- Có những bài toán mà nội dung của nó có thể giải thích cho bất kỳ ai, tuy nhiên lời giải của nó thì ai cũng có thể thử tìm, nhng mà khó có thể tìm đợc. Ngoài định lý Fermat thì bài toán 4 màu là một bài toán nh vậy.
- Bài toán có thể phát biểu trực quan nh sau: Chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai nớc láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu.
- Chú ý rằng, ta xem nh mỗi nớc là một vùng liên thông và hai nớc đợc gọi là láng giềng nếu chúng có chung biên giới là một đờng liên tục.

Bài toán 4 màu

- Con số 4 không phải là ngẫu nhiên. Ngời ta đã chứng minh đọc rằng mọi bản đồ đều đọc tô với số mầu lớn hơn 4, còn với số mầu ít hơn 4 thì không tô đọc. Chẳng hạn bản đồ gồm 4 nóc ở hình dới không thể tô đọc với số mầu ít hơn 4.



Bài toán 4 màu

- Vấn đề này được đề cập trong bức thư của Augustus De Morgan gửi W. R. Hamilton năm 1852 (De Morgan biết sự kiện này từ Frederick Guthrie, còn Guthrie từ người anh trai của mình...)
- Trong 110 năm rất nhiều chứng minh được công bố nhưng đều có lỗi.
- Năm 1976, Appel và Haken đã đưa ra chứng minh ***bằng máy tính điện tử!***

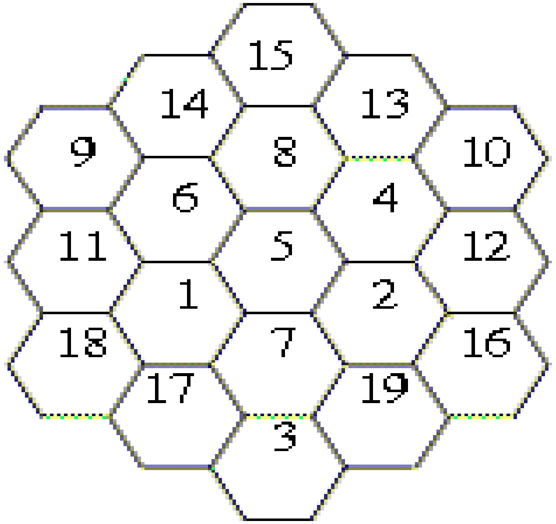
  K. Appel and W. Hankin, "Every planar map is 4-colorable," Bulletin of the AMS, Volume 82 (1976), 711-712.

Bài toán 4 màu

- Trong ngôn ngữ toán học, bài toán 4 màu được phát biểu dưới dạng bài toán tô màu đồ thị phẳng.
- Việc giải quyết Bài toán 4 màu đóng góp phần quan trọng vào việc phát triển lý thuyết đồ thị.
- Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng.

Hình lục giác thần bí

- Năm 1910 Clifford Adams đề ra bài toán hình lục giác thần bí sau: trên 19 ô lục giác (xem hình vẽ ở dới) hãy điền vào các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 hớng của lục giác là bằng nhau (và đều bằng 38).



Hình lục giác thần bí

- Sau 47 năm trời kiên nhẫn cuối cùng ông ta đã tìm đọc lời giải.
- Sau đó vì sơ ý đánh mất bản thảo ông ta đã tốn thêm 5 năm để khôi phục lại. Năm 1962 Adams đã công bố lời giải đó.
- Thật không thể ngờ là đó là lời giải duy nhất (nếu không tính đến các lời giải sai khác nhau bởi phép biến hình đơn giản).

Giả thuyết 3x + 1

- Giả thuyết 3x+1 (conjecture)
  - Giả sử hàm $f(x)$ trả lại $x/2$ nếu x là số chẵn và 3x+1 nếu x là số lẻ. Với mọi số nguyên dương x, luôn tồn tại n sao cho

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n \text{ lần gọi hàm } f}$$

  - là bằng 1.

$f(13) = 3*13+1 = 40$

$f(40) = 40/2 = 20$

$f(20) = 20/2 = 10$

$f(10) = 10/2 = 5$

$f(5) = 3*5+1 = 16$

$f(16) = 16/2 = 8$

$f(8) = 8/2 = 4$

$f(4) = 4/2 = 2$

$f(2) = 2/1 = 1$

Giả thuyết $3x + 1$

- **Giả thuyết 3*x*+1:** Đoạn chương trình sau đây luôn kết thúc với mọi số nguyên dương *x:*

```
repeat
    if  x mod 2 = 0 then x:= x div 2
    else x:= 3*x +1
until x=1;
```

- Paul Erdös commented concerning the intractability of the **3x+1** problem: ``***Mathematics is not yet ready for such problems***."
- **Đã chứng minh với mọi $x \le 5.6*10^{13}$**

Một số vấn đề mở
Open problems

- **Goldbach's Conjecture**
  - Mỗi số nguyên *n* >2 đều là tổng của 2 số nguyên tố
  - Đã chỉ ra là đúng với mọi *n* đến tận $4*10^{14}$
  - Nhiều người cho rằng giả thuyết là đúng
- **Cặp số nguyên tố sinh đôi (Twin prime conjecture)**
  - Có vô số cặp số nguyên tố sinh đôi (nghĩa là chỉ chênh lệch nhau 2)
  - Cặp sinh đôi lớn nhất: $318{,}032{,}361*2^{107{,}001}\pm 1$
    - Số này có 32,220 chữ số!
  - Cũng được cho rằng là đúng
- **Không tồn tại số hoàn hảo lẻ (Odd perfect number)**
- **Nếu bạn giải quyết được một trong những vấn đề này ....**


ISBN4-901782-16-9
C0076 ¥1200E
9784901782166
KANZEN 株式会社カンゼン
1920076012006
定価：本体1,200円（税別）


cognitivedistortion.com

A bit of humor: Computer terminology

Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Hệ đại diện phân biệt
5. Định lý Ramsey

2. Các kỹ thuật chứng minh

2.0. Mở đầu

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct Proof)

2.2. Chứng minh bằng phản chứng (Proof by Contradiction)

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học (Proof by Mathematical Induction)

2.0. Mở đầu

- Chứng minh là trái tim của toán học.
- Trong suốt quá trình học từ thuở nhỏ đến trưởng thành bạn đã và sẽ còn phải làm việc với chứng minh – phải đọc, hiểu và thực hiện chứng minh.
- Có bí quyết gì không? Có phép màu gì giúp được không? Câu trả lời là: Không có bí quyết, không có phép màu. Vấn đề quan trọng là cần biết tư duy, hiểu biết một số sự kiện và nắm vững một số kỹ thuật cơ bản

Cấu trúc của chứng minh

- Cấu trúc cơ bản của chứng minh rất đơn giản: Nó là dãy các mệnh đề, mỗi một trong số chúng sẽ
  - hoặc là giả thiết, hoặc là
  - kết luận được suy trực tiếp từ giả thiết hoặc suy ra từ các kết quả đã chứng minh trước đó.
  - Ngoài ra có thể có những giải thích – cần cho người đọc và không có ảnh hưởng đến cấu trúc của chứng minh.
- Một chứng minh cần được trình bày sao cho dễ theo dõi:
  - Mỗi bước trong chứng minh đều rõ ràng hoặc ít ra là được giải thích rõ ràng,
  - Người đọc được dẫn dắt đến kết luận mà không gặp những vướng mắc do những tình tiết không rõ ràng gây ra.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Trước hết ta nhắc lại khái niệm số vô tỷ và một kết quả của số học:
- Một số thực được gọi là số hữu tỷ nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng *p*/*q*, với *p* và *q* là các số nguyên. Một số thực không là số hữu tỷ được gọi là số vô tỷ.
- Định lý cơ bản của số học: Mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố mà ta sẽ gọi là phân tích ra thừa số nguyên tố (sẽ viết tắt là PTNT) của số đó.

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Ký hiệu $s = 2^{1/2}$. Theo định nghĩa, s thoả mãn phương trình

  $$s^2 = 2.$$

- Nếu s là số hữu tỷ, thì ta có thể viết

  $$s = p/q$$

  trong đó p và q là hai số nguyên. Bằng cách chia cho ước chung nếu cần, ta có thể giả thiết là p và q không có ước chung nào ngoài 1.

- Thay biểu diễn này vào phương trình đầu tiên, sau khi biến đổi một chút, ta thu được phương trình

  $$p^2 = 2\,q^2\,.$$

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ

- Thế nhưng, theo *định lý cơ bản của số học*, 2 là thừa số trong PTNT của p^2 . Do 2 là số nguyên tố, nên nó cũng là thừa số trong PTNT của p. Từ đó suy ra, 2^2 cũng xuất hiện trong PTNT của p^2, và vì thế trong cả PTNT của $2q^2$. Bằng cách chia hai vế cho 2, ta suy ra 2 là thừa số trong PTNT của q^2.
- Tương tự như trên (như đối với p^2) ta có thể kết luận 2 là thừa số nguyên tố của q. Như vậy, ta thấy p và q có chung thừa số 2. Điều đó là mâu thuẫn với giả thiết p và q không có ước chung nào ngoài 1.
- Khẳng định được chứng minh.

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

- **Chúng ta bắt đầu bằng ví dụ chứng minh tính bắc cầu của tính chất chia hết.**
- **Định lý. Nếu *a* chia hết *b* và *b* chia hết *c* thì *a* chia hết *c*.**
- **Proof.** Theo giả thiết, và định nghĩa tính chia hết, ta suy ra tồn tại các số nguyên k_1 và k_2 sao cho

  $b = a\,k_1$ và $c = b\,k_2$.

- Suy ra

  $$c = b\,k_2 = a\,k_1\,k_2.$$

- Đặt $k = k_1\,k_2$. Ta có k là số nguyên và $c = a\,k$, do đó theo định nghĩa về tính chia hết, a chia hết c.

2.1. Chứng minh trực tiếp (Direct proofs)

Nếu P, thì Q (If P, Then Q)

- Phần lớn các định lý (các bài tập hay bài kiểm tra) mà bạn cần chứng minh hoặc ẩn hoặc hiện có dạng "Nếu P, Thì Q".
- Trong ví dụ vừa nêu, "P" là "Nếu *a* chia hết *b* và *b* chia hết *c* " còn "Q" là "*a* chia hết *c*".
- Đây là dạng phát biểu chuẩn của rất nhiều định lý.
- Chứng minh trực tiếp có thể hình dung như là một dãy các suy diễn bắt đầu từ "P" và kết thúc bởi "Q".

$$P \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$$

- Phần lớn các chứng minh là chứng minh trực tiếp. Khi phải chứng minh, bạn nên thử bắt đầu từ chứng minh trực tiếp, ngoại trừ tình huống bạn có lý do xác đáng để không làm như vậy.

Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Mỗi số nguyên lẻ đều là hiệu của hai số chính phương.
- **CM.** Giả sử $2a+1$ là số nguyên lẻ, khi đó

  $$2a+1 = (a+1)^2 - a^2.$$
- **Ví dụ 2.** Số 100...01 (với $3n$-1 số không, trong đó n là số nguyên dương) là hợp số.
- **CM.** Ta có thể viết $100...01 = 10^{3n} + 1$, trong đó n là số nguyên dương. Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$ với $a = 10^n$ và $b = 1$, ta thu được

  $$(10^n)^3 + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1).$$
- Do $(10^n + 1) > 1$ và $(10^{2n} - 10^n + 1) > 1$ khi n là nguyên dương nên ta có đpcm.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Trong chứng minh bằng phản chứng ta sử dụng các giả thiết và mệnh đề phủ định kết quả cần chứng minh và từ đó cố gắng suy ra các điều phi lý hoặc các mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- Nghĩa là nếu phải chứng minh “Nếu P, Thì Q", ta giả thiết rằng P và Not Q là đúng. Mâu thuẫn thu được có thể là một kết luận trái với một trong những giả thiết đã cho hoặc điều phi lý, chẳng hạn như 1 = 0.
- Chứng minh căn bậc hai của 2 là số vô tỷ trong ví dụ mở đầu là một ví dụ chứng minh như vậy.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 1**. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm đợc 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.
- **Giải**:
- Chú ý rằng, cần và đủ để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng độ dài của 2 đoạn nhỏ phải lớn hơn độ dài của đoạn lớn.
- Sắp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài, ta có:

  $$10 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_7 < 100.$$

  Cần chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm đợc 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối.
- Giả thiết điều này không xảy ra.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Từ giả thiết phản chứng suy ra đồng thời xảy ra các bất đẳng thức:

$$a_1 + a_2 \le a_3,$$
$$a_2 + a_3 \le a_4,$$
$$a_3 + a_4 \le a_5,$$
$$a_4 + a_5 \le a_6,$$
$$a_5 + a_6 \le a_7.$$

- Từ giả thiết a_1, a_2 có giá trị lớn hơn 10, ta nhận đợc $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$, ta nhận đợc $a_4 > 30$, ..., cứ nh vậy ta nhận đợc $a_5 > 50$, $a_6 > 80$ và $a_7 > 130$.
- Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100 và điều đó chứng minh kết luận của Ví dụ 1.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 2.** Các đỉnh của một thập giác đều đợc đánh số bởi các số nguyên 0, 1, ... , 9 một cách tuỳ ý. Chứng minh rằng luôn tìm đ ợc ba đỉnh liên tiếp có tổng các số là lớn hơn 13.
- **Giải:** Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ là các số gán cho các đỉnh của 1, 2,..., 10 của thập giác. Giả sử ngọc lại là không tìm đợc ba đỉnh nào thoả mãn khẳng định của ví dụ. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 13,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 13,$$

$$. \; . \; . \; . \; .$$

$$x_9 + x_{10} + x_1 \leq 13,$$

$$x_{10} + x_1 + x_2 \leq 13,$$

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- Cộng vế với vế tất cả các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mặt khác do

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10})$$
$$= 3\,(0 + 1 + 2 + \ldots + 9)$$
$$= 135,$$

- suy ra

$$135 = 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) \leq 130.$$

- Mâu thuẫn thu đợc đã chứng tỏ khẳng định trong ví dụ là đúng.

2.2. Chứng minh bằng phản chứng

- **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác.
- **Giải:** Giả sử ngược lại là tìm được cách nối 31 máy sao cho mỗi máy được nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số lượng kênh nối là

$$5 \times 31/2 = 75{,}5\ ?!$$

- Điều phi lý thu được đã chứng minh khẳng định trong ví dụ là đúng.

2.3. Chứng minh bằng phản đề (Proof by Contrapositive)

- Chứng minh bằng phản đề sử dụng sự tương đương của hai mệnh đề "P kéo theo Q" và "Phủ định Q kéo theo phủ định P".

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

- Ví dụ, khẳng định "Nếu đó là xe của tôi thì nó có màu mận" là tương đương với "Nếu xe đó không có màu mận thì nó không phải của tôi".
- Do đó, để chứng minh "Nếu P, Thì Q" bằng phương pháp phản đề, ta chứng minh "Nếu phủ định Q thì có phủ định P" ("If Not Q, Then Not P").

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 1.** Nếu x và y là hai số nguyên sao cho $x+y$ là số chẵn, thì x và y có cùng tính chẵn lẻ.
- **CM.** Mệnh đề phản đề của khẳng định đã cho là "Nếu x và y là hai số nguyên không cùng chẵn lẻ, thì tổng của chúng là số lẻ."
- Vì thế ta giả sử rằng x và y không cùng chẵn lẻ. Không giảm tổng quát, giả sử rằng x là chẵn còn y là lẻ. Khi đó ta tìm được các số nguyên k và m sao cho $x = 2k$ và $y = 2m+1$. Bây giờ ta tính tổng $x+y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m) + 1$, mà rõ ràng là số lẻ.
- Từ đó suy ra khẳng định cuả ví dụ là đúng.

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- **Ví dụ 2.** Nếu n là số nguyên dương sao cho n mod 4 là bằng 2 hoặc 3, thế thì n không là số chính phương.
- **CM.** Ta sẽ chứng minh mệnh đề phản đề: "Nếu n là số chính phương thì n mod 4 phải bằng 0 hoặc 1."
- Giả sử $n = k^2$. Có 4 tình huống có thể xảy ra.
  - Nếu k mod 4 = 0, thì k = 4q, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 = 4(4q^2)$, suy ra n mod 4 = 0.
  - Nếu k mod 4 = 1, thì k = 4q + 1, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1$, suy ra n mod 4 = 1.
  - Nếu k mod 4 = 2, thì k = 4q + 2, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 4(4q^2 + 4q + 1)$, suy ra n mod 4 = 0.
  - Nếu k mod 4 = 3, thì k = 4q + 3, với q nguyên nào đó. Khi đó, $n = k^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 1$, suy ra n mod 4 = 1.

2.3. Chứng minh bằng phản đề

- Chứng minh bằng phản đề khác chứng minh phản chứng ở chỗ nào? Ta xét việc áp dụng chúng vào việc chứng minh "If P, Then Q".
- Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử có P và Not Q ta cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn.
- Chứng minh bằng phản đề: Giả sử có Not Q và ta phải chứng minh not P.
- Phương pháp chứng minh bằng phản đề có ưu điểm là bạn có mục đích rõ ràng là: Chứng minh Not P. Trong phương pháp phản chứng, bạn phải cố gắng chỉ ra điều mâu thuẫn mà ngay từ đầu bạn chưa thể xác định được đó là điều gì.

2.4. Chứng minh bằng qui nạp toán học

- Đây là kỹ thuật chứng minh rất hữu ích khi ta phải chứng minh mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên n.
- Tương tự như nguyên lý "hiệu ứng domino".
- Sơ đồ chứng minh:

$P(0)$

$\forall n \geq 0\ (P(n) \rightarrow P(n+1))$

Kết luận: $\forall n \geq 0\ P(n)$

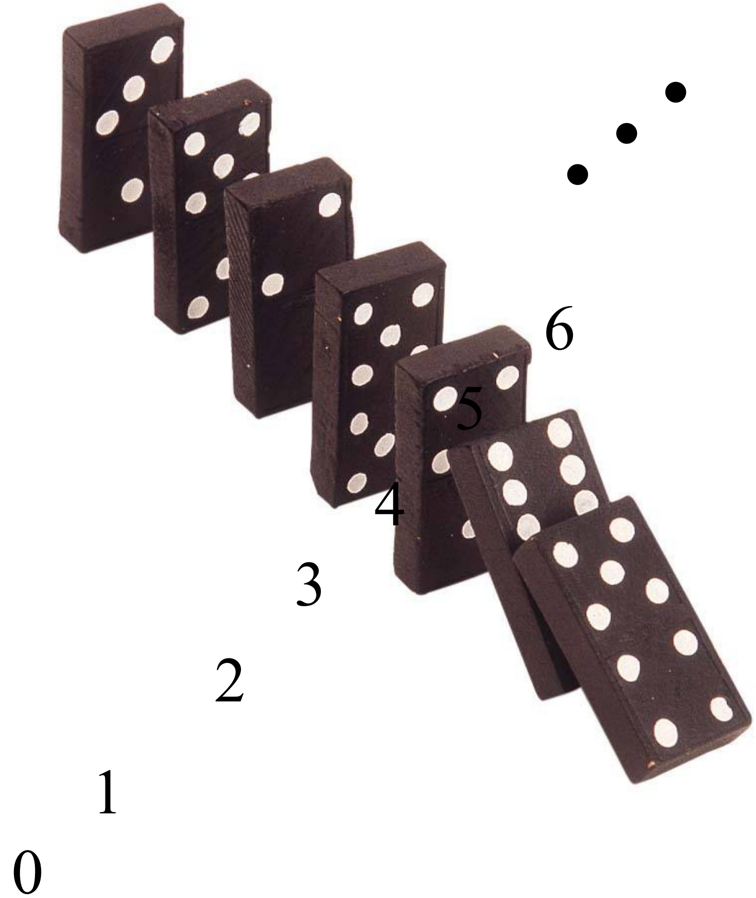
"Nguyên lý qui nạp toán học thứ nhất"

"The First Principle of Mathematical Induction"

The "Domino Effect"

- **Bước #1:** Domino #0 đổ.
- **Bước #2:** Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu domino #n đổ, thì domino #n+1 cũng đổ.
- **Kết luận:** Tất cả các quân bài domino đều đổ!

Chú ý:
điều này xảy ra
ngay cả khi
có vô hạn
quân bài domino!



Tính đúng đắn của qui nạp (The Well-Ordering Property)

- Tính đúng đắn của chứng minh qui nạp là hệ quả của "*well-ordering property*":
  - Mỗi tập con khác rỗng các số nguyên không âm đều có phần tử nhỏ nhất".
  - $\forall \varnothing \neq S \subseteq \mathbf{N} : \exists m \in S : \forall n \in S : m \leq n$
- Từ đó suy ra tập $\{n|\neg P(n)\}$ (nếu khác rỗng) có phần tử nhỏ nhất m, thế nhưng điều đó là trái với điều đã chứng minh: Ta có $P(m-1)$ là đúng, suy ra $P((m-1)+1)$ là đúng?!

Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp yếu

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(m)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(n)$ là đúng
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

Qui nạp mạnh
(Second Principle of Induction – Strong Induction)

- Sơ đồ chứng minh:
- $P(0)$
  $$\forall n \geq 0: (\underbrace{\forall\, 0 \leq k \leq n\ \ P(k)}_{P \text{ là đúng trong } mọi \text{ tình huống trước}}) \rightarrow P(n+1)$$
  Kết luận $\forall n \geq 0: P(n)$
- Sự khác biệt với sơ đồ qui nạp "yếu" ở chỗ:
  - Bước chuyển qui nạp sử dụng giả thiết *mạnh* hơn: $P(k)$ là đúng cho *mọi* số nhỏ hơn $k<n+1$, chứ không phải chỉ riêng với $k=n$ như trong nguyên lý qui nạp thứ nhất.

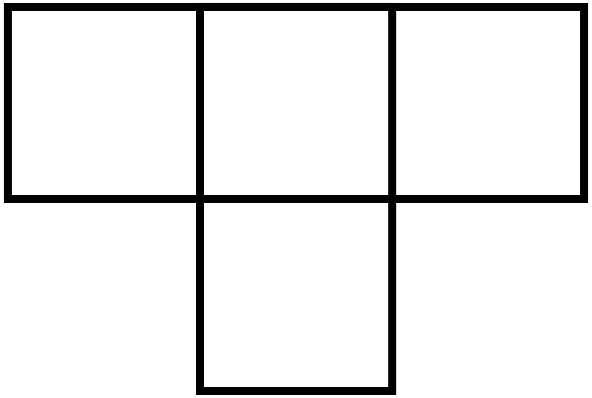
Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp mạnh

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq 0$.

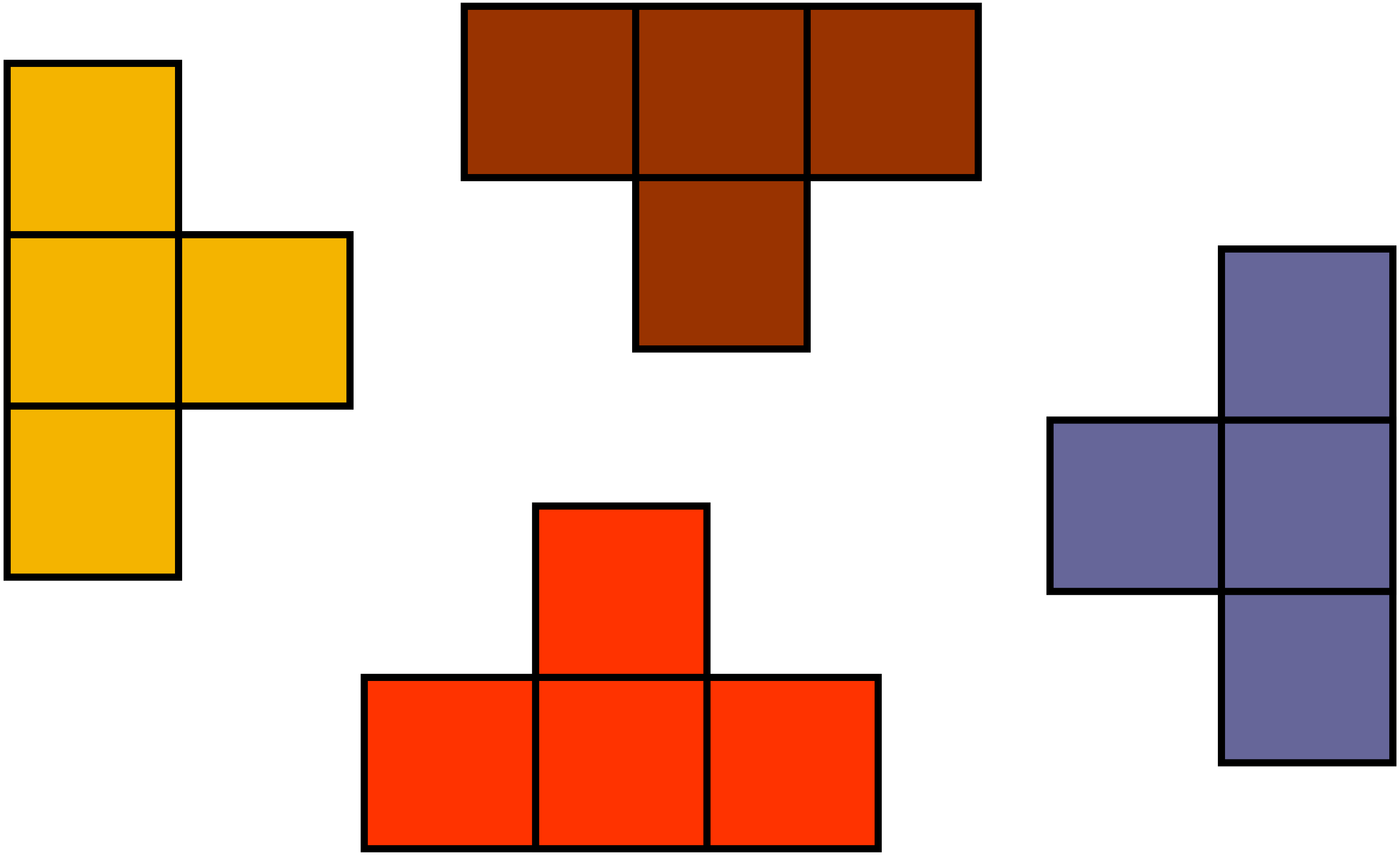
- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(0)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ 0 \leq k \leq n$.
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq 0$.

Ví dụ 1

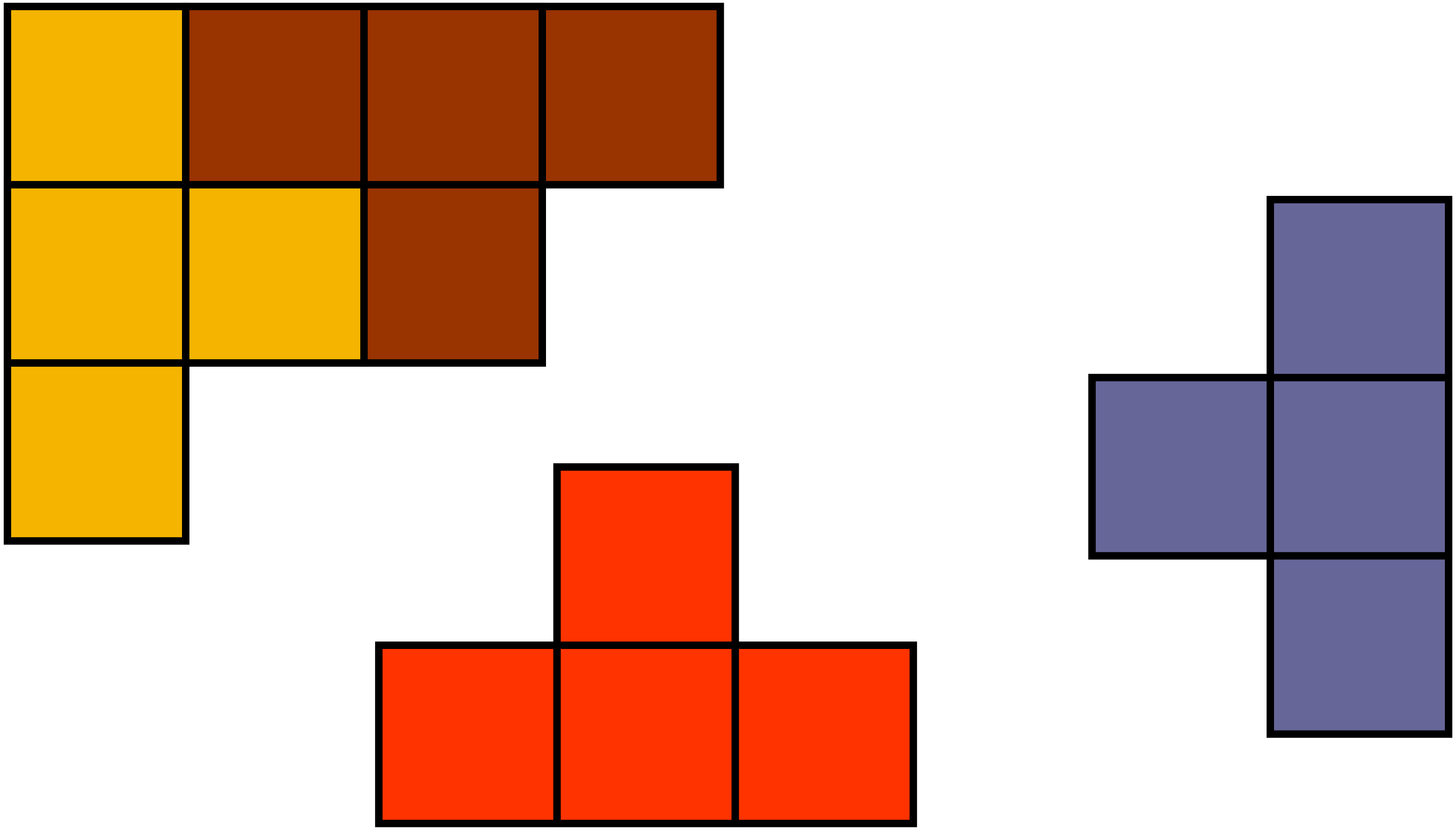
Chứng minh rằng luôn có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ $(n > 1)$ bởi các quân bài hình chữ T (T-omino).



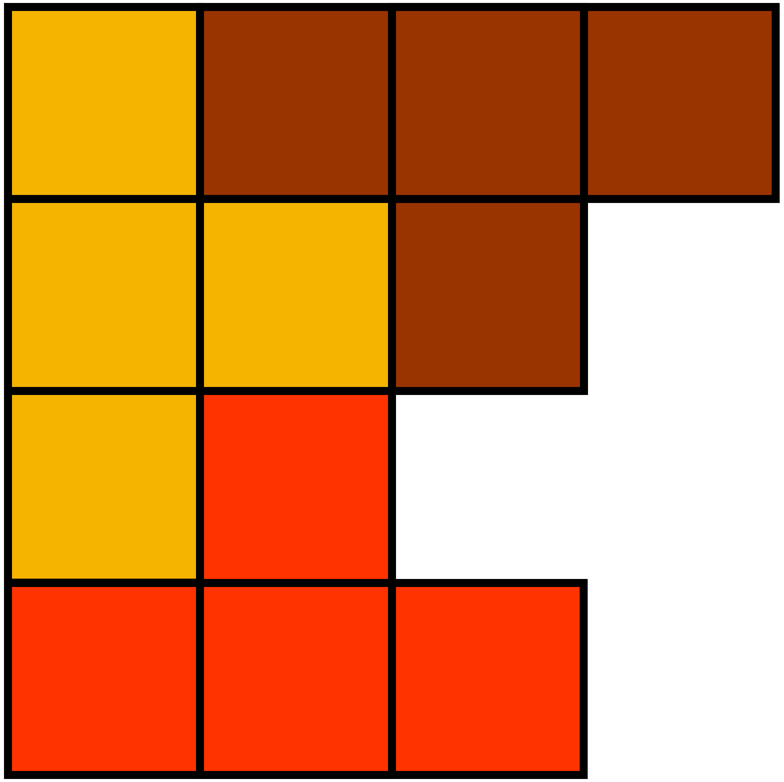
Cơ sở qui nạp: Bảng 2^2 x 2^2

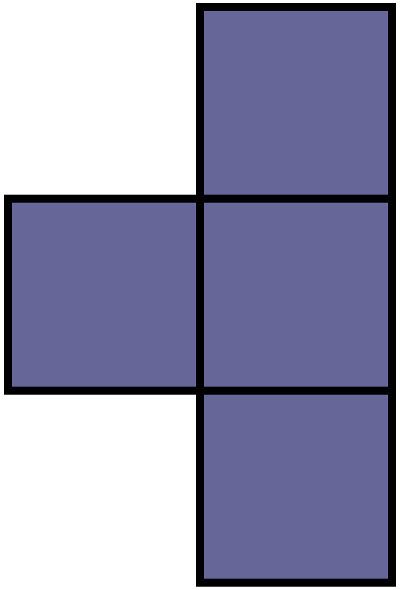


Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$

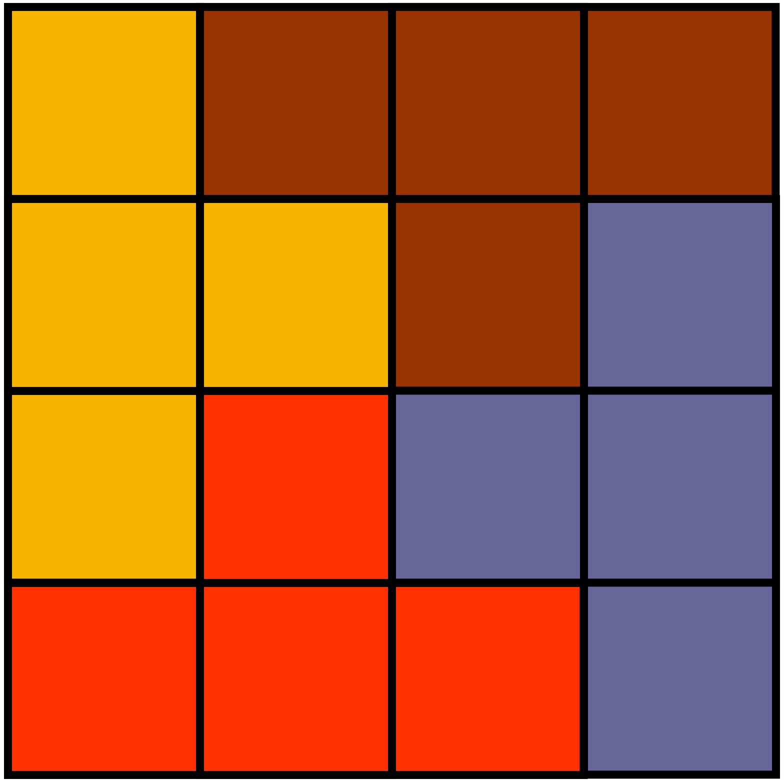


Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$





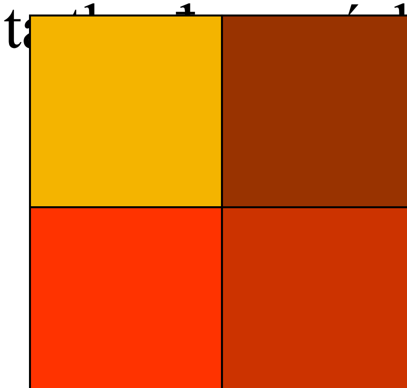
Cơ sở qui nạp: Bảng $2^2 \times 2^2$



Bước chuyển qui nạp

Giả sử ta có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$. Ta phải chứng minh có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Thực vậy, chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ra thành 4 phần, mỗi phần kích thước $2^n \times 2^n$. Theo giả thiết qui nạp mỗi phần này đều có thể phủ kín bởi các quân bài chữ T. Đặt chúng vào bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ta [illegible] phủ cần tìm.



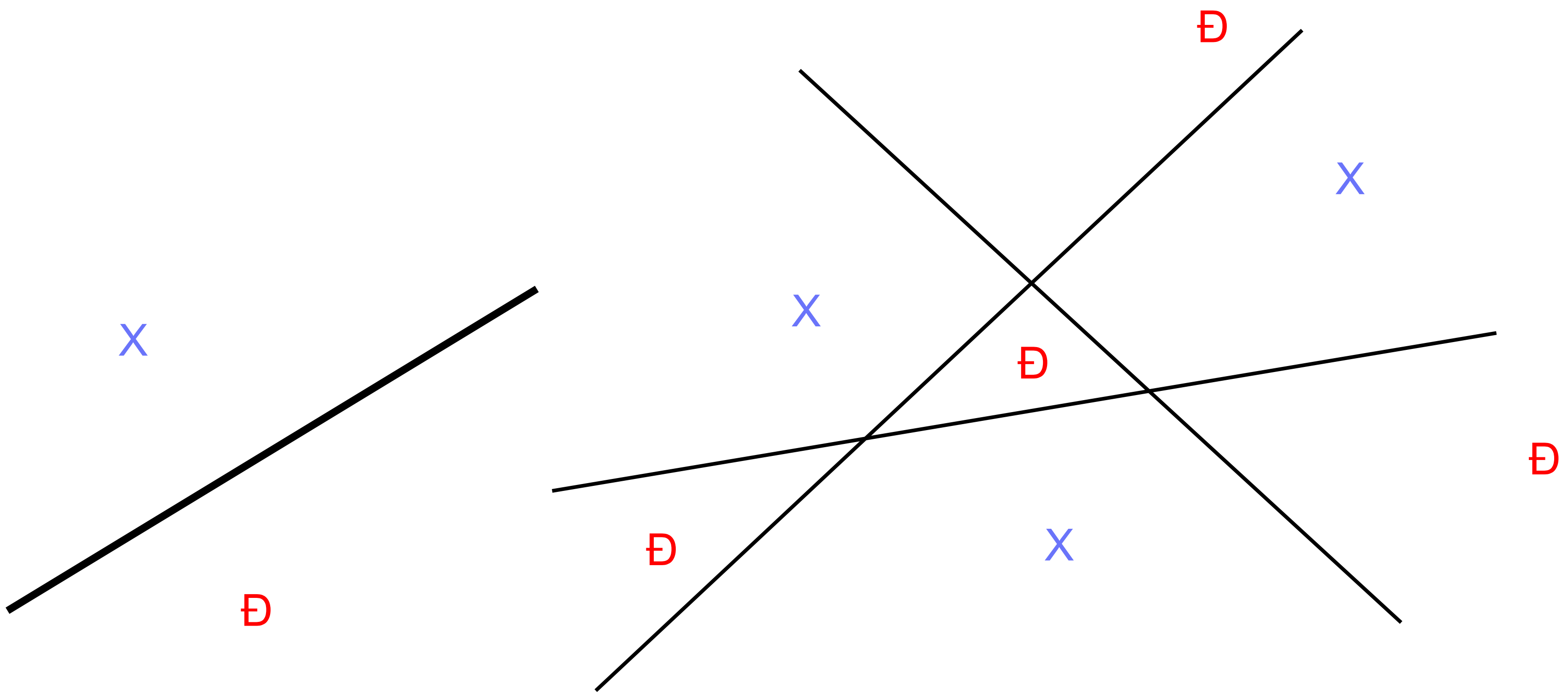
VÍ DỤ 2

- Trên mặt phẳng vẽ *n* đường thẳng ở vị trí tổng quát. Hỏi ít nhất phải sử dụng bao nhiêu màu để tô các phần bị chia bởi các đường thẳng này sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu?
- $P(n)$: Luôn có thể tô các phần được chia bởi n đường thẳng vẽ ở vị trí tổng quát bởi 2 màu xanh và đỏ sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu.

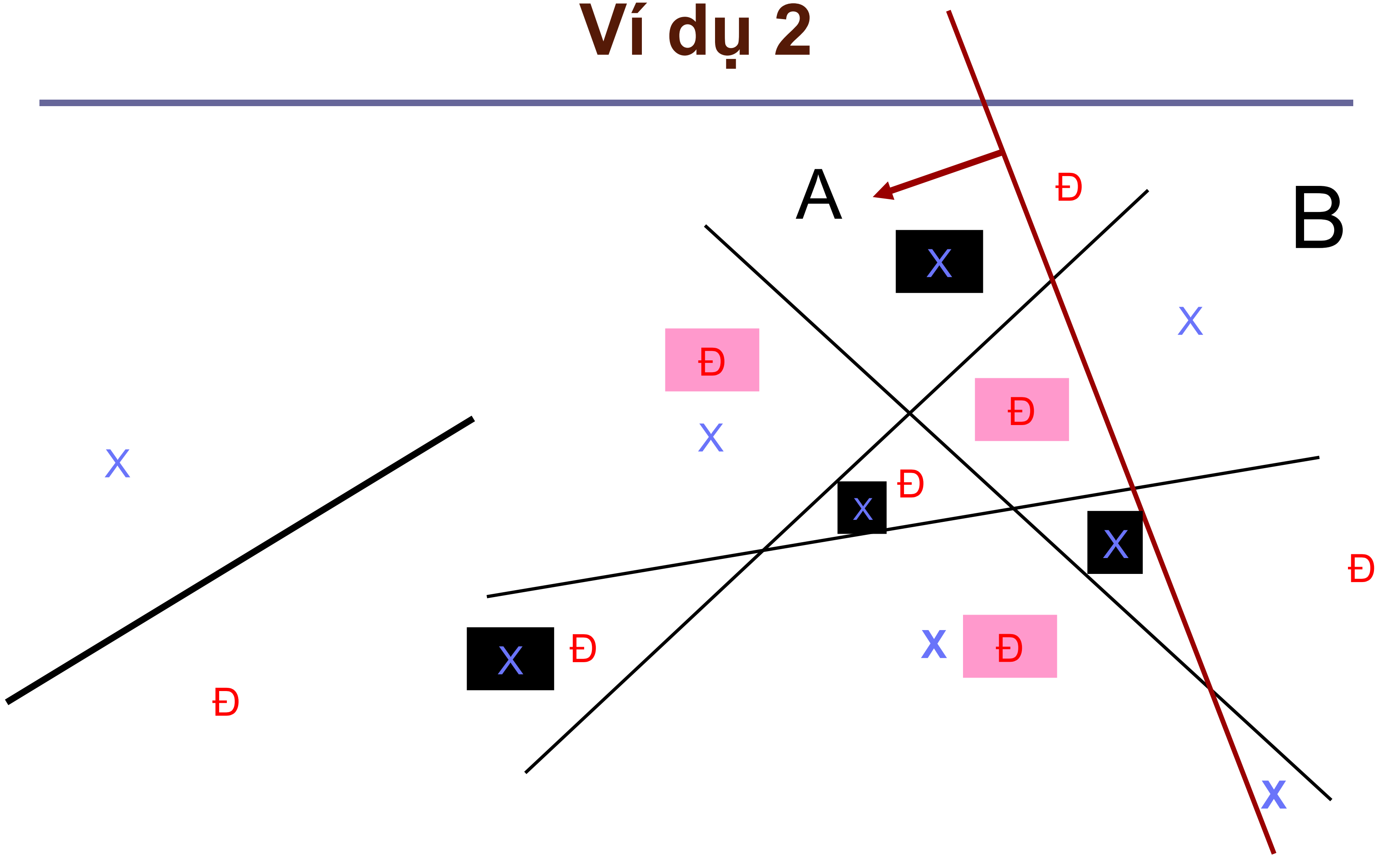
Ví dụ 2

- Cơ sở qui nạp: Khi n = 1, mặt phẳng được chia làm hai phần, một phần sẽ tô màu xanh, phần còn lại tô màu đỏ.
- Giả sử khẳng định đúng với n-1, ta chứng minh khẳng định đúng với n.
- Thực vậy, trước hết ta vẽ n-1 đường thẳng. Theo giả thiết qui nạp có thể tô màu các phần sinh ra bởi hai màu thoả mãn điều kiện đặt ra. Bây giờ ta vẽ đường thẳng thứ n. Đường thẳng này chia mặt phẳng ra làm hai phần, gọi là phần A và B. Các phần của mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng ở bên nửa mặt phẳng B sẽ giữ nguyên màu đã tô trước đó. Trái lại, các phần trong nửa mặt phẳng A mỗi phần sẽ được tô màu đảo ngược xanh thành đỏ và đỏ thành xanh. Rõ ràng:
  - Hai phần có chung cạnh ở cùng một nửa mặt phẳng A hoặc B là không có chung màu.
  - Hai phần có chung cạnh trên đường thẳng thứ n rõ ràng cũng không bị tô cùng màu (do màu bên nửa A bị đảo ngược).
- Vậy P(n) đúng. Theo qui nạp khẳng định đúng với mọi n.

Ví dụ 2



Ví dụ 2



Ví dụ 3

- Kết thúc một giải vô địch bóng chuyền gồm n đội tham gia, trong đó các đội thi đấu vòng tròn một lượt người ta mời các đội trưởng của các đội ra đứng thành một hàng ngang để chụp ảnh.
- P(n): Luôn có thể xếp n đội trưởng ra thành một hàng ngang sao cho ngoại trừ hai người đứng ở hai mép, mỗi người trong hàng luôn đứng cạnh một đội trưởng của đội thắng đội mình và một đội trưởng của đội thua đội mình trong giải.

Ví dụ 3

- **Chứng minh.** Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.
- Cơ sở qui nạp: Rõ ràng P(1) là đúng.
- Giả sử P(n-1) là đúng, ta chứng minh P(n) là đúng.
- Trước hết, ta xếp n-1 đội trưởng của các đội 1, 2,..., n-1. Theo giả thiết qui nạp, luôn có thể xếp họ ra thành hàng ngang thoả mãn điều kiện đầu bài. Không giảm tổng quát ta có thể giả thiết hàng đó là:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1.$$

Ví dụ 3

- Bây giờ ta sẽ tìm chỗ cho đội trưởng của đội n. Có 3 tình huống:
  - Nếu đội n thắng đội 1, thì hàng cần tìm là:

    $n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n\text{-}1.$
  - Nếu đội n thua đội n-1, thì hàng cần tìm là:

    $1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow \text{n-1} \rightarrow \text{n} .$
  - Nếu đội n thua đội 1 và thắng đội n-1.
    - Gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho đội n thắng đội k.
    - Rõ ràng tồn tại k như vậy.
    - Hàng cần thu được từ hàng gồm n-1 đội đã xếp bằng cách chèn đội trưởng đội n vào vị trí giữa đội trưởng của đội k-1 và đội k.

Ví dụ 3

$1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow k-1 \rightarrow k \rightarrow k+1 \rightarrow \ldots \rightarrow n-1$

n

Hàng cần tìm:

$1 \rightarrow \ldots \rightarrow k-1 \rightarrow {\color{red}n} \rightarrow k \rightarrow k+1 \rightarrow \ldots \rightarrow n-1$

Paradox

Định lý: Tất cả các con ngựa có cùng một màu.

Proof: Qui nạp theo *n*

Giả thiết qui nạp:

$P(n)$ ::= n con ngựa bất kỳ luôn có cùng một màu

Cơ sở qui nạp (n=1):

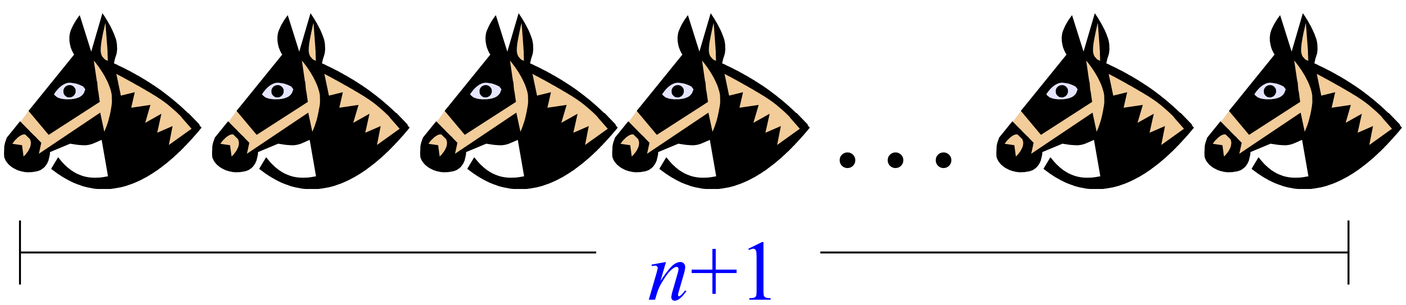
Chỉ có 1 con tất nhiên là chỉ có một màu!

Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử *n* con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh *n*+1 con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử n con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh $n+1$ con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Tập thứ hai gồm n con ngựa cùng màu

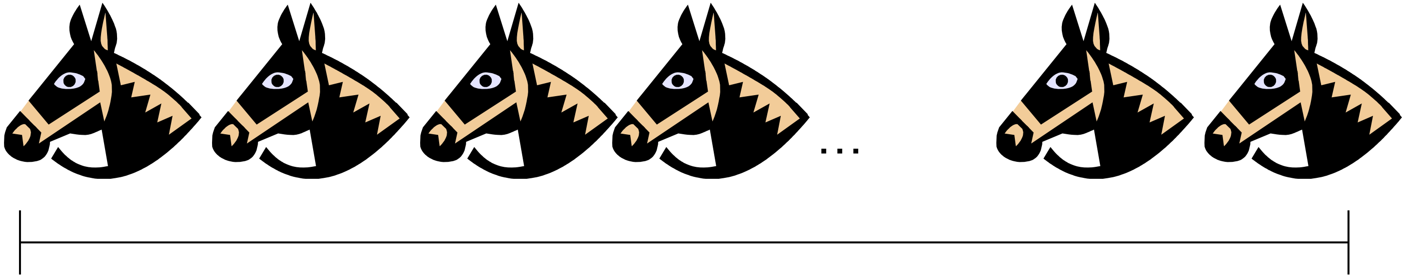
Tập thứ nhất gồm n con ngựa cùng màu

Paradox

Bước chuyển qui nạp

Giả sử *n* con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.

Ta cần chứng minh *n*+1 con ngựa bất kỳ luôn có cùng màu.



Suy ra *n*+1 con ngựa có cùng một màu!

Paradox

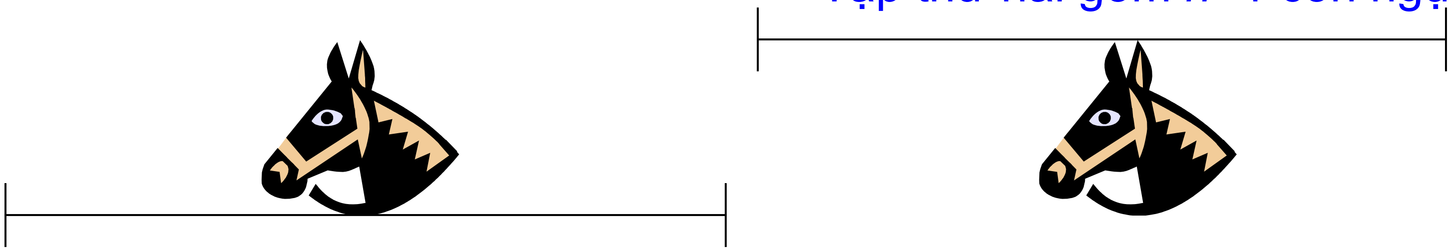
Lỗi ở đâu? n =1

Chứng minh $P(n) \rightarrow P(n+1)$

là false nếu $n = 1$, bởi vì hai nhóm ngựa

là không giao nhau.

Tập thứ hai gồm n=1 con ngựa



Tập thứ nhất gồm n=1 con ngựa

A bit of humor…

Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

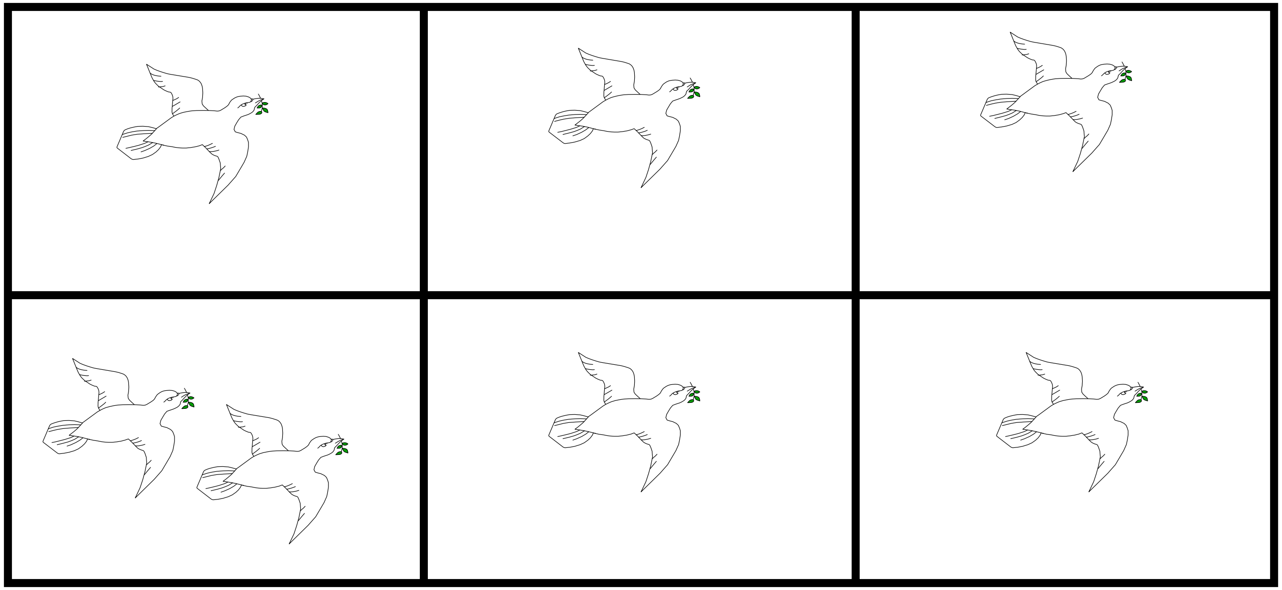
3. Nguyên lý Dirichlet

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Các ví dụ ứng dụng

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Nếu xếp nhiều hơn *n* đối tượng vào *n* cái hộp thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái hộp chứa ít ra là hai đối tượng.



3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Chứng minh.

Việc chứng minh nguyên lý trên chỉ là một lập luận phản chứng đơn giản. Giả sử ngược lại là không tìm được cái hộp nào chứa không ít hơn 2 đối tượng. Điều đó có nghĩa là mỗi cái hộp chứa không quá một đối tượng. Từ đó suy ra tổng số đối tượng xếp trong n cái hộp là không vượt quá n, trái với giả thiết là có nhiều hơn n đối tượng được xếp trong chúng.

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Lập luận trên đã được nhà toán học người Đức là Dirichlet vận dụng thành công vào việc giải quyết rất nhiều bài toán tồn tại tổ hợp.

Trong lập luận của Dirichlet, các đối tượng được xét là các quả táo còn các cái hộp được thay bởi các cái giỏ: "Nếu đem bỏ nhiều hơn *n quả táo vào n cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo*".

3.1. Phát biểu nguyên lý (Pigeonhole Principle)

Trong tài liệu tiếng Anh lập luận đó lại được trình bày trong ngôn ngữ của các con chim bồ câu:

"Nếu đem nhốt nhiều hơn n con chim bồ câu vào n cái lồng thì bao giờ cũng tìm được ít nhất 1 cái lồng chứa ít ra là 2 con chim bồ câu".

Vì thế nguyên lý còn có tên gọi là "Nguyên lý về các lồng chim bồ câu".

Trong ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp, nguyên lý có thể phát biểu như sau:

"Nếu tập X gồm nhiều hơn n phần tử được phân hoạch thành n tập con, thì bao giờ cũng tìm được một tập con trong phân hoạch đó có lực lượng ít ra là 2"

Ví dụ

- **Ví dụ 1**. Trong số 367 ngời bao giờ cũng tìm đợc hai ngời có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.
- **Ví dụ 2**. Trong kỳ thi học sinh giỏi điểm bài thi đợc đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất phải có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm đợc hai học sinh có kết quả thi nh nhau?
- **Giải.** Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau.

Ví dụ

- **Ví dụ 3**. Trong số những ngời có mặt trên trái đất luôn tìm đợc hai ngời có hàm răng giống nhau.
- **Giải:** Tất cả chỉ có

$$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$$

hàm răng khác nhau mà số ngời trên hành tinh chúng ta hiện nay đã vợt quá 5 tỷ.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát
Generalized Pigeonhole Principle

- Khi số lượng quả táo bỏ vào *k* cái giỏ vượt quá số lượng cái giỏ nhiều lần thì rõ ràng khẳng định trong nguyên lý về sự tồn tại cái giỏ chứa ít ra là 2 quả táo là quá ít. Trong trường hợp như vậy ta sử dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát sau đây:
- *"Nếu đem bỏ n quả táo vào k cái giỏ thì bao giờ cũng tìm được ít nhất một cái giỏ chứa ít ra là $\lceil n/k \rceil$ quả táo".*
- Ở đây ký hiệu $\lceil \alpha \rceil$ gọi là phần nguyên già của số thực α - theo định nghĩa là số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn hoặc bằng α.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát
Generalized Pigeonhole Principle

- Chứng minh nguyên lý tổng quát: Giả sử khẳng định của nguyên lý là không đúng. Khi đó mỗi cái giỏ chứa không quá $\lceil n/k \rceil$ - 1 quả táo. Từ đó suy ra tổng số quả táo bỏ trong k cái giỏ không vượt quá

$$k(\lceil n/k \rceil - 1) < k((n/k+1) - 1)) = n.$$

Mâu thuẫn thu được đã chứng minh nguyên lý.

Ví dụ

- **Ví dụ 4**. Trong 100 ngời có ít nhất 9 ngời sinh cùng một tháng.
- **Giải**: Xếp những ngời cùng sinh một tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một nhóm có không ít hơn $\lceil 100/12 \rceil = 9$ ngời.

- **Ví dụ 5**. Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là sáu ngời cùng nhận học bổng nh nhau?
- **Giải**: Số sinh viên ít nhất cần có để đảm bảo chắc chắn có 6 sinh viên cùng nhận học bổng nh nhau là số nguyên nhỏ nhất n sao cho $\lceil n/5 \rceil = 6$. Số nguyên nhỏ nhất đó là $n = 5\times5+1 = 26$. Vậy 26 là số lợng sinh viên nhỏ nhất đảm bảo chắc chắn là có sáu sinh viên cùng hởng một loại học bổng.

Ví dụ

- **Ví dụ 6**. Hỏi ít nhất phải có bao nhiêu ngời có mặt trên trái đất để luôn tìm đợc ba ngời có hàm răng giống nhau?
- **Giải:** Tất cả chỉ có

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296$$

hàm răng khác nhau. Ta cần tìm số n nhỏ nhất để $\lceil n/2^{32} \rceil = 3$. Từ đó số ngời cần tìm là $2 \times 2^{32} + 1 = 8\,589\,934\,593$.

3.2. Các ví dụ ứng dụng

- Trong các ví dụ ứng dụng phức tạp hơn của nguyên lý Dirichlet, cái giỏ và quả táo cần phải được lựa chọn khôn khéo hơn rất nhiều.
- Trong phần này ta sẽ xét một số ví dụ như vậy.

Ví dụ 1

- **Ví dụ 1**. Trong một phòng họp bao giờ cũng tìm đợc hai ngời có số ngời quen trong số những ngời dự họp là bằng nhau.
- **Giải**: Gọi số ngời dự họp là *n*, khi đó số ngời quen của một ngời nào đó trong phòng họp chỉ có thể nhận các giá trị từ 0 đến *n*-1. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có ngời có số ngời quen là 0 (tức là không quen ai cả) và có ngời có số ngời quen là *n*-1 (tức là quen tất cả). Vì vậy, theo số lợng ngời quen ta chỉ có thể phân *n* ngời ra thành *n*-1 nhóm. Theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất một nhóm phải có không ít hơn hai ngời, tức là luôn tìm đợc ít ra là hai ngời có số ngời quen là bằng nhau.

Ví dụ 2

- **Ví dụ 2**. Trong một tháng gồm 30 ngày một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất một trận, nhng không chơi quá 45 trận. Hãy chứng minh rằng phải tìm đợc một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.
- **Giải**: Giả sử a_j là tổng số trận thi đấu cho đến hết ngày thứ j của đội. Khi đó

$a_1, a_2, ..., a_{30}$

là dãy tăng các số nguyên dơng và đồng thời $1 \leq a_j \leq 45$. Suy ra dãy

$$a_1+14, a_2+14, ..., a_{30}+14$$

cũng là dãy tăng các số nguyên dơng và $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

Ví dụ 2

- Tất cả có 60 số nguyên dơng

  $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14,$

  trong đó tất cả đều nhỏ hơn hoặc bằng 59.

- Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số các số nguyên này phải là bằng nhau. Vì các số $a_1, \ldots, a_{30}$ là đôi một khác nhau và các số $a_1+14, \ldots, a_{30}+14$ cũng là đôi một khác nhau, nên suy ra phải tìm đợc chỉ số i và j sao cho $a_i = a_j+14$. Điều đó có nghĩa là có đúng 14 trận đấu trong giai đoạn từ ngày $j+1$ đến ngày i.

Ví dụ 3

- **Ví dụ 3**. Chứng minh rằng, trong số n+1 số nguyên dơng, mỗi số không lớn hơn $2n$, bao giờ cũng tìm đ ợc hai số sao cho số này chia hết cho số kia.
- **Giải**: Gọi các số đã cho là

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}.$$

- Viết mỗi một số a_j trong n+1 số trên dới dạng:

$$a_j = 2^{k(j)} q_j\ , j = 1, 2, \ldots, n+1$$

- trong đó $k(j)$ là nguyên không âm, q_j là số lẻ.

Ví dụ 3

- Các số $q_1, q_2, ..., q_{n+1}$ là các số nguyên lẻ, mỗi số không lớn hơn $2n$.
- Do trong đoạn từ 1 đến $2n$ chỉ có n số lẻ, nên từ nguyên lý Dirichlet suy ra là hai trong số các số $q_1, q_2, ..., q_{n+1}$ là bằng nhau, tức là tìm đọc hai chỉ số i và j sao cho $q_i = q_j = q$.
- Khi đó

$$a_i = 2^{k(i)}q,\ a_j = 2^{k(j)}q.$$

- Suy ra nếu $k(i) < k(j)$ thì a_j chia hết cho a_i, còn nếu $k(i) \geq k(j)$ thì a_i chia hết cho a_j.

Ví dụ 4

- **Ví dụ 4.** Trên mặt phẳng cho 5 điểm có toạ độ nguyên $M_i(x_i, y_i)$, i=1, 2, ..., 5. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng, ngoài hai đầu mút, còn đi qua một điểm có toạ độ nguyên khác nữa.
- **Giải.** Ta sẽ chứng minh: Luôn tìm được 2 điểm sao cho điểm giữa của đoạn thẳng nối chúng có toạ độ nguyên. Theo tính chẵn lẻ của hai toạ độ, 5 điểm đã cho có thể phân vào nhiều nhất là 4 nhóm:

  (Chẵn, Chẵn), (Chẵn,Lẻ), (Lẻ, Chẵn), (Lẻ, Lẻ).

Ví dụ 4

- Từ đó theo nguyên lý Dirichlet phải tìm được một nhóm chứa ít ra là 2 điểm, chẳng hạn đó là M_i, M_j. Khi đó điểm giữa G_{ij} của đoạn thẳng nối M_i và M_i có toạ độ

$$G_{ij} = ((x_i+x_j)/2, (y_i+y_j)/2).$$

- Do x_i và x_j cũng như y_i và y_j có cùng tính chẵn lẻ nên các toạ độ của G_{ij} là các số nguyên. Khẳng định của ví dụ được chứng minh.
- Khẳng định của ví dụ có thể tổng quát cho không gian n-chiều: "Trong không gian n-chiều cho $2^n + 1$ điểm có toạ độ nguyên. Khi đó luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng, ngoài hai đầu mút, còn đi qua một điểm có toạ độ nguyên khác nữa".

Ví dụ 5

Trước hết ta cần một số khái niệm.

- Cho $a_1, a_2, \ldots a_n$ là dãy số thực.
- n được gọi là ***độ dài*** của dãy số đã cho.
- Ta gọi ***dãy con*** của dãy đã cho là dãy có dạng $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$, trong đó $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$
- Dãy số được gọi là ***tăng ngặt*** nếu mỗi số hạng đứng sau luôn lớn hơn số hạng đứng trước.
- Dãy số được gọi là ***giảm ngặt*** nếu mỗi số hạng đứng sau luôn nhỏ hơn số hạng đứng trước..
  - Ví dụ: Cho dãy số

    1, 5, 6, 2, 3, 9.
  - 5, 6, 9 là dãy con tăng ngặt của dãy đã cho
  - 6, 3 là dãy con giảm ngặt của dãy đã cho

Ví dụ 5

- **Định lý:** Mỗi dãy gồm n^2+1 số *phân biệt* (nghĩa là các phần tử là khác nhau từng đôi) luôn chứa hoặc dãy con tăng ngặt độ dài $n+1$ hoặc dãy con giảm ngặt độ dài $n+1$.
- **Ví dụ:** Dãy

  8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

  gồm $10 = 3^2+1$ số hạng phải chứa hoặc dãy con tăng ngặt độ dài 4 phần tử hoặc dãy con giảm ngặt độ dài 4 phần tử.

  1, 4, 6, 12

  1, 4, 6, 7

  11, 9, 6, 5

Ví dụ 5

- **Chứng minh:** Giả sử a_1, a_2, …, a_{n^2+1} là dãy gồm n^2+1 số phân biệt. Gán cho mỗi số hạng a_k của dãy số cặp có thứ tự (i_k, d_k), trong đó i_k là độ dài của dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ a_k còn d_k là độ dài của dãy con giảm dài nhất bắt đầu từ a_k.

Ví dụ: 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7

$a_2 = 11$, (2,4)

$a_4 = 1$, (4,1)

- Bây giờ giả sử không tồn tại dãy tăng cũng như dãy giảm có độ dài $n+1$. Khi đó i_k và d_k là các số nguyên dương $\leq n$, với $k = 1, 2, ..., n^2+1$.

Ví dụ 5

- Do $1 \le i_k, d_k \le n$, nên theo qui tắc nhân có tất cả n^2 cặp có thứ tự dạng (i_k,d_k) khác nhau.
- Do ta có tất cả $n^2 + 1$ cặp (i_k,d_k), nên theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số chúng là trùng nhau.
- Tức là tồn tại hai số hạng a_s và a_t trong dãy đã cho với $s<t$ sao cho $i_s = i_t$ và $d_s = d_t$.
- Ta sẽ chỉ ra điều này là không thể xảy ra.
- Do các số hạng của dãy là phân biệt, nên

  hoặc là $a_s < a_t$ hoặc là $a_s > a_t$.

Ví dụ 5

- Nếu $a_s < a_t$, khi đó do $i_s = i_t$, ta có thể xây dựng dãy con tăng độ dài i_t+1 bắt đầu từ a_s, bằng cách nối đuôi nó bởi dãy con tăng độ dài i_t, bắt đầu từ a_t.

$$\dots, \boldsymbol{a_s}, \dots, \boldsymbol{a_t}, \dots.$$

- Suy ra dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ a_s có độ dài ít ra là $i_t + 1$, nghĩa là $i_s > i_t$. Mâu thuẫn với giả thiết $i_s = i_t$.
- Tương tự như vậy, nếu $a_s > a_t$, ta có thể chỉ ra d_s phải lớn hơn d_t, và cũng đi đến mâu thuẫn.
- Định lý được chứng minh.

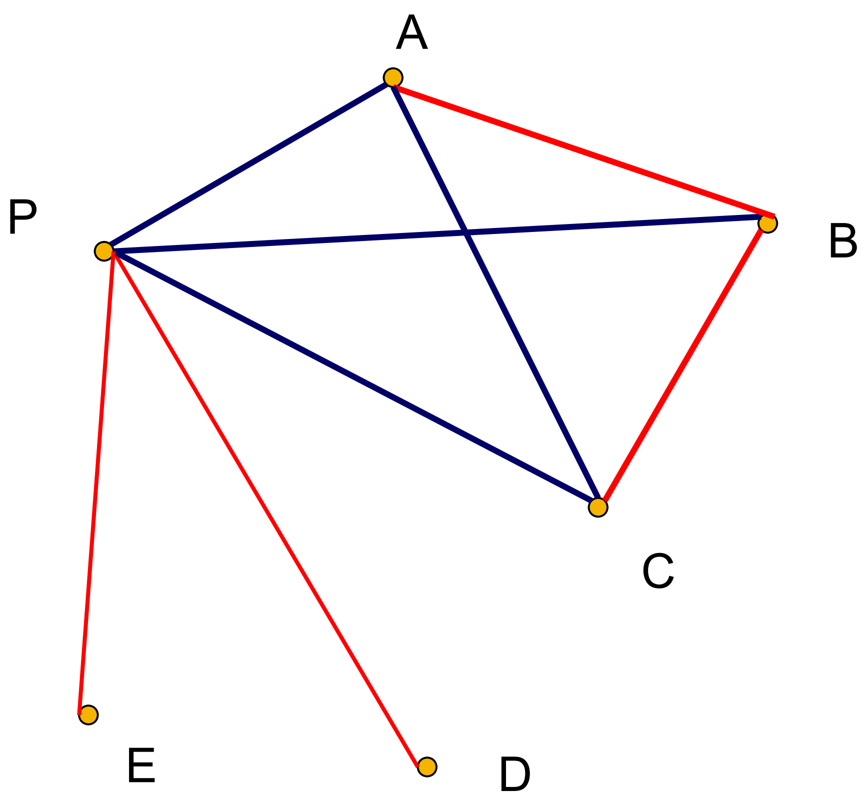
Chương 2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

1. Giới thiệu bài toán
2. Các kỹ thuật chứng minh cơ bản
3. Nguyên lý Dirichlet
4. Định lý Ramsey

Ví dụ mở đầu

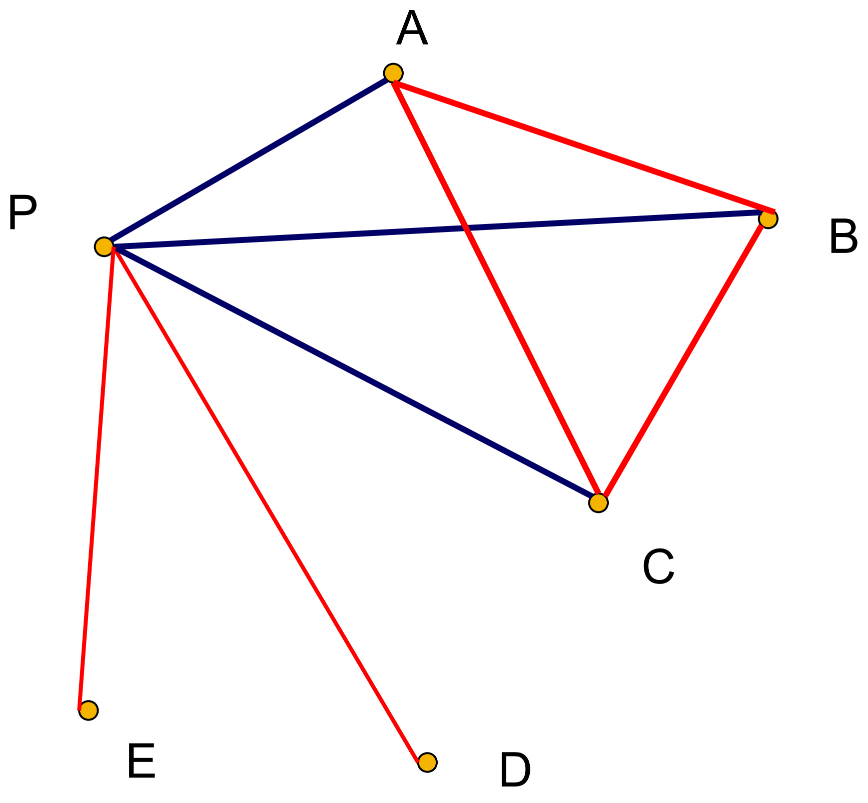
- Trong mặt phẳng cho 6 điểm đợc nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm đợc 3 điểm sao cho các cung nối chúng có cùng một màu (ta sẽ nói là chúng tạo thành tam giác xanh hoặc đỏ).
- **Giải**: Chọn điểm P nào đó. Từ nó có 5 cung nối với 5 điểm còn lại. Theo nguyên lý Dirichlet, có 3 trong số 5 cung đó phải có cùng một màu, chẳng hạn là màu xanh. Giả sử đó là các cung PA, PB, PC.
- Nếu nh một trong số 3 cung AB, AC, BC có màu xanh thì nó cùng với hai trong số ba cung PA, PB, PC tạo thành một tam giác xanh. Nếu ngợc lại thì tam giác ABC là một tam giác đỏ.

Ví dụ mở đầu



Nếu nh một trong số 3 cung AB, AC, BC có màu xanh thì nó cùng với hai trong số ba cung PA, PB, PC tạo thành một tam giác xanh.

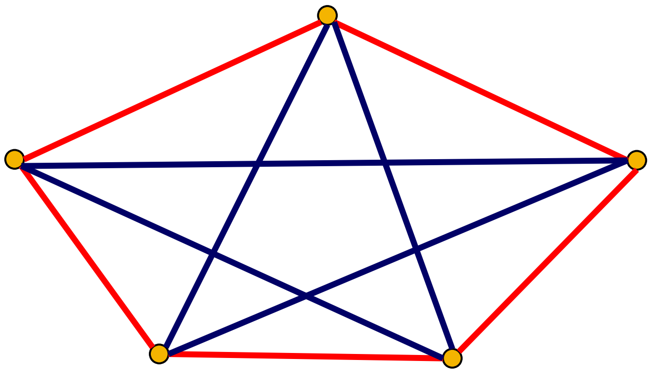
Ví dụ mở đầu



Nếu cả 3 cung AB, AC, BC có màu đỏ thì chúng tạo thành một tam giác đỏ.

Phân tích ví dụ

- Một cách phát biểu khác của kết quả vừa chứng minh là: Trong số 6 ngời tại một bàn tiệc luôn tìm đợc hoặc ba ng ời đôi một quen nhau hoặc ba ngời đôi một không quen nhau.
- Có thể thấy rằng nếu thay con số 6 bởi $n > 6$ thì khẳng định trong ví dụ vẫn đúng. Nhưng nếu thay con số 6 bởi 5 thì khẳng định trong ví dụ không còn đúng nữa như chỉ ra trong hình vẽ sau đây



Phân tích ví dụ

- Như vậy có thể thấy 6 là giá trị *n* nhỏ nhất để khẳng định trong ví dụ là đúng.
- Chúng ta có thể đặt ra các câu hỏi tơng tự nh: Hỏi ít nhất phải có bao nhiêu ngời để chắc chắn tìm đợc hoặc 4 ngời đôi một quen nhau hoặc 4 ngời đôi một không quen nhau? Hỏi ít nhất phải có bao nhiêu ngời để chắc chắn tìm đợc hoặc 5 ngời đôi một quen nhau hoặc 5 ngời đôi một không quen nhau?
- Con số nhỏ nhất nhắc đến trong các câu hỏi trên đợc gọi là các số Ramsey, mang tên nhà toán học ngời Anh đã chứng minh đ ợc định lý nổi tiếng trong lý thuyết tập hợp là sự tổng quát hoá nguyên lý Dirichlet.

Các số Ramsey

- Để có thể phát biểu những kết quả tổng quát hơn chúng ta cần đến một số khái niệm.
- **Định nghĩa 1.** *Gọi K_n là bộ gồm hai tập V, E, trong đó V là tập gồm n điểm còn E là tập các đoạn nối giữa tất cả các cặp điểm trong V.*
  - Ta sẽ ký hiệu $K_n = (V, E)$.
  - Các phần tử của V đọc gọi là các **đỉnh**, và V là tập đỉnh của K_n.
  - Mỗi đoạn nối hai đỉnh $u, v \in V$ sẽ đọc gọi là một **cạnh** của K_n và ký hiệu là (u, v), và tập E đọc gọi là tập cạnh của K_n.

Các số Ramsey

- Ta có thể phát biểu lại kết quả trong ví dụ mở đầu nh sau: "Giả sử mỗi cạnh của K_6 đợc tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Khi đó K_6 luôn chứa hoặc K_3 với tất cả các cạnh đ ợc tô màu xanh (gọi tắt là K_3 xanh) hoặc K_3 với tất cả các cạnh đợc tô màu đỏ (gọi tắt là K_3 đỏ).
- Chúng ta sẽ nói rằng số 6 có tính chất (3,3)-Ramsey.
- **Định nghĩa 2.** *Giả sử i và j là hai số nguyên sao cho* $i \geq 2$, $j \geq 2$. *Số nguyên dơng m có tính chất (i,j)-Ramsey nếu* K_m *với mỗi cạnh đợc tô bởi một trong hai màu xanh, đỏ luôn chứa hoặc là* K_i *đỏ hoặc là* K_j *xanh.*

Các số Ramsey

- Từ phân tích ở trên ta thấy 6 có tính chất (3,3)-Ramsey, và mọi số n<6 đều không có tính chất này. Vậy 6 là số nhỏ nhất có tính chất (3,3)-Ramsey.
- **Định nghĩa 3.** *Số Ramsey $R(i,j)$ là số nguyên dơng nhỏ nhất có tính chất (i,j)-Ramsey.*
- Chẳng hạn, từ kết quả vừa trình bày ở trên, ta có $R(3,3) = 6$.
- **Ví dụ.** Tìm $R(2,7)$ - số nguyên dơng nhỏ nhất có tính chất (2,7)-Ramsey.
- **Giải:** Trớc hết ta tìm số nguyên dơng n sao cho với mọi cách tô các cạnh của K_n bởi hai màu xanh, đỏ luôn tìm đợc hoặc K_2 đỏ hoặc K_7 xanh. $R(2,7)$ là số nhỏ nhất có tính chất này.

Các số Ramsey

- Xét một cách tô màu (tuỳ ý) các cạnh của K_7. Rõ ràng hoặc là tìm đợc ít nhất một cạnh của K_7 đợc tô màu đỏ, hoặc là tất cả các cạnh của nó đều đợc tô bởi màu xanh. Nếu có cạnh tô màu đỏ thì rõ ràng ta có K_2 đỏ. Còn nếu tất cả các cạnh đều tô bởi màu xanh thì ta có K_7 xanh. Vậy số 7 có tính chất (2,7)-Ramsey, và vì thế $R(2,7) \leq 7$.
- Nhng $R(2,7)$ không thể nhỏ hơn 7, bởi vì nếu tô tất cả các cạnh của K_6 bởi màu xanh ta sẽ không tìm đợc K_2 đỏ và cũng không tìm đợc K_7 xanh.
- Vậy $R(2,7) = 7$.

Các số Ramsey

- Các tính chất cơ bản sau đây của số Ramsey $R(i,j)$ có thể chứng minh bằng các lập luận tơng tự nh trong các ví dụ đã trình bày:
  - $R(i,j) = R(j,i)$;
  - Nếu m có tính chất (i,j)-Ramsey, thì mọi số $n > m$ cũng có tính chất này;
  - Nếu m không có tính chất (i,j)-Ramsey, thì mọi số $n < m$ cũng không có tính chất này;
  - Nếu $i_1 \geq i_2$ thì $R(i_1,j) \geq R(i_2,j)$.

Các số Ramsey

- Việc xác định số Ramsey $R(i,j)$ đòi hỏi chúng ta phải tìm số nguyên dơng nhỏ nhất có tính chất (i,j)-Ramsey. Liệu số này có tồn tại với mọi $i \geq 2$, $j \geq 2$ hay không? Định lý Ramsey cho ta khẳng định về sự tồn tại của các số này.
- **Định lý Ramsey.** *Nếu $i \geq 2$, $j \geq 2$ là các số nguyên dơng thì luôn tìm đợc số nguyên dơng với tính chất (i,j)-Ramsey (từ đó suy ra số $R(i,j)$ là tồn tại).*

Các số Ramsey

- Các số $R(i,j)$ vừa trình bày ở trên chỉ là một trong số nhiều dòng số Ramsey đã được nghiên cứu.
- Việc xác định $R(i,j)$ với những giá trị i, j cụ thể luôn là các bài toán tổ hợp không tầm thường. Hiện nay người ta mới biết giá trị của $R(i, j)$ với rất ít giá trị của (i,j).

$i \setminus j$	2	3	4	5	6
2	2				
3	3	6			
4	4	9	18		
5	5	14	25 - 27	43 – 52	
6	6	18	34 - 43	57 – 94	102 - 169
7	7	23	$\geq$ 49	$\geq$ 76	
8	8	28	$\geq$ 53	$\geq$ 94	
9	9	36	$\geq$ 69